الجمهورية التونسية

وزارة التربية القومية

PHYSIQUE

P. CISEL

7

Math-Sciences
Math-Technique

CENTRE NATIONAL PEDAGOGIQUE

Edition Experimentale

PHYSIQUE

7e Année Math. Sciences et Math. Technique

Ouvrage rédigé à la Délégation Régionale de Sousse par :

Mr Pierre CISEL

Je tiens à remercier Monsieur KACHOURI d'avoir bien voulu accepter de relire la partie mathématique de cet ouvrage.

Achevé d'Imprimer
sur les Presses de
l'Imprimerie du C.N.P

Tous droits réservés au C. N. P.

P R E F A C E

Ce cours de Physique est destiné aux élèves des classes de 7ème année Math-Sciences et Math-Techniques. Il est conforme aux programmes actuellement en vigueur.

La plupart des chapitres comportent trois rubriques:

1/ Le Cours.

2/ "L'Essentiel" du chapitre dont les élèves pourront s'inspirer pour rédiger des fiches personnelles au fur et à mesure du déroulement du cours.

3/ Des Exercices et Problèmes. Ceux qui ne sont suivis d'aucune mention particulière ont été rédigés par l'auteur.

La réalisation en classe d'expériences soigneusement préparées et leur exploitation méthodique doivent permettre de dégager les idées essentielles relatives aux phénomènes physiques. La formulation mathématique vient ensuite. L'auteur s'est donc efforcé de ne présenter que des expériences mises au point et exécutées avec du matériel existant dans nos établissements. Quelques unes d'entre elles ont été décrites dans le détail afin de faciliter la tâche des collègues qui les reproduiront devant leurs élèves.

Nous serions reconnaissant à nos collègues, professeurs de mathématiques de bien vouloir nous faire part de toutes les critiques et corrections qui permettraient d'améliorer la prochaine édition de cet ouvrage. Il va sans dire que toutes les suggestions des utilisateurs, professeurs de physique et élèves seront également les bienvenues

L' A U T E U R

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE	T I T R E	PAGE
Chapitre 1	Chiffres significatifs. Calculs d'erreurs	5
Chapitre 2	Eléments de Cinématique	20
Chapitre 3	La chute des corps dans l'air et dans le vide	43
Chapitre 4	Le principe fondamental de la dynamique	67
Chapitre 5	Dynamique des systèmes matériels. Théorème du centre de gravité	78
Chapitre 6	Applications de la relation fondamentale de la dynamique	86
Chapitre 7	Les mouvements circulaires	110
Chapitre 8	Rotation d'un solide autour d'un axe fixe	138
Chapitre 9	Le mouvement rectiligne sinusoïdal	156
Chapitre 10	Le mouvement sinusoïdal de rotation	173
Chapitre 11	Le pendule pesant	185
Chapitre 12	Le théorème de l'énergie cinétique	203
Chapitre 13	Quantité de mouvement. Impulsion	234
Chapitre 14	Moment cinétique. Impulsion angulaire	263
Chapitre 15	L'énergie potentielle. L'énergie mécanique totale	279
Chapitre 16	Généralités sur les phénomènes périodiques	301
Chapitre 17	Propagation d'un mouvement vibratoire	308
Chapitre 18	Nature vibratoire du son	333
Chapitre 19	Composition de deux mouvements vibratoires	339
Chapitre 20	Ondes stationnaires	359
Chapitre 21	La résonance	383
Chapitre 22	Les interférences mécaniques	390
Chapitre 23	Les radiations lumineuses	408
Chapitre 24	Les interférences lumineuses	415
Chapitre 25	Le courant alternatif	438
Chapitre 26	L'effet thermo-électronique	494
Chapitre 27	Accélération des électrons	503
Chapitre 28	L'effet photo-électrique	519
Chapitre 29	Les rayons X	536
Chapitre 30	L'énergie nucléaire	543
Chapitre 31	La radioactivité	555
	Problèmes de révision	570

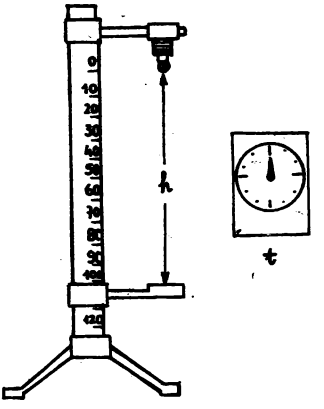
Chapitre 1

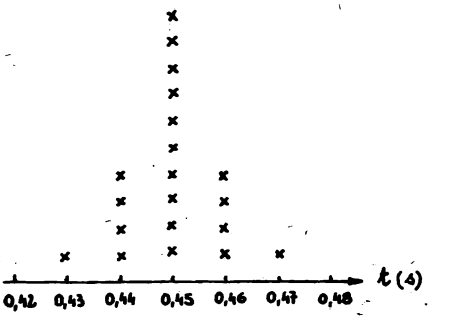
LES CHIFFRES SIGNIFICATIFS
LES CALCULS D' ERREURS

I - DETERMINATION DU DOMAINE EXPERIMENTAL

Les mesures décrites ici s'effectuent au cours de la séance de travaux pratiques consacrée à la chute libre d'une bille.

Une bille tombe sans vitesse initiale d'une hauteur de 1,00m. On mesure la durée de sa chute à l'aide d'une horloge électrique au centième de seconde. On suppose que les seules erreurs possibles sont accidentelles - ce qui donne des résultats tantôt trop grands, tantôt trop petits - mais qu'il n'y a pas d'erreurs systématiques qui donneraient des résultats toujours trop grands ou toujours trop petits.





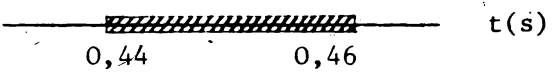
Au cours d'une série de 20 mesures, on a obtenu :

- Une valeur égale à 0,43 s ;
- Quatre valeurs égales à 0,44 s ;
- Dix valeurs égales à 0,45 s ;
- Quatre valeurs égales à 0,46 s ;
- Une valeur égale à 0,47 s.

Nous admettrons que la valeur exacte de la durée de chute bien qu'inconnue est plus probablement voisine de 0,45 s qui est la valeur expérimentale la plus fréquente ; la probabilité de présence de la valeur exacte au voisinage de 0,44 s ou 0,46 s est plus faible ; elle est très

faible au voisinage de 0,43s ou 0,47s, mais non nulle.

Nous admettons maintenant expérimental à l'intervalle $t \in [\ 0,44s \ldots 0,400\ ]$



La probabilité pour que ce domaine contienne la valeur exacte de la durée de chute est grande. Par exemple : 90%. Le résultat de l'expérience peut s'écrire de plusieurs façons :

$$0,44s < t < 0,46s$$

$$t = 0,45s \pm 0,01s$$

$$\begin{cases} \text{Valeur minimale : } t_m = 0,44s \\ \text{Valeur maximale : } t_M = 0,46s \end{cases}$$

II - LE NOMBRE DE CHIFFRES SIGNIFICATIFS

Il y a deux catégories de mesures en physique :

- Les mesures directes, fournies par un instrument de mesure. Par exemple : mesure d'une hauteur de chute h avec une règle graduée; mesure d'une durée de chute t avec une horloge électrique.

- Les mesures indirectes qui résultent de deux ou plusieurs mesures directes et de l'emploi d'une formule. Ainsi, pour mesurer la vitesse moyenne de chute de la bille, on mesure h et t et on calcule V = h/t. De même, on mesure indirectement la surface d'un champ rectangulaire à partir des mesures directes de sa longueur et de sa largeur.

1/ Chiffres significatifs dans une mesure directe

Reprenons l'exemple précédent : la durée de chute est:

$t = 0,45s \pm 0,01s$ ou

$t = (4,5 \pm 0,1) . 10^{-1}$ s (notation scientifique)

On peut aussi écrire :

$$\begin{cases} \text{Valeur minimale : } t_m = 4,4 . 10^{-1} \text{ s} \\ \text{Valeur approchée: } t = 4,5 . 10^{-1} \\ \text{Valeur maximale : } t_M = 4,6 . 10^{-1} \text{ s} \end{cases}$$

Le premier chiffre est certain; le second est un chiffre incertain : c'est sur lui que porte l'incertitude. Mais les deux chiffres étant fournis par l'instrument de mesure, on dit qu'ils sont significatifs. L'horloge fournit au cours de cette expérience deux chiffres significatifs.

Remarque :

Un zéro placé avant la virgule n'est pas significatif, alors qu'un zéro placé après la virgule est significatif. Ceci apparaît plus nettement si l'on transpose en notation scientifique. Ainsi :

$t = 0,45$ s ou $4,5.10^{-1}$ s a deux chiffres significatifs

$t = 0,450$s ou $4,50.10^{-1}$ s a trois chiffres significatifs

La conclusion concernant le nombre de chiffres significatifs fournis par l'horloge se généralise à tout instrument :

> Le nombre de chiffres significatifs au cours d'une mesure directe est égal au nombre de chiffres fournis par l'instrument, à savoir : les chiffres certains et un chiffre incertain.

2/ Chiffres significatifs dans une mesure indirecte

Nous allons déterminer à partir d'un exemple le nombre de chiffres significatifs dans une mesure indirecte :

La longueur d'une plaque métallique rectangulaire est mesurée avec un pied à coulisse et sa largeur avec un palmer.

Longueur : $L = 2,57$ cm : 3 chiffres significatifs ;

Largeur : $\ell = 1,346$cm : 4 chiffres significatifs.

Calculons les valeurs minimale, approchée et maximale de la surface, en admettant que l'incertitude absolue sur chaque grandeur est égale à une unité du dernier chiffre inscrit :

$$\begin{cases} S_m = L_m \times \ell_m = 2,56 \times 1,345 = 3,44320 \text{ cm}^2 \\ S = L \times \ell = 2,57 \times 1,346 = 3,45922 \text{ cm}^2 \\ S_M = L_M \times \ell_M = 2,58 \times 1,347 = 3,47526 \text{ cm}^2 \end{cases}$$

Les deux premiers chiffres sont certains ; le troisième est incertain car c'est sur lui que porte l'incertitude. Il n'y a donc que trois chiffres significatifs alors que l'une des mesures directes avait quatre chiffres. On n'a pas le droit de conserver les chiffres suivants. Il faudra donc écrire :

$$\begin{cases} S_m = 3,44 \text{ cm}^2 \\ S = 3,46 \text{ cm}^2 \\ S_M = 3,48 \text{ cm}^2 \end{cases} \quad \text{ou } S = 3,46 \text{ cm}^2 \pm 0,02 \text{ cm}^2$$

La largeur a quatre chiffres, la longueur en a trois. Dans ces conditions, la surface n'a que trois chiffres significatifs. Nous généraliserons ce résultat :

> Le nombre de chiffres significatifs dans une mesure indirecte est au plus égal au nombre de chiffres de la mesure directe la moins précise.

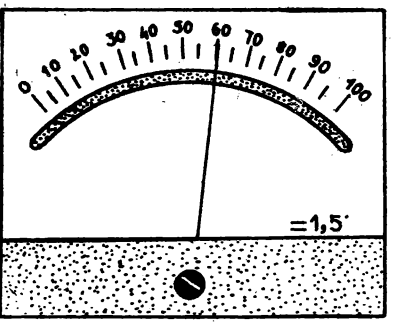
Le plus souvent, les expériences effectuées au lycée fournissent des résultats à trois chiffres significatifs.

III- LA CLASSE D'UN INSTRUMENT

On dit qu'un instrument est de classe n, lorsque l'incertitude absolue commise vaut, en un point quelconque du cadran, n% de la graduation maximum.

Exemple :

La graduation 100 de l'ampèremètre ci-contre, de classe 1,5 , correspond à 1,00A.



L'incertitude absolue sur toute mesure est :

$$\Delta I = \frac{1,5}{100} \times 1 = 1,5.10^{-2} \text{ A}$$

Si l'on mesure un courant de 1 A, l'incertitude relative correspondante est :

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{1,5.10^{-2}}{1} = 1,5\%$$

Si le courant mesuré est 0,6 A, l'incertitude relative est :

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{1,5.10^{-2}}{0,6} = 2,5\%$$

Enfin, si le courant mesuré n'est plus que 0,1 A, l'incertitude relative s'élève à 15%.

L'incertitude relative augmente considérablement si l'on utilise un tel instrument dans le début de sa graduation. C'est pourquoi il faut choisir le calibre qui provoque la plus grande déviation possible de l'aiguille.

IV - THEOREMES DES INCERTITUDES ABSOLUES ET RELATIVES

Il est impossible de connaître la valeur exacte d'une grandeur ; l'expérience conduit toujours à une valeur approchée. Soit g la grandeur à mesurer, g_a sa valeur approchée et g_{ex} sa valeur exacte. L'erreur absolue est :

$$\delta g = g_a - g_{ex}$$

Mais l'erreur absolue ne peut pas être connue, car sa connaissance nous conduirait à un résultat parfait. Elle est positive ou négative suivant que la valeur approchée est plus grande ou plus petite que la valeur exacte. Mais on n'en connait même pas le sens. Aussi définissons-nous l'incertitude absolue comme la limite supérieure de la valeur absolue de l'erreur possible.

$$\Delta g \geqslant |\delta g|$$

Nous venons d'indiquer deux types d'estimations de l'incertitude absolue : en effectuant de nombreuses fois la même mesure ; par une seule mesure mais en tenant compte de la classe de l'appareil.

Nous énoncerons sans les démontrer les théorèmes relatifs aux incertitudes absolues et relatives.

1/ Incertitude absolue sur une somme algébrique

Soit g une grandeur obtenue indirectement à partir d'une somme algébrique :

$$g = a + b - c$$

Si δa δb et δc sont les erreurs absolues sur a, b et c, l'erreur absolue sur g est :

$$\delta g = \delta a + \delta b - \delta c$$

Or δa, δb, δc ne sont connues ni en grandeur ni en signe . L'incertitude absolue sur g est :

$$\Delta g = \Delta a + \Delta b + \Delta c$$

L'incertitude absolue sur une somme algébrique est égale à la somme des incertitudes absolues de chaque terme.

2/ Incertitude relative sur un produit ou sur un quotient

Cas d'un produit :

Soit g la grandeur mesurée : $g = a \cdot b$

Les erreurs relatives sur a et b sont $\frac{\delta a}{a}$ et $\frac{\delta b}{b}$.

L'erreur relative sur le produit est donnée par la formule :

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$$

L'incertitude relative est la limite supérieure :

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Cas d'un quotient :

La grandeur mesurée indirectement est $g = \frac{a}{c}$

L'erreur relative est : $\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta a}{a} - \frac{\delta c}{c}$

L'incertitude relative: $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta c}{c}$

Regroupons les deux cas précédents : soit $g = \frac{a \cdot b}{c}$ la grandeur calculée à partir de a,b et c.

L'erreur relative est : $\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} - \frac{c}{c}$

L'incertitude relative:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

L'incertitude relative sur un produit ou un quotient est égale à la somme des incertitudes relatives des différents termes

Remarque :

Dans le cas d'une somme on commence toujours par calculer l'incertitude absolue. On peut ensuite, si nécessaire, obtenir la valeur numérique de l'incertitude relative en divisant l'incertitude absolue par la valeur approchée de la grandeur calculée.

Dans le cas d'un produit ou d'un quotient, on commence toujours par calculer l'incertitude relative. On obtient ensuite l'incertitude absolue en multipliant l'incertitude relative par la valeur approchée de la grandeur calculée. Ainsi, si $g = \frac{a \cdot b}{c}$, l'incertitude absolue sur g est :

$$\Delta g = g \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}\right)$$

Généralisation :

Si la mesure effectuée est $g = a^p \cdot b^q \ldots$ où p, q ... sont des réels quelconques, l'erreur relative est :

$$\frac{\delta g}{g} = p \frac{\delta a}{a} + q \frac{\delta b}{b} + \ldots\ldots$$

et l'incertitude relative :

$$\frac{\Delta g}{g} = |p| \frac{\Delta a}{a} + |q| \frac{\Delta b}{b} + \ldots$$

Exemples numériques :

a/ Une résistance R = 5,1 Ω est traversée pendant 60,0s par un courant continu d'intensité 2,2 A. Quelle est l'énergie thermique dépensée dans cette résistance ? Donner son incertitude absolue.

D'après la loi de Joule :

$W = R I^2 t = 5,1 \cdot (2,2)^2 \cdot 60$ $\qquad$ $\underline{W = 1\,500\ J}$

Présentons le résultat avec 2 chiffres : $\underline{W = 1,5.10^3 J}$

Si aucune indication n'est fournie dans l'énoncé sur les incertitudes absolues des différents termes, il faut supposer qu'elles sont au plus égales à une unité de l'ordre du dernier chiffre inscrit.

Puisqu'il s'agit d'un produit, calculons d'abord l'incertitude relative :

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta t}{t} \leqslant \boxed{\frac{0,1}{5}} + 2\boxed{\frac{0,1}{2}} + \boxed{\frac{0,1}{60}} = 0,12$$

Majorés — négligeable

L'incertitude absolue:

$$\Delta W = W \cdot 0,12 = 0,18 \cdot 10^3 J \simeq 0,2 \cdot 10^3 J$$

L'énergie thermique dépensée dans le conducteur est donc :

$$\underline{W = (1,5 \pm 0,2) \cdot 10^3 J}$$

b/ La période d'un pendule simple pour des oscillations de faible amplitude est :

$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ell = 1,000 \text{ m} \pm 0,001 \text{ m} \\ g = 9,80 \text{ N/kg} \pm 0,01 \text{ N/kg} \end{cases}$$

Calculer T et son incertitude absolue. (La théorie du pensule sera exposée dans un chapitre ultérieur).

On notera que la précision relative sur g est de l'ordre du millième, comme celle sur ℓ . On présentera donc un résultat numérique à quatre chiffres (9,80 est très voisin de 10,00). De plus, afin de rendre négligeable l'erreur relative due à Π , il faudra lui donner une valeur numérique à quatre chiffres : $\Pi = 3,142$.

Calcul de T : $T = 2 \times 3,142 \times \sqrt{\frac{1}{9,80}} = 2,007 s$

Le calcul d'erreur : $T = 2\Pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ s'écrit :

$$T = 2\Pi\left[\frac{\ell}{g}\right]^{\frac{1}{2}} = 2\Pi\ell^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}$$

L'erreur relative sur Π étant négligeable, le 2 étant un coefficient sans erreur, l'erreur relative sur T est :

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\delta\ell}{\ell} - \frac{1}{2}\frac{\delta g}{g}$$ et l'incertitude relative :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$$

L'incertitude absolue : $\Delta T = T \times \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta g}{g}\right)$

Numériquement :

$$\Delta T = \frac{2,007}{2} \left(\frac{0,001}{1} + \frac{0,01}{9,80}\right) \simeq 1\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000}\right) = 0,002s$$

$$\underline{T = 2,007s \pm 0,002s}$$

3/ Calculs d'incertitudes lorsque les facteurs du produit ou du quotient ne sont pas indépendants

Exemple :

Soit $g = \frac{a + 3b}{2a + b}$. Calculer l'incertitude relative $\frac{\Delta g}{g}$.

Les deux facteurs du quotient ne sont pas indépendants puisque la grandeur figure au numérateur et au dénominateur.

-Etablissons d'abord l'expression de l'erreur relative en posant :

$$a + 3b = A \quad \text{et} \quad 2a + b = B$$

$$g = \frac{A}{B} \quad \text{et} \quad \frac{\delta g}{g} = \frac{\delta A}{A} - \frac{\delta B}{B}$$

Nous calculons séparément $\frac{\delta A}{A}$ et $\frac{\delta B}{B}$

$\frac{\delta A}{A} = \frac{\delta(a + 3b)}{a + 3b}$ Il s'agit, au numérateur, de chercher l'erreur absolue sur une somme : c'est la somme algébrique des erreurs absolues :

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{\delta a + 3\delta b}{a + 3b}$$

De même :

$$\frac{\delta B}{B} = \frac{2\delta a + \delta b}{2a + b}$$

-Regroupons les termes correspondants aux mêmes erreurs

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta A}{A} - \frac{\delta B}{B} = \delta a\left(\frac{1}{a + 3b} - \frac{2}{2a + b}\right) + \delta b\left(\frac{3}{a + 3b} - \frac{1}{2a + b}\right)$$

-Expression de l'incertitude relative

Nous l'obtiendrons en remplaçant les erreurs absolues δa et δb par les incertitudes absolues Δa et Δb et en prenant les valeurs absolues des facteurs entre parenthèses :

$$\frac{\Delta g}{g} = \Delta a. \left|\frac{1}{a+3b} - \frac{2}{2a+b}\right| + \Delta b. \left|\frac{3}{a+3b} - \frac{1}{2a+b}\right|$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{5b \,.\, \Delta a + 5a \,.\, \Delta b}{(a+3b)(2a+b)}$$

V - LES APPROXIMATIONS USUELLES

ε et ε' étant des quantités très petites devant l'unité, par exemple inférieures à 10^{-2}, effectuons le produit :

$$x = (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon')$$

$$x = 1 + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon\varepsilon'$$

La quantité $\varepsilon\varepsilon'$ est inférieure à 10^{-4} et on peut le négliger devant ε et ε'. Nous écrirons donc :

$$(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon') \simeq 1 + \varepsilon + \varepsilon'$$

Ce résultat se généralise à un nombre quelconque de produits :

$$x = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) \ldots$$

Tous les produits $\varepsilon_i \varepsilon_j$ seront négligés devant les ε_i et nous conserverons :

$$x \simeq 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$$

Si l'expression contient n facteurs identiques $(1 + \varepsilon)$, les raisonnements précédents aboutissent à la formule d'approximation :

$$\boxed{(1 + \varepsilon)^n \simeq 1 + n\,\varepsilon}$$

La formule précédente a été démontrée pour n entier positif. Nous admettrons qu'elle est valable quel que soit n réel. Nous aurons ainsi :

pour $n = 2$: $(1 + \varepsilon)^2 \simeq 1 + 2\varepsilon$

$(1 - \varepsilon)^2 \simeq 1 - 2\varepsilon$

pour $n = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1 + \varepsilon} = (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$

$\sqrt{1 - \varepsilon} = (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$

pour $n = -1$: $\dfrac{1}{1+\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{-1} \simeq 1 - \varepsilon$

$\dfrac{1}{1-\varepsilon} = (1-\varepsilon)^{-1} \simeq 1 + \varepsilon$

pour $n = -\frac{1}{2}$: $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = (1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} = (1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 + \dfrac{\varepsilon}{2}$

etc...

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 1

Le nombre de chiffres significatifs :

- Dans une mesure directe est égal au nombre de chiffres fournis par l'instrument de mesure ;

- Dans une mesure indirecte, est au plus égal au nombre de chiffres de la mesure directe la moins précise.

L'incertitude absolue commise avec un appareil de classe n en un point quelconque du cadran vaut n% de la valeur de la graduation maximale.

$$g = a + b - c$$
$$\delta g = \delta a + \delta b + \delta c$$
$$\Delta g = \Delta a + \Delta b + \Delta c$$

$$g = a^p \cdot b^q \ldots \quad p,q \ldots \text{réels}$$
$$\frac{\delta g}{g} = p \frac{\delta a}{a} + q \frac{\delta b}{b} + \ldots$$
$$\frac{\Delta g}{g} = |p| \frac{\Delta a}{a} + |q| \frac{\Delta b}{a} + \ldots$$

$$\text{si } 1 \ll \varepsilon \quad (1 + \varepsilon)^n \simeq 1 + n\,\varepsilon$$

Chapitre 1

EXERCICES

1/ Un courant d'intensité constante I traverse une résistance R pendant une durée t. La résistance est plongée dans un calorimètre de valeur en eau M. (eau plus calorimètre)

a/ Soit Q la quantité de chaleur exprimée en calories reçue par le calorimètre et W l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Etablir le rapport J = W/Q (équivalent en joules d'une calorie).

b/ Les incertitudes relatives sur R, I, t et M valent un millième. Quelle doit être l'incertitude relative sur l'accroissement de température du calorimètre si l'on veut obtenir J au centième près ?

2/ L'arête d'un cube de métal, mesurée à la règle graduée est a = 10,0 cm à 0°C. Le coefficient de dilatation linéique du métal est $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-5}$

a/ Donner les valeurs extrêmes du volume de ce cube à 0°C.

b/ Exprimer l'accroissement δa de longueur de l'arête pour un accroissement δt de la température. En déduire la variation δV correspondante du volume.

c/ Quelle doit être l'incertitude absolue maximale Δa si l'on veut déceler une variation de longueur de l'arête due à une élévation de la température δt ?

Réponse : $\Delta a < a \cdot \lambda \cdot \delta t$

3/ Les dimensions d'un parallèlipipède rectangle sont : L = 25,3 cm ; ℓ = 18,7 cm ; h = 12,4 cm.

a/ Calculer la valeur approchée du volume du parallélépipède, ses valeurs extrêmes et l'incertitude absolue sachant que les mesures ont été effectuées à l'aide d'une règle graduée en millimètres.

b/ Calculer l'incertitude absolue sur le volume à partir des théorèmes sur les incertitudes. Comparer les résultats obtenus par ces deux méthodes.

4/ L'intensité dans une portion de circuit, lue sur le calibre 2 A d'un ampèremètre de classe 1,5 est

I = 1,50 A. La différence de potentiel aux extrémités de la portion de circuit, lue sur le calibre 30 V d'un voltmètre de classe 1,5 est 22,5 V. La puissance consommée s'exprime par P = U.I. Calculer numériquement P ainsi que son incertitude absolue.

Réponse : P = 33,8 W ± 1,4 W (le 3 est un chiffre incertain. On conserve toutefois le 8 mais on l'écrit en caractère plus petit).

5/ L'impédance d'une portion de circuit est $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ Chaque grandeur étant entachée d'incertitude, donner l'expression théorique de l'incertitude absolue sur Z.

Réponse : $\Delta Z = \dfrac{R\,\Delta R + L\,\omega(\omega\,\Delta L + L\,\Delta\omega)}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$

6/ La densité s'obtient par la méthode du flacon à l'aide de l'expression suivante, établie en cinquième année :

$d = \dfrac{m - m_1}{m - m_2}$ où m, m_1 et m_2 sont des masses.

a/ Etablir l'expression de l'incertitude relative sur d, compte tenu de ce que le numérateur et le dénominateur du quotient ne sont pas indépendants.

Simplifier l'expression de l'incertitude relative, sachant que $m > m_1 > m_2$ et que $\Delta m = \Delta m_1 = \Delta m_2$

b/ Calculer numériquement d et Δd dans le cas suivant:

$m = 138,2g \pm 0,1g$; $m_1 = 47,8g \pm 0,1g$; $m_2 = 41,6g \pm 0,1g$

c/ Calculer la valeur maximale de la densité à partir des valeurs numériques fournies ci-dessus. En déduire la valeur de Δd.

Réponses :

a/ $\dfrac{\Delta d}{d} = \Delta m \left| \dfrac{m_1 - m_2}{(m - m_1)(m - m_2)} \right| + \left| \dfrac{\Delta m_1}{m - m_1} \right| - \left| \dfrac{\Delta m_2}{m - m_2} \right|$

Expression simplifiée : $\dfrac{\Delta d}{d} = \dfrac{2\Delta m}{m - m_1}$

b/ $d = 0,935_8 \simeq 0,002_2$

c/ $d_{max} = \dfrac{(m - m_1)_{max}}{(m - m_2)_{mini}} = \dfrac{m_{max} - m_{1mini}}{m_{max} - m_{2mini}} = 0,937_9$

On remarquera que pour obtenir $(m - m_2)_{mini}$ on doit utiliser m_{max} et non m_{mini}, car m figurant au numérateur et au dénominateur doit nécessairement y prendre la même valeur.

$\Delta d = d_{max} - d = 0,002_1$. Bonne concordance des deux méthodes. La seconde est plus simple.

7/ La période d'un pendule simple, compte tenu de l'amplitude des oscillations et de la poussée d'Archimède est donnée par :

$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \left(1 + \frac{a}{2\rho} + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

Donner l'expression de g en utilisant les formules d'approximation, sachant que a/ℓ et $\theta_0^2/16$ sont inférieurs à 10^{-2} .

Réponse : $g = 4\Pi^2 \frac{\ell}{T^2} \left(1 + \frac{a}{\rho} + \frac{\theta_0^2}{8}\right)$

Chapitre 2

ELEMENTS DE CINEMATIQUE

OBJET DE LA CINEMATIQUE

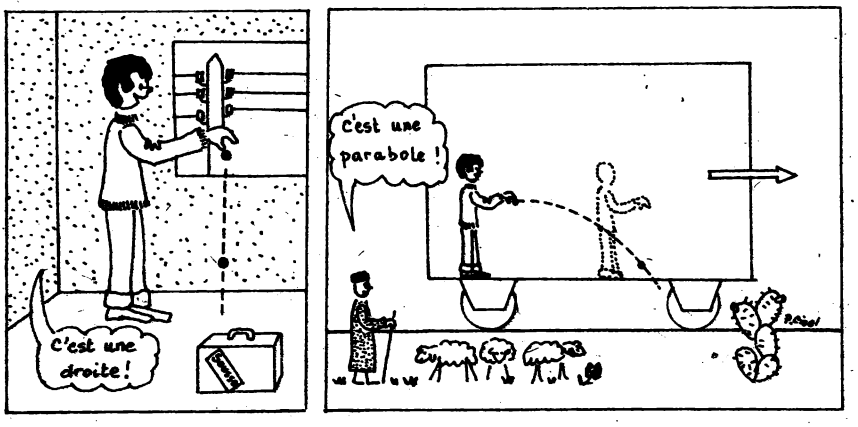
La cinématique est l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, indépendamment des causes capables de les provoquer. Elle utilise les notions d'espace, de temps, de vitesse et d'accélération.

Elle se distingue de la dynamique qui établit les relations entre les mouvements et les forces qui les provoquent.

La statique, abordée en cinquième année, la cinématique et la dynamique sont trois branches de la mécanique.

I - GENERALITES

1/ Nécessité d'un repère



Deux observateurs peuvent voire différemment un même mouvement. Par exemple, la chute d'une bille dans un trair en mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire qui se déplace en ligne droite et à vitesse constante.

Pour l'observateur qui lâche la bille à l'intérieur du wagon, la trajectoire de la bille est rectiligne.

Pour l'observateur stationnant au bord de la voie, la trajectoire de la bille est une portion du parabole.

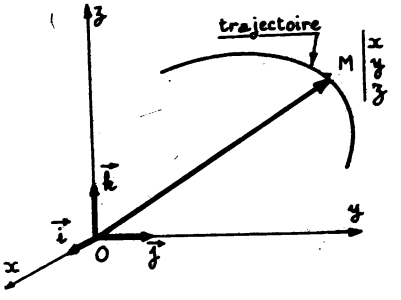
La trajectoire est effectivement rectiligne par rapport au wagon que le premier observateur considère comme immobile. Elle est vraiment parabolique par rapport à la

campagne que le second observateur considère comme immobile.

Cet exemple montre qu'un mouvement doit toujours être défini par rapport à un repère considéré comme fixe. On ne conçoit pas de mouvement absolu qui serait défini indépendamment de tout repère.

2/ Repère d'espace. Position d'un point matériel

La notion de point matériel est relative. C'est par exemple un électron à l'échelle de l'atome ou une bille à notre échelle ou encore une étoile à l'échelle astronomique.

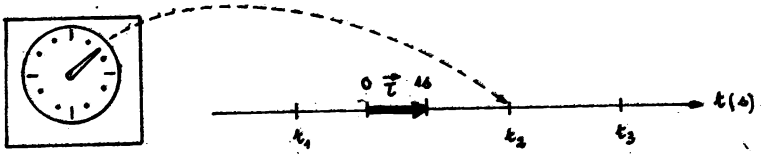


Etant donné un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace physique, un point matériel coïncidant avec le point M de l'espace physique sera repéré par le vecteur espace

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

de coordonnées x, y, z dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3/ Repère de temps



A chaque position de l'aiguille d'une horloge, associons un point sur un axe orienté. En fixant une origine O et une unité, la seconde dans le système international, on constitue le repère de temps.

Les points du repère sont des instants de dates t_1, t_2, t_3 ... (on dit plus simplement instants t_1, t_2, t_3 ...).

Le point O a pour date t = 0s. Cette date origine étant choisie arbitrairement, les dates qui la précèdent sont négatives et celles qui la suivent sont positives.

A deux instants successif t_i et t_j, on associe la durée $\Delta t = t_j - t_i$ qui est toujours positive.

4/ Le mouvement

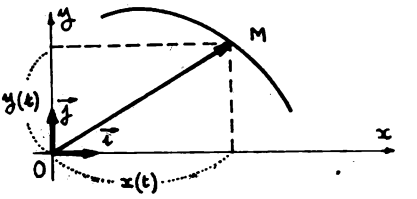
Le point matériel est en mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si l'une au moins des coordonnées du vecteur espace varie au cours du temps. Son mouvement est défini par les fonctions f, g, h de la variable $t \in [t_1, t_2]$ telles que :

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

En d'autres termes, le mouvement est connu si on connaît la fonction vectorielle

$$t \to \vec{OM}(t) \qquad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

5/ La trajectoire



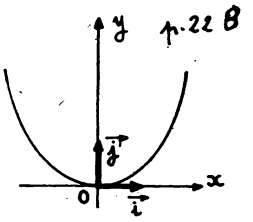
Dans la suite du cours on ne considérera que des mouvements dans le plan physique de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

> La trajectoire du point M est l'ensemble des points du plan avec lesquels le point M vient successivement en coïncidence lorsque t décrit l'intervalle de définition.

Equation du support de la trajectoire

Les fonctions $t \to x = f(t)$ et $t \to y = g(t)$ définissent une représentation paramétrique de la trajectoire.

On obtient l'équation cartésienne du support de la trajectoire en éliminant t entre les deux équations précédentes.



Exemple : Une représentation paramétrique de la trajectoire de M est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t^2 \end{cases} \qquad t \in]-\infty, \infty[$$

En éliminant t entre x et y, il apparaît que la trajectoire est portée par la parabole d'équation

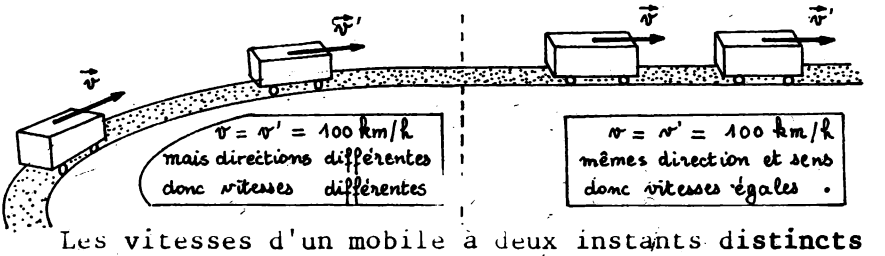
$$y = 0{,}75\ x^2$$

6/ La vitesse du mobile

Au sens commun, la vitesse est une grandeur scalaire. C'est par exemple le nombre lu sur le compteur de vitesse d'une automobile : 100 km/h.

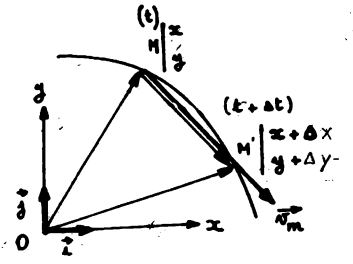
En cinématique, la vitesse n'est définie que si l'on connaît non seulement de nombre appelé module de la vitesse. Mais encore la direction et le sens de déplacement du mobile.

La vitesse est donc une grandeur vectorielle. (Nous allons voir dans la suite du cours que le vecteur vitesse est porté par la tangente à la trajectoire).



Les vitesses d'un mobile à deux instants distincts sont égales si elles ont même module, même direction et même sens.

a/ L'accroissement du vecteur espace



A l'instant t, le mobile est au point M, de vecteur espace :

$$\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

A l'instant t + Δt il est au point M', de vecteur espace :

$$\vec{OM'} = (x + \Delta x)\vec{i} + (y + \Delta y)\vec{j}$$

L'accroissement du vecteur espace pendant la durée Δt est :

$$\vec{OM'} - \vec{OM} = \vec{MM'} = \Delta(\vec{OM}) = \Delta x.\vec{i} + \Delta y.\vec{j}$$

b/ Le vecteur vitesse moyenne

Par définition, le vecteur vitesse moyenne pendant la durée Δt est le rapport :

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta(\vec{OM})}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

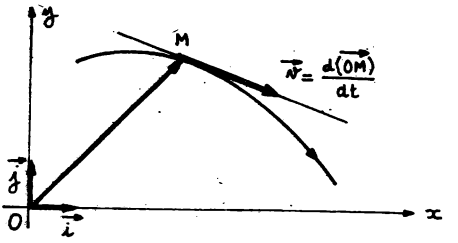
Puisqu'on l'obtient en divisant le vecteur $\Delta(\vec{OM})$ par le scalaire positif Δt, c'est un vecteur de même direction et sens que le vecteur $\Delta(\vec{OM})$. Il est donc porté par la

sécante $\overline{MM'}$.

c/ Le vecteur vitesse instantanée

On supposera dans tout ce qui suit que les fonctions $t \to x = f(t)$ et $t \to y = g(t)$ sont deux fois dérivables.

Nous noterons $f' = \frac{df}{dt}$ la dérivée par rapport au temps de la fonction f et $f'' = \frac{d^2 f}{dt^2}$ sa dérivée seconde.



Si t' tend vers t, Δt tend vers zéro et $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ tend vers la dérivée $x' = \frac{dx}{dt}$. De même, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ tend vers la dérivée $y' = \frac{dy}{dt}$

On a donc $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ est par définition le vecteur vitesse instantanée.

Lorsque $\Delta t \to 0$, le point M' se rapproche du point M et la sécante $\overline{MM'}$ tend vers la tangente en M. Le vecteur vitesse est donc porté par la tangente au support de la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

En résumé :

> Le vecteur vitesse instantanée est la dérivée par rapport au temps du vecteur espace. Il est porté par la tangente au support de la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

Les dérivées par rapport au temps des coordonnées du vecteur espace sont les composantes du vecteur vitesse instantanée :

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dt} = v_y$$

D'où les écritures vectorielles :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} \cdot v_y\vec{j}$$

d/ Les unités de vitesse

L'unité internationale de vitesse dérive des unités internationales de longueur (le mètre) et de temps (la seconde). C'est donc le mètre par seconde. (m/s)

L'unité usuelle de vitesse est le kilomètre par heure (km/h). La conversion s'effectue ainsi :

$$\frac{1\text{km}}{1\text{h}} = \frac{10^3\text{m}}{3{,}6.10^3\text{s}} = 0{,}278\ \text{m/s}$$

e/ La dimension de la vitesse

Pour exprimer le lien entre une grandeur quelconque et les grandeurs fondamentales dont elle dérive, on emploie les équations aux dimensions.

- La dimension longueur a pour symbole L ;
- La dimension masse a pour symbole M ;
- La dimension temps a pour symbole T.

Une surface étant le produit d'une longueur par une longueur a pour dimension L^2 ; un volume a pour dimension L^3.

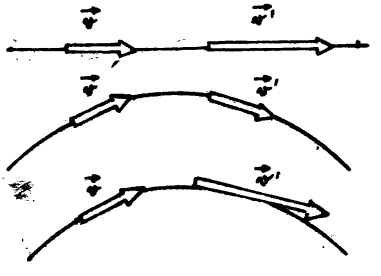
Une vitesse étant le quotient d'une longueur par un temps a pour dimension :

$$\frac{L}{T} = L \cdot T^{-1}$$

On écrit : $[v] = LT^{-1}$ (On lit : dimension de v).

f / L'accélération du mobile

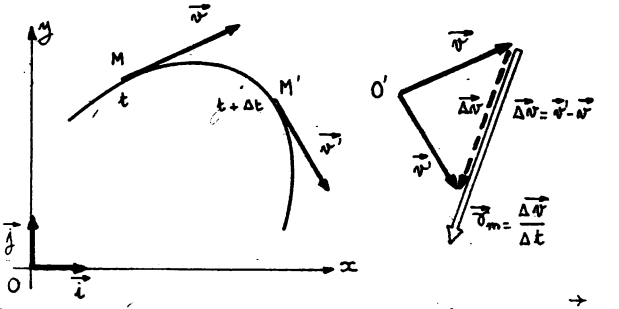
Un mobile possède une accélération si sa vitesse varie au cours du temps. La vitesse étant définie par son module, sa direction et son sens, il y a accélération si l'un au moins de ces éléments varie.



seul le module varie
seule la direction varie
le module et la direction varient
→ ACCELERATION

On remarquera qu'un observateur est sensible à une accélération alors qu'il est insensible à une vitesse constante : dans une automobile qui démarre il est repoussé en arrière ; dans une automobile qui freine brusquement, il est projeté en avant ; si le véhicule prend un virage, même à vitesse constante en module, il est projeté vers l'extérieur du virage.

a/ L'accroissement du vecteur vitesse



A l'instant t, la vitesse du mobile est $\vec{v}$;

A l'instant $t' = t + \Delta t$, la vitesse du mobile est $\vec{v}'$;

L'accroissement du vecteur vitesse pendant la durée Δt est le vecteur :

$$\vec{\Delta v} = \vec{v}' - \vec{v} \qquad \begin{pmatrix} v'_x - v_x = \Delta v_x \\ v'_y - v_y = \Delta v_y \end{pmatrix}$$

Pour le représenter on trace les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ à partir d'un point O' arbitrairement choisi.

b/ Le vecteur accélération moyenne

Par définition, le vecteur accélération moyenne pendant la durée Δt est un vecteur égal au quotient $\vec{\Delta v}$ par l'accroissement de temps Δt.

On le note $\vec{\gamma}_m$ (γ est la lettre grecque gamma).

$$\vec{\gamma}_m = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \begin{pmatrix} \frac{\Delta vx}{\Delta t} \\ \frac{\Delta vy}{\Delta t} \end{pmatrix}$$

C'est un vecteur de même direction et sens que $\vec{\Delta v}$ car Δt est un scalaire positif.

c/ Le vecteur accélération instantanée

Si on fait tendre Δt vers zéro, le vecteur accéléra-

tion moyenne tend vers une limite qui est l'accélération instantanée du mobile.

$$\vec{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{d(\vec{OM})}{dt}\right] = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

L'accélération du mobile est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps; elle est donc la dérivée seconde du vecteur espace par rapport au temps.

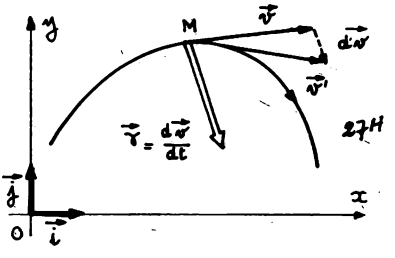
$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2v}{dt^2}\vec{j}$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$, dérivée seconde de x par rapport au temps, est la composante γ_x de l'accélération γ.

$\frac{d^2y}{dt^2}$, dérivée seconde de y par rapport au temps, est la composante γ_y de l'accélération $\vec{\gamma}$.

$$\vec{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d(\vec{OM})}{dt}\begin{pmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\begin{pmatrix} \gamma_x = \frac{d^2x}{dt^2} \\ \gamma_y = \frac{dy}{dt^2} \end{pmatrix}$$

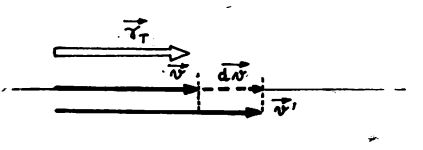
d/ L'accélération est dirigée vers la concavité de la trajectoire

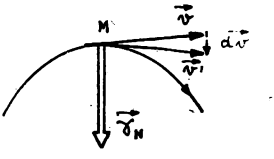


Lorsque le mobile décrit sa trajectoire, son vecteur vitesse, porté par la tangente, pivote vers la concavité de la trajectoire. Le vecteur $d\vec{v}$ est donc dirigé vers la concavité et il en est de même du vecteur accélération $\frac{d\vec{v}}{dt}$. Donc :

L'accélération du mobile est dirigée vers la concavité de sa trajectoire.

e/ Accélération tangentielle ; accélération normale





Envisageons les deux cas extrêmes suivants :

-Seul le module de la vitesse varie : la direction de la vitesse ne changeant pas, la trajectoire est une droite. A deux instants très voisins, les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{v}'$ sont portés par la trajectoire. Il en est de même du vecteur $d\vec{v}$ et par suite du vecteur accélération $\vec{\gamma} = d\vec{v}/dt$.

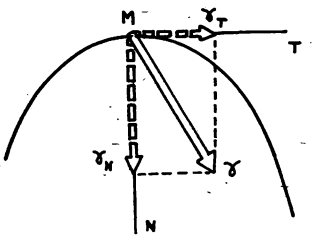
Donc : si seul le module de la vitesse varie, l'accélération est tangentielle.

-Seule la direction de la vitesse varie :

On montre que dans ces conditions le vecteur $d\vec{v}$ a une direction orthogonale à la tangente en M à la trajectoire. Il en est de même de l'accélération $\vec{\gamma} = d\vec{v}/dt$. Donc :

Si seule la direction de la vitesse varie l'accélération est normale à la trajectoire.

Considérons maintenant le cas général :



Si la vitesse varie en direction et en module, l'accélération est quelconque à l'intérieur de la concavité. On peut la décomposer en deux vecteurs :

-Un vecteur porté par la tangente à la trajectoire : l'accélération tangentielle $\vec{\gamma}_T$.

-Un vecteur porté par la normale à la trajectoire: l'accélération normale $\vec{\gamma}_N$.

En nous référant aux deux cas particuliers précédents nous énonçons les propriétés suivantes :

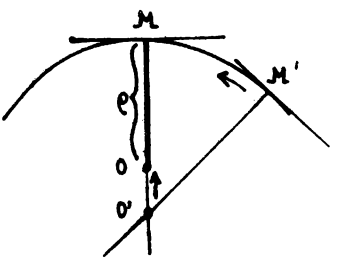
-La composante tangentielle $\vec{\gamma}_T$ de $\vec{\gamma}$ caractérise les variations du module de la vitesse ;

-La composante normale $\vec{\gamma}_N$ de $\vec{\gamma}$ caractérise les variations de la direction de la vitesse.

Expressions de γ_T et γ_N

Nous admettrons les expressions des modules des accélérations tangentielle et normale :

$$\gamma_T = \frac{dv}{dt} \qquad \gamma_N = \frac{v^2}{\rho}$$



ρ est le rayon de courbure de la trajectoire au point M, défini de la façon suivante :
soient M et M' deux points de la trajectoire ; les normales à la trajectoire en ces points se coupent au point O'. Si l'on fait tendre le point M' vers le point M, le point O' tend vers le point O. Le rayon de courbure au point M est $\rho = OM$. Si la trajectoire est un cercle, le rayon de courbure est le rayon R du cercle.

f/ Unité d'accélération. Dimension

L'unité internationale d'accélération est le mètre par seconde par seconde ou mètre par seconde au carré.

en m/s/s ou m/s^2 ou $m.s^{-2}$

Dimension : $[\gamma] = L.T^{-2}$

Vérifions que $\frac{v^2}{\rho}$ est homogène à une accélération en utilisant les équations aux dimensions :

$$[v^2] = L^2 . T^{-2} \quad , \quad [\rho] = L \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = L . T^{-2}$$

II - LES MOUVEMENTS RECTILIGNES

Préambule : Primitives d'une fonction

Considérons les fonctions f de la variable réelle t, définies $\forall t \in \mathbb{R}$:

$t \to 3t^2 + 5$

$t \to 3t^2 + 12$

$t \to 3t^2 + K$

K : constante réelle arbitraire.

Elles admettent la même fonction dérivée f' :

$t \to 6t$, définie $\forall t$

Nous admettrons que la fonction f' : $t \to 6t$ admet pour primitives :

$f_1 : t \to 3t^2 + 5$

$f_2 : t \to 3t^2 + 12$

Plus généralement, les primitives de la fonction f' sont les fonctions

F : $t \to 3t + K$. K : constante réelle arbitraire.

En d'autres termes, f et f' étant deux fonctions numériques définies sur un intervalle I, si f' est la fonction dérivée de f, f est une fonction primitive de f'.

Le tableau ci-dessous donne les primitives utiles dans la suite du cours. De gauche à droite on passe de la fonction à sa dérivée et de droite à gauche de la fonction à ses primitives.

$\forall t \in \mathbb{R}$

Fonction	⇒	Primitives
$t \to 0$		$t \to K \quad (K \in \mathbb{R})$
$t \to A \quad (A \in \mathbb{R})$		$t \to At + K$
$t \to At^n$ n rationnel $\neq -1$		$t \to A \frac{t^{n+1}}{n+1} + K$
$t \to \cos(\omega t + \varphi), \omega \neq 0$		$t \to \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) + K$
$t \to \sin(\omega t + \varphi), \omega \neq 0$		$t \to \frac{-1}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + K$
Dérivées	⇐	Fonctions

Théorème :

Si les fonctions f et g admettent F et G pour primitives sur un intervalle I, alors f + g admet F + G pour primitive sur I.

Exemple :

Les primitives de $2t^2 + 3t$ sont $\frac{2}{3} t + \frac{3}{2} t^2 + K$

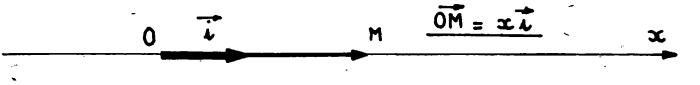
1/ Généralités sur les mouvements rectilignes

a/ Définition

Un mobile est en mouvement rectiligne si le support de sa trajectoire est une droite.

b/ Position et équation horaire

Le support de la trajectoire, muni du repère $(O, \vec{i})$ est choisi comme axe des abscisses (nous dirons aussi axe des élongations).



Le mouvement de M est défini par le vecteur espace $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i}$.

La fonction x = f(t) est l'équation horaire du mouvement. Elle permet de déterminer à tout instant t la position du mobile. Nous supposons que la fonction numérique f est deux fois dérivable.

c/ Vitesse du mobile

C'est la dérivée par rapport au temps du vecteur espace : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$, où $\frac{dx}{dt}$ est la mesure algébrique v de la vitesse.

d/ Accélération du mobile

C'est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, donc la dérivée seconde du vecteur espace :

$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$, où $\frac{d^2x}{dt^2}$ est la mesure algébrique γ de l'accélération.

e/ Recherche de l'équation horaire

On obtient la mesure algébrique de la vitesse en calculant la dérivée de l'équation horaire par rapport au temps et la mesure algébrique de l'accélération en prenant la dérivée de la vitesse.

EQUATION HORAIRE — dérivée → VITESSE — dérivée → ACCELERATION

Inversement, si on connaît l'accélération d'un mobile en mouvement rectiligne, on obtient sa vitesse en prenant une primitive de l'accélération et on obtient son équation horaire en prenant une primitive de la vitesse par rapport au temps.

ACCELERATION — primitive → VITESSE — primitive → EQUATION HORAIRE

2/ Le mouvement rectiligne uniforme

C'est un mouvement rectiligne de vitesse constante, donc d'accélération nulle.

$$v = C^{te} \iff \gamma = 0$$

Connaissant la vitesse du mobile, on se propose d'établir son équation horaire :

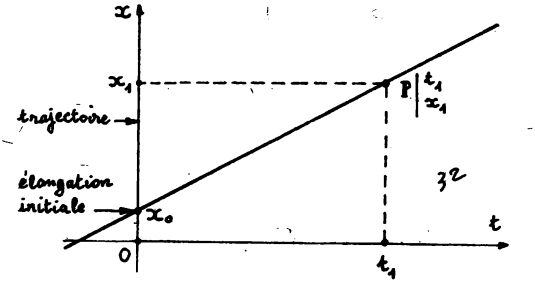
Les primitives de $v = C^{te}$ sont $\underline{x = vt + K}$

On lève l'indétermination sur la "constante d'intégration" K en considérant l'instant initial : pour t = 0, on a x = K. K est donc l'élongation initiale du mobile, c'est-à-dire la distance parcourue par le mobile à l'instant où on déclenche le chronomètre.
Nous l'appellerons x_o.

L'équation horaire du mouvement rectiligne uniforme est donc la fonction linéaire du temps :

$$x = vt + x_o$$

L'équation horaire étant x = f(t), on appelle diagramme des espaces la représentation graphique de la fonction f. L'axe des abscisses est l'axe des temps, l'axe des ordonnées est l'axe Ox.



Ne pas confondre cette courbe avec la trajectoire. La trajectoire est portée par l'axe Ox. Un point P du diagramme renseigne à la fois sur la position du mobile sur sa trajectoire et sur l'instant où il passe en ce point. Par exemple, le mobile est passé au point d'élongation x_1 à l'instant t_1 .

En résumé :

MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ v = C^{te} \\ x = vt + x_o \end{cases}$$

3/ Le mouvement rectiligne uniformément varié

C'est un mouvement rectiligne dont l'accélération est constante.

Equation horaire

Partant de $\gamma = C^{te}$, on se propose de déterminer l'équation horaire du mobile. Par une primitive, on obtient sa vitesse :

$$\gamma = C^{te} \Rightarrow v = \gamma t + K$$

Pour des raisons d'homogénéité, la constante d'intégration K est une vitesse : c'est la vitesse initiale v_o, c'est-à-dire la vitesse du mobile à l'instant où l'on déclenche le chronomètre (prendre t = 0 comme plus haut).

$$\boxed{v = \gamma t + v_o} \qquad (a)$$

La vitesse du mobile est une fonction linéaire du temps

Nous obtenons l'équation horaire par une seconde primitive :

$$x = \gamma\frac{t^2}{2} + v_o t + K \quad \text{avec } K = x_o \text{ (élongation initiale).}$$

$$\boxed{x = \tfrac{1}{2}\gamma\, t^2 + v_o t + x_o} \qquad (b)$$

L'équation horaire d'un mobile en mouvement rectiligne uniformément varié est une fonction du second degré du temps.

La relation (a) donne la vitesse du mobile en fonction du temps ;

La relation (b) donne sa position en fonction du temps ;

Pour obtenir une relation entre la vitesse du mobile et sa position, il faut éliminer t entre ces deux relations :

$$(a) \Rightarrow t = \frac{v - v_o}{\gamma} \quad \text{et} \quad t^2 = \frac{v^2 - 2vv_o + v_o^2}{\gamma^2}$$

Portons dans (b) :

$$x = \tfrac{1}{2}\gamma\,\frac{v^2 - 2vv_o + v_o^2}{\gamma^2} + \frac{v_o\,(v - v_o)}{\gamma} + x_o \quad \text{d'où :}$$

$$\boxed{v^2 - v_o^2 = 2\gamma(x - x_o)} \qquad (c)$$

Les équations des mouvements rectilignes uniformément variés :

Ce sont les trois relations que nous avons établies ci-dessus.

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_o t + x_o \quad (1)$$

$$v = \gamma t + v_o \quad (2)$$

$$v^2 - v_o^2 = 2\gamma (x - x_o) \quad (3)$$

Si le mobile part de l'origine des espaces sans vitesse initiale c'est-à-dire si $x_o = 0$ et $v_o = 0$, les équations s'écrivent simplement

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad v = \gamma t \qquad v^2 = 2\gamma x$$

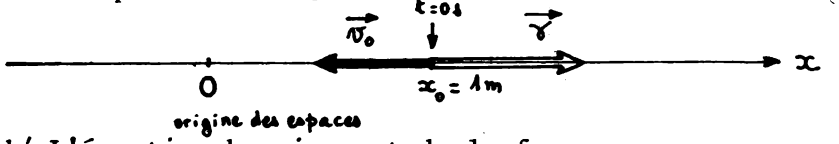
Exercice résolu

L'accélération d'un mobile en mouvement uniformément varié est $\gamma = 8\ m/s^2$. A l'instant $t = 0s$ sa vitesse est $v_o = -5m/s$ et son élongation $x_o = 1\ m$.

1/ Etablir l'équation horaire du mouvement.
2/ Quelles sont les différentes phases du mouvement ?
3/ Quelle est l'élongation du mobile lorsque sa vitesse s'annule.
4/ Tracer le diagramme des espaces et celui des vitesses.

Conseils

On doit toujours placer sur un axe orienté les renseignements figurant dans l'énoncé : élongation initiale, accélération. γ, v_o et x_o sont des valeurs algébriques. Si les valeurs algébriques v_o et γ sont positives, les vecteurs $\vec{v}_o$ et $\vec{\gamma}$ ont le sens positif choisi ; dans le cas contraire ils sont orientés dans le sens négatif. Ici, $\vec{\gamma}$ a le sens positif et $\vec{v}_o$ le sens contraire.



1/ L'équation horaire est de la forme :

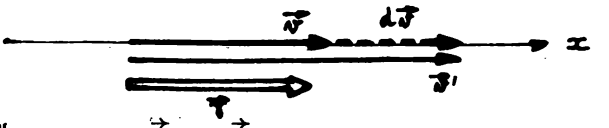
$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_o t + x_o$$

Numériquement : $x = 4t^2 - 5t + 1$

2/ Les phases. Le mouvement peut être accéléré ou retardé.

- Le mouvement est accéléré si le module de la vitesse croît

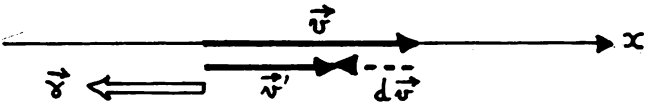
Représentons la vitesse du mobile à deux instants très voisins, l'accroissement de vitesse et l'accélération:



Si $\|\vec{v}\|$ croît, $\vec{dv}$ et $\vec{v}$ ont même sens. Puisque $\vec{dv}$ et $\vec{\gamma}$ ont toujours même sens, l'accélération et la vitesse ont même sens et par conséquent, leurs valeurs algébriques ont même signe. (Toutes deux positives si les vecteurs ont le sens positif choisi, toutes deux négatives dans le cas contraire). Dans tous les cas, le produit des valeurs algébriques est positif.

$\gamma v > 0 \iff$ Phase accéléré

- Le mouvement est retardé si le module de la vitesse décroît



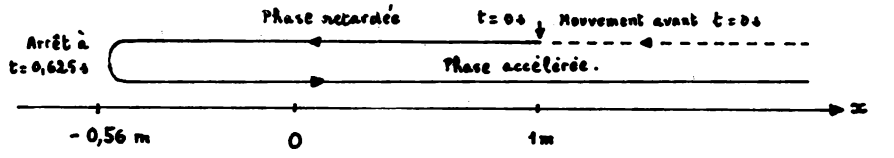
Si $\|\vec{v}\|$ décroît, l'accroissement de vitesse $\vec{dv}$ et la vitesse $\vec{v}$ sont de sens contraires. Par suite, l'accélération et la vitesse sont deux vecteurs de sens contraires et leur produit est négatif.

$\gamma v < 0 \iff$ Phase retardée

Nous déduirons donc les phases du mouvement de l'étude du produit γv.

La vitesse du mobile, obtenue en dérivant par rapport au temps l'équation horaire est $v = 8t - 5$. Elle s'annule en changeant de signe pour $t = 5/8 = 0{,}625s$.

t	$-\infty$	0,625s	$+\infty$
γ	+		+
v	-	0	+
γv	-		+
phases	retardée	Arrêt	accélérée



Le mobile est en mouvement retardé pour $t < 0{,}625s$; il rebrousse chemin à l'instant $t = 0{,}625s$ et prend ensuite un mouvement accéléré.

3/ Pour trouver l'élongation lorsque la vitesse s'annule on peut remplacer t par 0,625s dans la première équation des mouvements uniformément variés, mais il est plus simple d'utiliser la troisième équation :

$v^2 - v_o^2 = 2\gamma(x - x_o)$. Pour $v = 0$ on obtient :

$$x = -\frac{v_o^2}{2\gamma} + x_o = -\frac{25}{16} + 1 \qquad \underline{x = -0{,}56 \text{ m}}$$

4/ Diagrammes

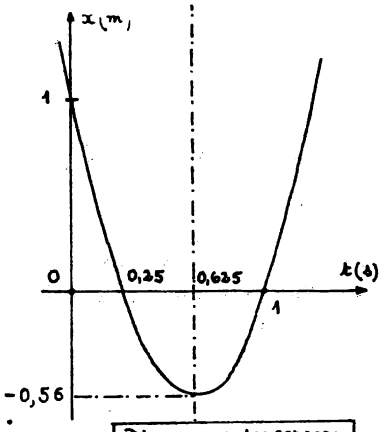


Diagramme des espaces

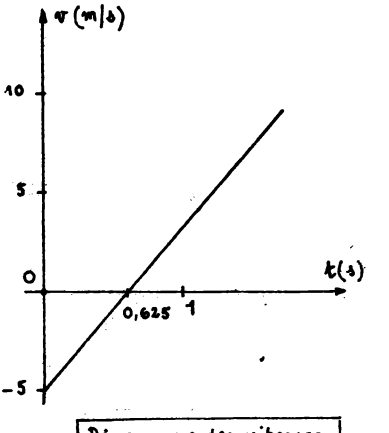
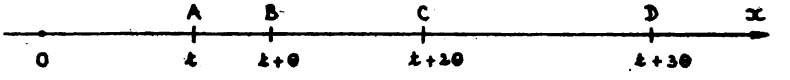


Diagramme des vitesses

4/ Une propriété caractéristique des mouvements rectilignes uniformément variés

Nous démontrerons cette propriété dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré d'équation $x = \frac{1}{2}\gamma t^2$. La démonstration est identique dans le cas général d'un mouvement défini par $x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_o t + x_o$.

A partir d'un instant quelconque, on se propose de calculer les distances parcourues pendant des durées successives égales à θ seconde, puis de comparer ces distances.



Exprimons d'abord les espaces parcourus depuis l'origine aux instants t, $t + \theta$, $t + 2\theta$, $t + 3\theta$ etc.

A l'instant t : $\overline{OA} = \frac{1}{2}\gamma t^2$

A 1'instant $t+\theta$: $\overline{OB} = \frac{1}{2}\gamma(t+\theta)^2 = \frac{1}{2}\gamma t^2 + \gamma t\theta + \frac{1}{2}\gamma\theta^2$

A 1'instant $t+2\theta$: $\overline{OC} = \frac{1}{2}\gamma(t+2\theta)^2 = \frac{1}{2}\gamma t^2 + 2\gamma t\theta + \frac{1}{2}\gamma\theta^2$

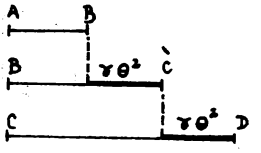
A 1'instant $t+3\theta$: $\overline{OD} = \frac{1}{2}\gamma(t+3\theta)^2 = \frac{1}{2}\gamma t^2 + 3\gamma t\theta + \frac{1}{2}\gamma\theta^2$

Les espaces parcourus pendant les durées successives sont:

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \gamma t\theta + \frac{1}{2}\gamma\theta^2$$

$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = \gamma t\theta + \frac{3}{2}\gamma\theta^2$$

$$\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = \gamma t\theta + \frac{5}{2}\gamma\theta^2$$



Les accroissements d'espace pendant ces durées :

$\overline{BC} - \overline{AB} = \gamma\theta^2$

$\overline{CD} - \overline{BC} = \gamma\theta^2$

Les accroissements d'espace sont égaux à $\gamma\theta^2$, ce qui signifie que les espaces parcourus augmentent toujours de cette quantité $\gamma\theta^2$.

Propriété :

Au cours d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération γ , les espaces parcourus pendant des durées successives égales à θ croissent en progression arithmétique de raison

$$r = \gamma\theta^2$$

Réciproque :

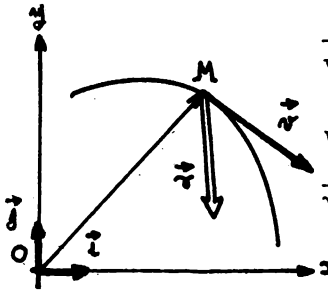
Nous admettrons sans la démontrer la réciproque :

Si les espaces parcourus au cours d'un mouvement rectiligne pendant des durées successives égales à θ croissent en progression arithmétique de raison r, le mouvement est uniformément varié et son accélération est

$$\gamma = \frac{r}{\theta^2}$$

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 2

I - MOUVEMENTS QUELCONQUES



Vecteur espace: $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ $\quad \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Vecteur vitesse :

$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy}{dt}\,\vec{j}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$

Vecteur accélération:

$\vec{\gamma} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{j}$ $\quad \vec{\gamma}\begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix}$

L'accélération est dirigée vers la concavité de la trajectoire. Ses composantes suivant la tangente et suivant la normale ont pour modules :

$$\gamma_T = \frac{dv}{dt}$$

Variations de module de $\vec{v}$

$$\gamma_N = \frac{v^2}{\rho}$$

Variation de direction de $\vec{v}$

II- MOUVEMENTS RECTILIGNES

EQUATION HORAIRE —dérivée→ VITESSE —dérivée→ ACCELERATION

EQUATION HORAIRE ←primitive— VITESSE ←primitive— ACCELERATION

1/ Rectiligne uniforme

Son accélération est nulle, sa vitesse est constante.

Son équation horaire est une fonction linéaire du temps.

$$x = vt + x_o$$
$$v = C^{te}$$
$$\gamma = 0$$

2/ Rectiligne uniformément varié

Son accélération est constante; sa vitesse est une fonction linéaire du temps ;

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_o t + x_o$$
$$v = \gamma t + v_o$$
$$v^2 - v_o^2 = 2\gamma(x - x_o)$$

Son équation horaire est une fonction du second degré du temps.

$\gamma\ v > 0$	:	accéléré
$\gamma\ v < 0$	:	retardé

3/ Propriété

Si les espaces parcourus pendant des durées successives θ forment une progression arithmétique de raison r, le mouvement est uniformément varié et son accélération est :

$$\gamma = \frac{r}{\theta^2}$$

Chapitre 2

E X E R C I C E S

1/ Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié. A l'instant $t_1 = -2s$ il passe au point d'abscisse $x_1 = 2m$, animé de la vitesse $v_1 = 6m/s$. Il rebrousse chemin à l'instant $t_2 = 1s$. Quelle est son équation horaire ?

2/ L'accélération d'un mobile en mouvement uniformément varié est $\gamma = 6m/s^2$. A l'instant $t = 0s$, sa vitesse est $-6m/s$ et son élongation $x_0 = 1$ m.

a- Etablir son équation horaire.

b- Donner l'expression de sa vitesse en fonction du temps.

c- Quelles sont les différentes phases de son mouvement ?

d- Quelle est son élongation lorsque sa vitesse s'annule ?

e- Tracer le diagramme des espaces et de diagramme des vitesses.

3/ L'équation horaire d'un mobile en mouvement rectiligne est $x = t^3 - 27t$.

a- Exprimer sa vitesse en fonction du temps.

b- Exprimer son accélération en fonction du temps.

c- Quelles sont les différentes phases de son mouvement ?

d- Représenter le diagramme des espaces, celui des vitesses et celui de l'accélération en fonction du temps.

4/ Un mobile M décrit l'axe Ox selon le mouvement d'équation $x = t^2 + 4t + 4$. Un second mobile P se déplaçant sur le même axe d'un mouvement uniforme passe à l'instant $t = 2s$ au point A d'abscisse $\overline{OA} = 2m$, avec la vitesse v.

a- Etudier le mouvement du mobile M. Construire, sur une feuille de papier millimétré, les diagrammes des espaces et des vitesses. Calculer la vitesse du mo-

bile à l'instant t = 3s.

b- Déterminer la vitesse v pour que les deux mobiles se rencontrent une seule fois.

c- Discuter le nombre des rencontres des mobiles selon les valeurs de la vitesse v.

d- Reprendre cette discussion en supposant que le mouvement de M commence à l'instant $t_1 = 0$ et se termine à l'instant $t_2 = 3s$

D'après EYMARD E MENOD.

stant t = Os, un mobile quitte le point O avec une vitesse initiale $\vec{v}_o$ et une accélération constante de sens contraire à celui de $\vec{v}_o$. Il passe point A d'abscisse x_A, rebrousse chemin d'abscisse x_B, puis repasse au point A. durée qui sépare ses deux passages en A. Démontrer la relation :

$$x_B - x_A = \frac{1}{8} |\gamma| T^2.$$

6/ Démontrer la relation $r = \gamma\theta^2$ dans le cas général d'un mouvement d'équation $x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_o t + x_o$.

7/ Un monte-charge parcourt une distance H = 14m. Son parcours se décompose en trois mouvements.

a- Un mouvement uniformément accéléré, caractérisé par son accélération γ_1, sa durée t_1 et l'espace parcouru h_1. A l'instant t_1 il atteint la vitesse v_1.

b- Un mouvement uniforme au cours duquel il s'élève de h_2 en t_2 secondes.

c- Un mouvement uniformément retardé de durée t_3, d'accélération γ_3 à l'issue duquel il s'arrête après avoir parcouru une distance h_3.

On donne les renseignements suivants : la durée totale des trois mouvements est t = 10s et celle du second mouvement est $t_2 = 4s$. La distance h_1 est égale au double de la distance h_3. On demande

1- De calculer t_1, t_3, γ_1, γ_3, v_1, h_1, h_2 et h_3

2- De représenter sur un même graphique les diagrammes des espaces et des vitesses.

8/a- Un diapason inscrit ses oscillations sur une plaque enfumée mobile. On mesure les longueurs occupées sur la plaque par l'enregistrement de 5 vibrations consé-

cutives et l'on trouve pour ces longueurs :

AB = 13 mm, BC = 29 mm, CD = 45 mm, DE = 61 mm, EF = 77 mm.

Montrer que ces mesures vérifient que le mouvement de la plaque est uniformément accéléré.

b- On inscrit en même temps sur la plaque des signaux donnés par un chronomètre et séparés par un intervalle de 1/5s. Le premier de ces signaux s'inscrit en un point M situé entre A et B tel que AM = 4,5 mm ; le suivant coïncide avec le point F. Calculer le nombre d'oscillations par seconde du diapason.

c- Calculer l'accélération du mouvement de la plaque et sa vitesse au moment de l'inscription du point A.

(BACCALAUREAT)

Chapitre 3

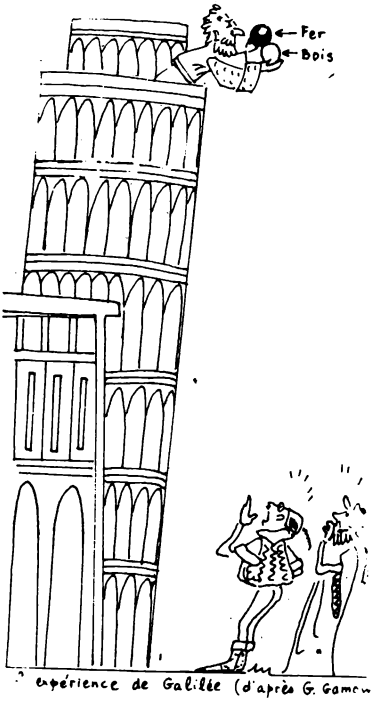
LA CHUTE DES CORPS DANS L'AIR ET DANS LE VIDE

DEFINITION DE LA CHUTE LIBRE

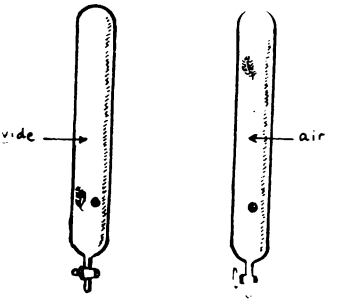
La chute libre est le mouvement que prend un objet lorsqu'il n'est soumis qu'à son poids.

I - LA PREMIERE LOI DE LA CHUTE LIBRE

Lâchons au même instant une bille de plomb, une balle de ping-pong et une plume de la même hauteur. La bille de plomb atteint la première le sol, suivie de peu par la balle, tandis que la plume s'attarde beaucoup plus longtemps avant de toucher terre. De là à conclure que les objets tombent d'autant plus vite qu'ils sont plus lourds, il n' y a qu'un pas... mais c'est un faux pas. Pourtant, cette conception fausse était partagée par tous les philosophes et les hommes de science jusqu'au 16ième siècle.



expérience de Galilée (d'après G. Gamow



Mais Galilée vint (1565-1642). Pour réfuter les idées de ses contemporains, le célèbre savant italien monta au sommet de la tour penchée de Pise et lâcha simultanément deux sphères qui atteignirent le sol au même instant bien que l'une fût en fer et l'autre en bois.

Une expérience de cours utilisant le tube de Newton dans lequel on peut réaliser un vide partiel permet de préciser le comportement des corps en chute et en particulier l'influence de l'air.

Le long tube de verre contient une petite bille en plomb et une plume; les deux corps s'accompagnent dans leur chute si le tube a été vidé de son air. En revanche, s'il contient de l'air la plume arrive bien après la bille de plomb.

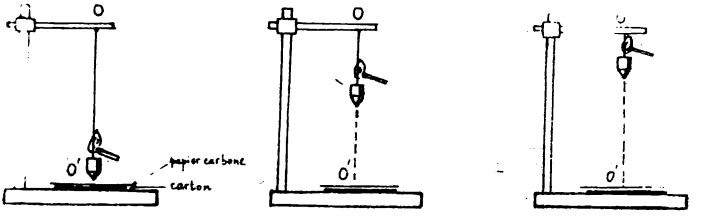
Dans l'air, outre leur poids, les objets sont soumis à des forces dont l'influence est d'autant plus importante qu'ils sont moins denses : il s'agit de la poussée d'Archimède et des forces de résistance de l'air. Ces forces ralentissent les objets de faible densité, mais elles perturbent peu le mouvement de chute des objets de forte densité, tout au moins dans les premiers mètres de chute. En effet, la résistance de l'air croît avec la vitesse du mobile et son influence est d'autant plus grande que la vitesse est plus grande.

La chute libre est donc une chute dans le vide. Mais par la suite, nous assimilerons à une chute libre la chute des objets de forte densité pendant les premiers mètres de leur mouvement.

ENONCE DE LA LOI

Dans le vide, en un même lieu, tous les corps ont des mouvements de chute libre identiques

II- DEUXIEME LOI : LA TRAJECTOIRE RECTILIGNE VERTICALE



Un fil à plomb est suspendu à une potence. Il définit la verticale locale OO'. La pointe du plomb est placée à quelques millimètres au dessus d'un papier carbone qui recouvre un carton fixé sur la table. Nous brûlons le fil. Puis nous recommençons l'opération à partir de hauteurs différentes du plomb. La trace sur le carton est unique. Bien que ce genre d'expérience ne soit pas précis, nous énoncerons la loi suivante :

La chute libre sans vitesse initiale est un mouvement rectiligne de direction verticale

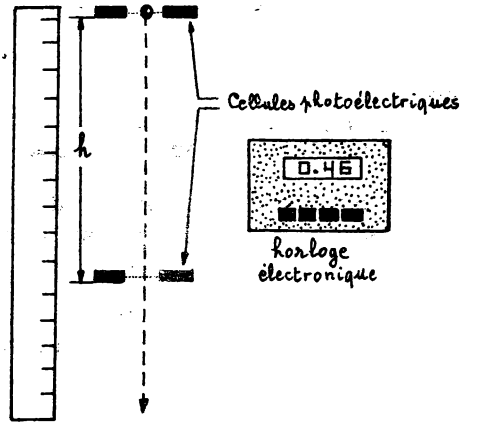
III-LA TROISIEME LOI DE LA CHUTE LIBRE : NATURE DU MOUVEMENT

La détermination expérimentale de la nature du mouvement de chute libre sans vitesse initiale, autrement dit la recherche de l'équation horaire se fait en travaux pratiques.

Une bille d'acier tombe en chute libre d'une hauteur h devant une règle graduée ; la durée de chute est déterminée avec une horloge électronique au 1/100 de seconde.

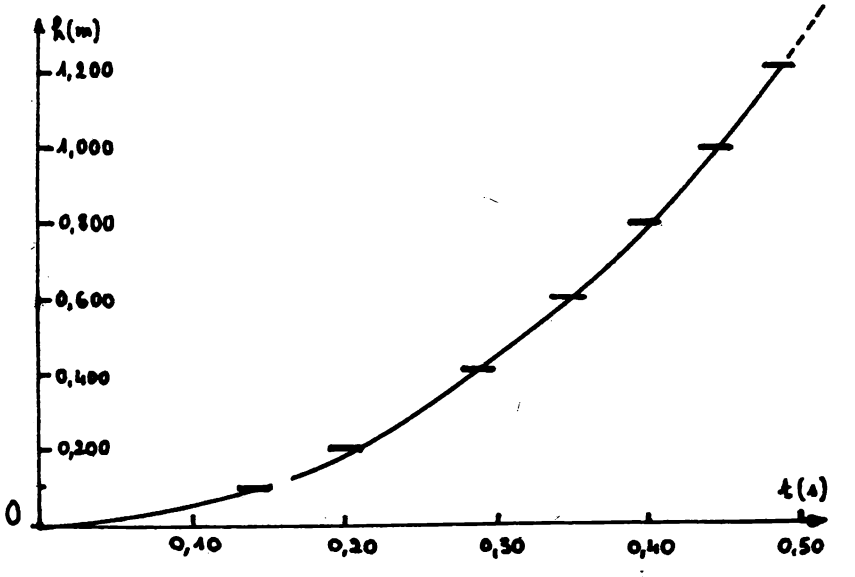
Le départ de la bille placée devant une cellule photoélectrique déclenche le chronomètre et son passage devant une seconde cellule provoque l'arrêt du chronomètre.

On donne à la hauteur h des valeurs croissantes. Pour obtenir le domaine expérimental $t \in [\ t_m\ ,\ t_M\ ]$, chaque opération est répétée plusieurs fois. Le tableau ci-dessous reproduit les résultats d'une séance de travaux pratiques :



h(m)	t_m(s)	t_M(s)	t_m^2 (s^2)	t_M^2 (s^2)
0,100	0,13	0,15	$1,7.10^{-2}$	$2,3.10^{-2}$
0,200	0,19	0,21	$3,6.10^{-2}$	$4,4.10^{-2}$
0,400	0,28	0,30	$7,8.10^{-2}$	$9,0.10^{-2}$
0,600	0,34	0,36	$11,5.10^{-2}$	$13,0.10^{-2}$
0,800	0,39	0,41	$15,2.10^{-2}$	$16,8.10^{-2}$
1,000	0,44	0,46	$19,3.10^{-2}$	$21,2.10^{-2}$
1,200	0,48	0,50	$23,0.10^{-2}$	$25,0.10^{-2}$

Traçons le diagramme des espaces, c'est-à-dire la courbe h = f(t).

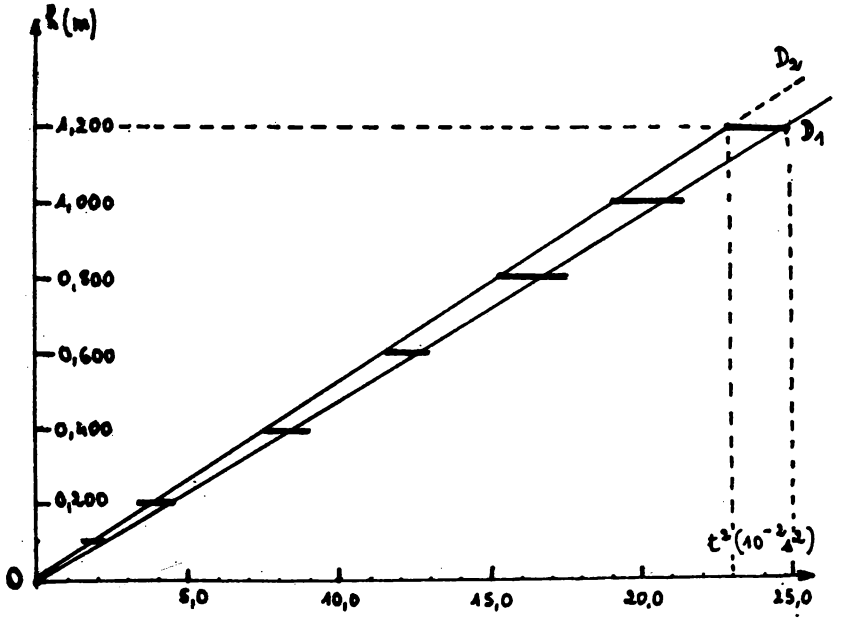


Le diagramme des espaces a l'aspect d'une branche de parabole tangente au point O. S'il en est ainsi, son équation doit être :

$$h = at^2$$

Pour le vérifier, posons $t^2 = T$ et traçons la courbe :

$$h = f(T).$$



On peut tracer un ensemble de droites passant par l'origine et par l'ensemble des domaines expérimentaux. Ce faisceau de droites est limité par la droite D_1 de coefficient directeur minimal et par la droite D_2 de coefficient directeur maximal.

La loi de chute s'exprime donc par :

$h = aT$ ou $h = at^2$

Conclusion

L'équation horaire de chute libre sans vitesse initiale est une fonction du second degré du temps. Le mouvement est donc uniformément accéléré.

Son équation dans le cas présent où la vitesse initiale et l'élongation initiale sont nulles est :

$$x = \frac{1}{2} \gamma t^2$$

Nous identifions $\frac{1}{2}\gamma$ au coefficient a :

$$\frac{1}{2}\gamma = a \iff \gamma = 2a$$

Le coefficient directeur a est mesurable sur la courbe : $a = \frac{h}{t^2}$. L'accélération vaut donc :

$$\gamma = \frac{2h}{t^2}$$

Pour obtenir un encadrement de l'accélération, on

trace la courbe sur papier millimétré. Pour h = 1,200 m, on lit :

$$t_m^2 = 23{,}3.10^{-2}\ s^2 \quad \text{et} \quad t_M^2 = 25{,}0.10^{-2}\ s^2$$

D'où :

$$9{,}6\ m/s^2 \leqslant \gamma \leqslant 10{,}3\ m/s^2$$

ou $\gamma = (9{,}95 \pm 0{,}35)\ m/s^2$

γ , accélération du mouvement de chute libre au lieu où s'effectue l'expérience s'appelle <u>accélération de la pesanteur</u>. On la note g.

Des expériences plus précises, basées sur le mouvement pendulaire donnent pour la Tunisie la valeur :

$$g \simeq 9{,}80\ m/s^2$$

<u>TROISIÈME LOI</u>

<u>Le mouvement de chute libre sans vitesse initiale est un mouvement rectiligne uniformément accéléré, de direction verticale.</u>

IV - LES EQUATIONS DE LA CHUTE LIBRE

Ce sont les équations des mouvements uniformément variés.

- <u>Chute libre sans vitesse initiale</u>

$$x = \frac{1}{2} gt^2$$
$$v = gt$$
$$v^2 = 2gx$$

- Chute libre avec <u>vitesse initiale verticale</u> et <u>élongation initiale</u>.

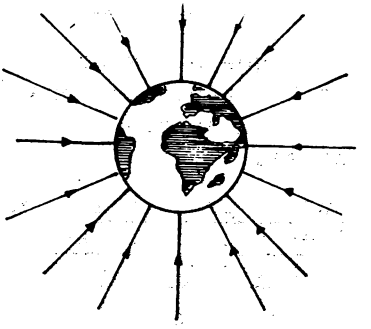
<u>g, v_o et x_o sont des valeurs algébriques.</u>

$$x = \frac{1}{2} gt^2 + v_o t + x_o$$
$$v = gt + v_o$$
$$v^2 - v_o^2 = 2g(x - x_o)$$

Dans le cas de la figure : $g > 0$, $v_o < 0$ et $x_o > 0$

V - LE CHAMP DE PESANTEUR

STRUCTURE DE L'ESPACE DUE AUX ASTRES



Abandonnés sans vitesse initiale (1) dans l'espace, les objets suivent des trajectoires centrées sur la Terre; ils se déplacent le long des lignes du champ de pesanteur terrestre.

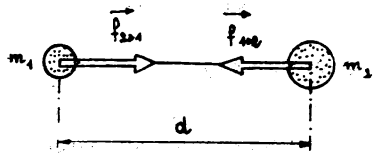
La Terre a modifié l'espace en lui conférant la structure de champ.

Toutes les planètes, toutes les étoiles ont cette propriété : créer un champ de gravitation ou champ de pesanteur attractif. On connaît bien les propriétés des champs de gravitation, mais on ignore toujours à quoi ils sont dus.

INTERACTION ENTRE DEUX MASSES : LA FORMULE DE NEWTON

Newton a établi que toute masse crée autour d'elle un champ de gravitation attractif. Placée dans ce champ, une seconde masse sera soumise à une force attractive de la part de la première. Mais elle-même crée un champ qui attirera la première masse.

Deux masses quelconques exercent donc l'une sur l'autre des interactions de gravitation, qui conformément au principe de l'action et de la réaction sont des forces opposées.



Soit $\vec{f}_{2\to1}$ la force exercée par la seconde masse sur la première et $\vec{f}_{1\to2}$ la force exercée par la première masse sur la seconde. On a :

$\vec{f}_{2\to1} = -\vec{f}_{1\to2}$

Appelons f le module commun des deux forces. D'après Newton :

(1) Par rapport à un repère lié à des "étoiles fixes" et sans tenir compte des mouvements de la Terre par rapport à ce repère.

$$f = \varepsilon \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

La formule s'applique à des points matériels, mais aussi à des sphères homogènes ou constituées de couches sphériques homogènes concentriques. d est alors la distance de leurs centres.

Les interactions de gravitation entre deux masses sont proportionnelles à chacune des masses et inversement proportionnelles au carré de la distance de leurs centres.

ε est la constante universelle de la gravitation. Dans le système international : $\varepsilon = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.

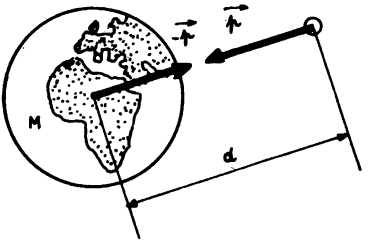
m_1 et m_2 s'expriment en kg, d en mètres. Dans ces conditions f s'exprime en newtons.

APPLICATION NUMERIQUE

$m_1 = m_2 = 1$ kg ; d = 1 m. Alors $f = 6{,}67.10^{-11}$ N.

Cet exemple montre que les interactions de gravitations sont très faibles.

LE POIDS D'UN CORPS



Si l'un des corps attractifs est la Terre, de masse $M \simeq 6{,}0.10^{24}$ kg et l'autre un objet de masse m quelconque, la force qui les attire mutuellement est encore donnée par la formule de Newton. L'une des forces, celle qui attire l'objet vers la Terre est son poids :

$$p = \varepsilon \frac{M \cdot m}{d^2}$$

d : distance de l'objet au centre de la Terre.

Nous connaissons la relation entre le poids d'un corps et sa masse en un lieu où l'intensité du champ de pesanteur est g :

$$p = mg \qquad (g \text{ en N/kg})$$

Par comparaison avec la formule de Newton, nous obtenons une expression de l'intensité du champ de pesanteur :

$$g = \frac{\varepsilon M}{d^2}$$

LES VARIATIONS DU POIDS D'UN CORPS

L'expression du poids d'un corps $p = \epsilon \frac{M.m}{d^2}$ permet de prévoir :

- que le poids d'un corps diminue lorsqu'on s'élève en altitude, puisque d augmente;

- que le poids d'un corps diminue lorsqu'on passe d'un pôle à l'équateur parce que la Terre est aplatie aux pôles (les forces d'inertie dues à la rotation de la Terre sont une seconde cause de diminution du poids).

Pour les mêmes raisons, l'intensité du champ de pesanteur g varie d'un point à l'autre du globe ou lorsqu'on s'élève en altitude. Ainsi :

Au pôle :	g = 9,8322 N/kg
A l'équateur :	g = 9,7804 N/kg
A Sousse :	g = 9,798 N/kg.

INTENSITE DU CHAMP DE LA PESANTEUR ET ACCELERATION DE LA PESANTEUR

L'intensité du champ de pesanteur en un point de l'espace et l'accélération que prend un objet en ce point s'expriment par un même nombre. (2)

Ainsi, en Tunisie où l'intensité du champ de pesanteur est :

g = 9,80 N/kg , un objet abandonné prend l'accélération

$g = 9,80 \text{ m/s}^2$

DETERMINATION PRECISE DE g

Les mesures précises de g ont longtemps utilisé le mouvement de pendules spéciaux dits "réversibles". L'exactitude atteignait difficilement quelques millionièmes. (A titre de comparaison, signalons que notre manipulation de T.P. citée plus haut donne g à 3,5% près).

Actuellement, la méthode la plus précise consiste à étudier le mouvement de chute libre d'un corps lancé verticalement dans le vide vers le haut.

Le mouvement du projectile est "suivi" grâce à un dispositif optique (interféromètre) éclairé par le rayonnement d'un laser. Cette méthode permet de mesurer g avec une incertitude relative inférieure à 1.10^{-9} (milliardième). On

---

(2) Cela tient à l'identité de la masse pesante et de la masse inerte. La question ne sera pas abordée ici.

met ainsi facilement en évidence l'attraction combinée de la Lune et du Soleil qui entraine des variations relatives de g de l'ordre de 1.10^{-7} , appelées marées gravimétriques par analogie avec les marées océaniques. (voir exercice 5 en fin de chapitre).

EXERCICE RESOLU

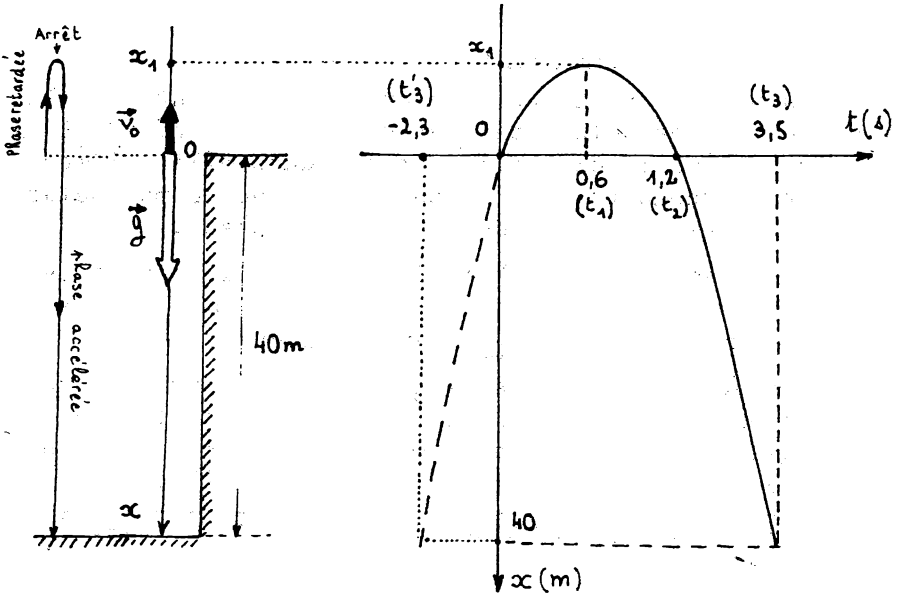
Depuis le toit d'un immeuble de 40m de hauteur, une pierre est lancée verticalement vers le haut, avec une vitesse de 6m/s.

a- Quelle hauteur au dessus du toit atteint-elle ?
b- A quel instant ?
c- Quand repasse-t-elle au niveau du toit ? Avec quelle vitesse ?
d- Quand touche-t-elle le sol ? Avec quelle vitesse?

Prendre g = 10,0 m/s^2.

Choix des origines et de l'orientation.

Prenons pour origine des espaces le toit de l'immeuble; pour origine des temps l'instant où la pierre est lancée et orientons la trajectoire vers le bas. (Le choix des origines et de l'orientation est arbitraire. On aurait pu prendre l'origine des espaces au niveau du sol et orienter vers le haut, ce qui serait évidemment sans influence sur le mouvement, mais modifierait les équations qui le décrivent).



Les équations du mouvement sont :

$x = \frac{1}{2} gt^2 + v_o t$ (1)

$v = gt + v_o$ (2)

$v^2 - v_o^2 = 2gx$ (3)

Compte tenu de l'orientation :

$g = 10\ m/s^2$ $\qquad v_o = -6 m/s$

a- Au sommet de la trajectoire, la vitesse du mobile s'annule. Dans la troisième équation nous écrirons :

$v = 0$ pour $x = x_1$

$$0 - v_o^2 = 2gx_1 \Longrightarrow x_1 = -\frac{v_o^2}{2g}$$

$$\boxed{x_1 = -1,8\ m}$$

b- Ce passage au sommet s'est produit à l'instant t_1. Utilisons la seconde équation ($v = 0$ pour $t = t_1$).

$$0 = gt_1 + v_o \Longrightarrow t_1 = -\frac{v_o}{g} = -\frac{-6m/s}{10m/s^2}$$

$$\boxed{t_1 = 0,6\ s}$$

c- Lorsque le mobile passe au niveau du toit, son élongation est $x = 0$. Utilisons la première équation :

$$0 = \frac{1}{2} gt_2^2 + v_o t_2 \Longrightarrow 0 = 5t_2^2 - 6t_2 \Longrightarrow \begin{cases} t'_2 = 0s \\ t_2 = 1,2s \end{cases}$$

La solution $t'_2 = 0$ s correspond à l'instant du départ. Le second passage a lieu à l'instant :

$$\boxed{t_2 = 1,2\ s}$$

La vitesse est alors (seconde équation) : $\boxed{v_2 = 6\ m/s}$

Remarque :

La montée a duré 0,6s et la descente 0,6s. Les vitesses au point $x = 0$ sont $v_o = -6m/s$ et $v_2 = -v_o = 6$ m/s. Cette symétrie était prévisible puisque l'équation du mouvement est une fonction du second degré du temps (le diagramme des espaces est une parabole).

D'une façon générale, le module de la vitesse du mobile reprend la même valeur au même point à la montée et à la descente et les durées des phases ascendantes et descendantes sont égales.

d- Posons $x_3 = 40$ m dans la troisième équation :

$$40 = 5t_3^2 - 6t_3 \iff 5t_3^2 - 6t_3 - 40 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} t'_3 = -2{,}3 \text{ s} \\ t_3 = 3{,}5 \text{ s} \end{cases}$$

Nous retenons la seconde solution :

$$\boxed{t_3 = 3{,}5 \text{ s}}$$

La vitesse obtenue par la seconde équation :

$$\boxed{v_3 = 29 \text{ m/s}}$$

Remarque :

La solution $t'_3 = -2{,}3$ s pourrait avoir une signification physique : si la pierre avait été lancée depuis le sol à l'instant $t'_3 = -2{,}3$ s avec la vitesse $v'_3 = -29$m/s (vers le haut), elle serait passée au niveau du toit à l'instant $t = 0$ s (déclenchement du chronomètre) avec la vitesse $v_0 = -6$m/s. Son mouvement ultérieur aurait été celui que nous venons d'étudier.

VI- LE MOUVEMENT LIBRE AVEC VITESSE INITIALE QUELCONQUE

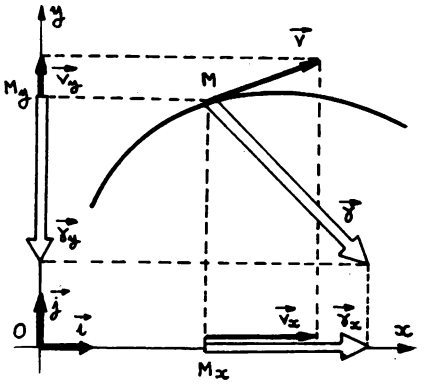
Nous appelons ainsi le mouvement d'un projectile lancé avec une vitesse initiale non verticale. L'expérience quotidienne nous a appris que le mouvement est curviligne.

Nous étudierons ce mouvement en utilisant les projections du point mobile sur les axes Ox et Oy, ce qui nous ramènera à l'étude de mouvements rectilignes.

Soit M un point du plan de repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Son mouvement est défini $\forall t \in \mathbb{R}$ par la fonction vectorielle.

$$t \to \vec{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

que nous supposons deux fois dérivable sur l'intervalle de définition.



La vitesse du point M est

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \begin{cases} \vec{v}_x = \dfrac{dx}{dt}\,\vec{i} \\ \vec{v}_y = \dfrac{dy}{dt}\,\vec{j} \end{cases}$$

$\vec{v}_x$ et $\vec{v}_y$ sont les projections orthogonales de la vitesse $\vec{v}$ sur les axes Ox et Oy.

Soient M_x et M_y les projections orthogonales de M sur les axes

Ox et Oy.

Le vecteur espace de M_x est $\vec{OM}_x = x(t)\,\vec{i}$; sa vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur espace :

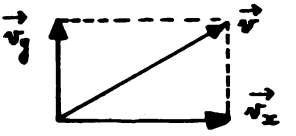
$$\frac{d\vec{OM}_x}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{i}$$

Elle est égale à la projection $\vec{v}_x$ de la vitesse du point M sur l'axe Ox. On vérifie de même que la vitesse du point M_y est égale à la projection de la vitesse de M sur l'axe Oy. D'où le théorème :

Si un point matériel mobile occupe le point M du plan et si M_x et M_y sont les projections orthogonales de M sur les axes Ox et Oy, les vecteurs vitesse $\vec{v}_x$ et $\vec{v}_y$ de M_x et M_y sont les projections orthogonales du vecteur vitesse du mobile et on a :

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{v}_x\|^2 + \|v_y\|^2}$$

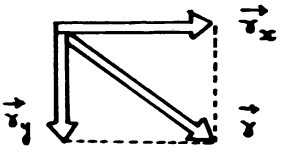


En dérivant par rapport au temps les fonctions $\vec{v}(t)$, $\vec{v}_x(t)$ et $\vec{v}_y(t)$ nous sommes conduits à un second théorème, relatif aux accélérations :

Les vecteurs accélération $\vec{\gamma}_x$ et $\vec{\gamma}_y$ de M_x et M_y sont les projections orthogonales du vecteur accélération du mobile et on a :

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_x + \vec{\gamma}_y$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\|\vec{\gamma}_x\|^2 + \|\vec{\gamma}_y\|^2}$$

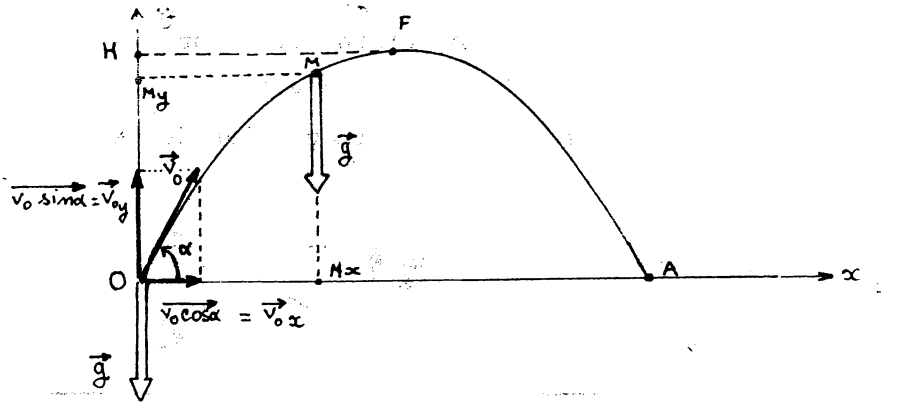


Application

Un projectile, assimilable à un point matériel est lancé depuis le sol avec une vitesse initiale $\vec{v}_o$ faisant un angle α avec le plan horizontal. On se propose de déterminer :

1- La forme de sa trajectoire ;
2- La hauteur maximale atteinte au dessus du sol ;
3- La distance OA à laquelle le projectile retombe ;
4- La valeur de α rendant cette distance maximale.
5- Le module de la vitesse en un point quelconque de la trajectoire.

Nous avons admis que le module de l'accélération d'un mobile libre dans le champ de pesanteur est égal au module de l'intensité du champ de pesanteur. L'accélération du mobile à l'instant initial et pendant tout le mouvement est $g = 9{,}80\ m/s^2$. Le vecteur $\vec{g}$ est vertical, dirigé vers le bas.



La méthode de résolution de ce type d'exercice est générale. Il s'agit soit d'un projectile dans le champ de pesanteur, soit d'une particule électrisée dans un champ électrique uniforme.

- On considère l'état du mobile à l'instant initial : son accélération et sa vitesse initiale.

- On projette ces vecteurs sur les axes Ox et Oy. On connaît ainsi les états initiaux des projections M_x et M_y de M. On en déduit les mouvements de ces points.

Etats Initiaux		Mouvements de M_x et M_y
Mobile $\begin{cases}\vec{g}\\ \vec{v_o}\end{cases}$	Point M_x $\begin{cases}\gamma_x = 0\\ v_{o_x} = v_o\cos\alpha\end{cases}$	⇨ Mouvement rectiligne uniforme d'équation horaire : $x = (v_o \cos\alpha)t$ (1)
	Point M_y $\begin{cases}\gamma_y = g\\ v_{o_y} = v_o\sin\alpha\end{cases}$	⇨ Mouvement rectiligne uniformément varié d'équation horaire : $y = \frac{1}{2} gt^2 + (v_o\sin\alpha)t$ (2)

1/ L'équation du support de la trajectoire est le fonction $y = f(x)$. On l'obtient en éliminant le paramètre t entre les équations (1) et (2).

D'après la première équation : $t = \dfrac{x}{v_o\cos\alpha}$

Portons dans la seconde équation :

$$y = \frac{g}{2 v_o^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (tg\alpha)\, x$$

C'est l'équation d'une parabole dont la concavité est dirigée vers le bas. En effet, conformément aux conventions choisies, g est algébriquement négatif puisque le vecteur $\vec{g}$ est orienté dans le sens négatif.

2/ Le point le plus élevé de la trajectoire s'appelle la flèche. Lorsque le mobile passe en ce point (F), la vitesse v_y de la projection M_y s'annule et ce point rebrousse chemin au point H de l'axe Oy. On obtient l'ordonnée du point H en posant $v_y = 0$ dans la troisième équation du mouvement uniformément varié de M_y :

$0 - v_o^2 \sin^2 \alpha = 2 gy$. D'où l'on déduit :

$$y = - \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

C'est bien un point d'ordonnée positive, car g est algébriquement négatif.

3/ Le point A a une ordonnée nulle ($y = 0$). Nous obtiendrons son abscisse en cherchant l'une des solutions de

l'équation :

$$\frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha} x^2 + \text{tg}\,\alpha . x = 0 \text{ ou } x\left[\frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha} x + \text{tg}\,\alpha\right] = 0$$

Une première solution est x = 0. Elle correspond au point origine O. Cherchons la seconde :

$$\frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha} x = -\text{tg}\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ . D'où } x = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} . \frac{2v_o^2 \cos^2\alpha}{g}$$

$$x = -\frac{2v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \text{ avec } 2 \sin\alpha \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$\boxed{x = -\frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

4/ Cette valeur est maximale pour sin 2α = 1, soit 2α = 90°.

$$\boxed{\alpha = 45°}$$

5/ Entre le module de la vitesse $\vec{v}$ et ses composantes existe la relation :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

Avec $v_x = v_o \cos\alpha$ (dérivée par rapport au temps de l'équation (1))

et $v_y = gt + v_o \sin\alpha$ (dérivée par rapport au temps de l'équation (2))

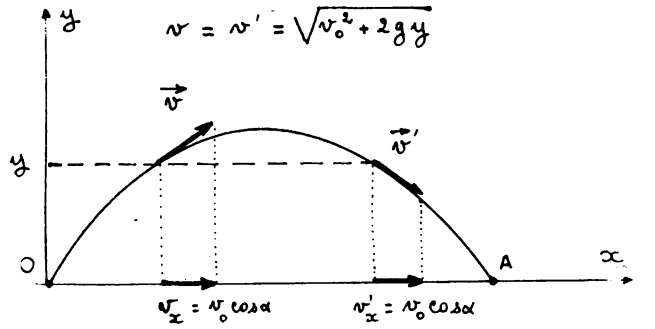
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_o^2 \cos^2\alpha + g^2t^2 + 2gt\, v_o \sin\alpha + v_o^2 \sin^2\alpha .$$

Compte tenu de $v_o^2 \cos^2\alpha + v_o^2 \sin^2\alpha = v_o^2$, et en mettant 2g en facteur :

$$v^2 = v_o^2 + 2g \left[\tfrac{1}{2} gt^2 + (v_o \sin\alpha)\, t\right]$$

La partie entre crochets est l'expression de l'ordonnée y en fonction du temps. Donc :

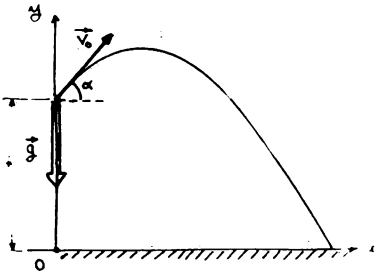
$$\boxed{v^2 = v_o^2 + 2g\, y}$$



Au cours de son mouvement le mobile passe deux fois à la même altitude : une fois en montant et une fois en descendant. L'expression précédente s'applique aux deux cas : le module de la vitesse est le même aux deux passages du mobile à la même altitude. Mais pas sa direction.

Très important :

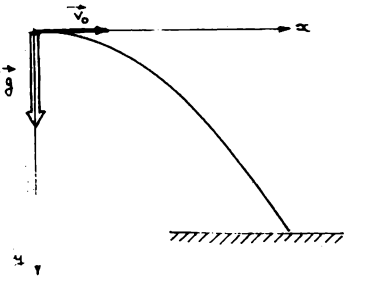
Dans tous les problèmes de projectiles, on doit attentivement étudier les conditions initiales. Voici deux exemples, mais on peut en imaginer bien d'autres :



Démontrer que :

$$\begin{cases} x = (v_0 . \cos\alpha)\, t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha) t + h \end{cases}$$

avec $g < 0$



Démontrer que :

$$\begin{cases} x = (v_0 . \cos\ \ t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

avec $g > 0$

Il n'y a donc pas d'équation "passe-partout" à apprendre par coeur.

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 3

I - LE MOUVEMENT DE CHUTE LIBRE

Un mobile est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids.

AVEC VITESSE INITIALE VERTICALE

Le mouvement de chute libre avec vitesse initiale verticale est rectiligne uniformément varié, de direction verticale.

Les équations de ce mouvement dans le cas le plus général :

g, v_o et x_o sont des valeurs algébriques dépendant de l'orientation de la trajectoire.

$$x = \frac{1}{2} gt^2 + v_o t + x_o$$

$$v = gt + v_o$$

$$v^2 - v_o^2 = 2g(x - x_o)$$

AVEC VITESSE INITIALE QUELCONQUE

On étudie les mouvements des projections sur les axes, en considérant attentivement les conditions initiales : il n'y a rien à apprendre par coeur et à appliquer sans réfléchir !

Dans tous les cas, le mouvement de la projection sur l'axe parallèle à l'accélération est rectiligne uniformément varié et le mouvement de la projection sur l'autre axe est rectiligne uniforme.

Quelles que soient les conditions initiales et la nature du mouvement (rectiligne ou parabolique) l'accélération du mobile en un point quelconque de sa trajectoire est l'accélération de la pesanteur.

ATTENTION

Il n'y a aucune raison de confondre le diagramme des espaces d'un mouvement rectiligne uniformément varié (c'est la parabole d'équation $x = at^2 + bt + c$) avec la trajectoire parabolique d'un projectile dont la vitesse initiale n'est pas verticale (c'est la parabole d'équation $y = Ax^2 + Bx + C$).

II- L'ATTRACTION UNIVERSELLE : LA FORMULE DE NEWTON

Entre deux masses ponctuelles distantes de d ou entre deux sphères homogènes dont les centres sont distants de d existe une interaction de gravitation :

$$f = \varepsilon \frac{m_1 \quad m_2}{d^2}$$

$\varepsilon = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ S.I.
m_1 et m_2 en kg
d en mètres
f en newtons.

· Formule valable pour la Terre (M) et une masse m quelconque :

$$p = \varepsilon \frac{M\,m}{d^2} = m\,g \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{\varepsilon M}{d^2}$$

Chapitre 3

E X E R C I C E S

1/ Une pierre est lancée vers le haut avec une vitesse initiale verticale de module v_o = 5,00 m/s depuis un point O situé à 3,75 m au dessus du sol. On prendra pour valeur approchée du module de l'accélération de la pesanteur : g = 10,0 m/s^2.

1°) Ecrire l'équation horaire du mouvement :

a - En prenant pour origine le point O et en orientant l'axe vertical vers le bas ;

b - En prenant pour origine le point O' situé au niveau du sol et en orientant l'axe vertical vers le haut.

2°) Quelles sont les élongations à l'instant t= 0,50s calculées dans les deux cas précédents. Vérifier que le mobile se trouve bien à la même altitude qui ne dépend pas de l'orientation de l'axe ou de l'origine choisie.

3°) L'origine et l'orientation sont celles de la question 1,a.

a- A quel instant la pierre rebrousse-t-elle chemin ?
b - Quelle est alors son élongation ?
c - Avec quelle vitesse repasse-t-elle au point O ?
d - A quel instant touche-t-elle le sol ?

4°) Construire sur papier millimétré le diagramme des espaces point par point après avoir complété le tableau suivant :

t(s)	0	0,20	0,50	0,80	1,00	1,20	1,40	1,50
x (m)								

Echelles : en abscisse : 1cm pour 0,10s ; en ordonnées : 1cm pour 0,30 m.

2/ Du haut d'une tour de 125 m de hauteur, on laisse tomber deux billes. La première à l'instant 0 s et la deuxième à l'instant 1 s.

1°) Calculer l'instant θ auquel la première bille

arrive au sol. Prendre g = 10,0 m/s^2.

2°) Construire sur le même graphique les diagrammes des espaces des deux billes.

3°) Soit e la distance séparant les deux billes. Exprimer la fonction e = f(t) entre les instants 1 s et θ s.

4°) Construire sur le même graphique les diagrammes des vitesses entre les instants 1 s et θ s.
Que remarque-t-on ?

3/ L'intensité du champ de pesanteur au pôle Nord est g = 9,83 N/kg.

1°) Quelle est sa valeur à l'altitude de 32 km au-dessus du pôle ?

2°) Quelle est sa valeur à une altitude égale à trois rayons terrestres ? Le "rayon" terrestre passant par le pôle est 6 360 km.

4/ Comparaison entre les forces électriques et les forces de gravitation.

Les ions du cristal de chlorure de sodium, considérés comme sphériques sont distants d'environ 2,8 Å($1Å = 1.10^{-10}m$)

Comparer les forces électriques et les forces de gravitation qui s'exercent entre deux ions Na^+ et Cl^- de ce cristal.

On donne :

Constante universelle de la gravitation : $\mathcal{G} : 6,7 .10^{-11}$ SI

Constante de la formule de Coulomb : $k = 9,0 .10^9$ SI

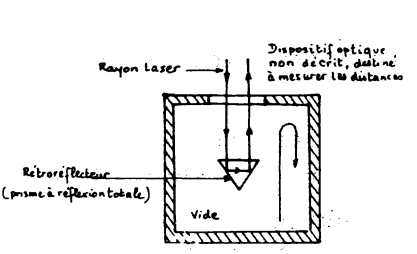
Charge de l'électron : $|e| = 1,6 .10^{-19}$ C

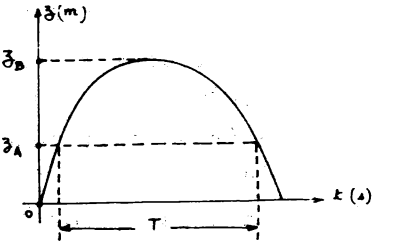
Masse de la môle de sodium $m_{Na} = 23$ g

Masse de la môle de chlore : (Cl 35) $m_{Cl} = 35$ g

Nombre d'Avogadro : $N = 6,0 . 10^{23}$

5/ Pour mesurer g avec une très grande précision à l'aide du "gravimètre absolu" du Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) à Paris, on lance un "rétroréflecteur" dans le vide verticalement vers le haut :





Le mobile passe à l'altitude z_A , atteint l'altitude z_B , repasse à l'altitude z_A . On appelle T la durée du mouvement au dessus du niveau d'altitude z_A . (Voir diagramme des espaces ci-dessus).

1°) Démontrer la relation $h = z_B - z_A = \frac{1}{8} |g| T^2$.

En déduire la valeur de g au BIPM à l'instant de l'expérience, sachant que T = 1,00460200 s pour h = 1,23746863 m (effectuer si possible les calculs à l'aide d'une calculatrice électronique).

Réponse : $g = 9,8092570 \text{ m/s}^2$.

Quelle est l'incertitude relative sur g si l'on admet une incertitude absolue de 2 unités de l'ordre du dernier chiffre inscrit pour T et pour h.

2°) la masse de la Lune est $M = 7,4.10^{22}$ kg. Quelle est l'intensité du champ de pesanteur lunaire au niveau de la Terre lorsque la distance Terre-Lune est 360 000 km ? (La constante universelle de la gravitation est $\varepsilon = 6,67.10^{-11}$ SI).

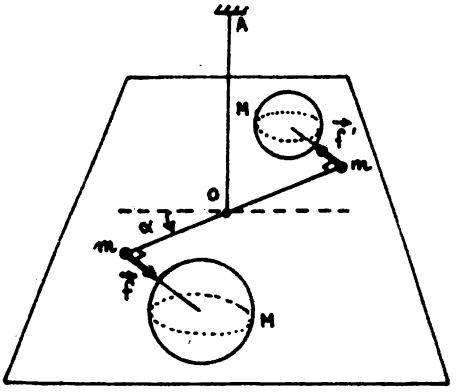
L'attraction lunaire peut-elle être mise en évidence à l'aide du "gravimètre" du BIPM ?

6/ 1°) La masse de la Terre est $M_o = 6,0.10^{24}$ kg; l'intensité de la pesanteur à la surface de la Terre est $g_o = 9,8$ N/kg; en identifiant le poids d'un corps à la force d'attraction exercée sur lui par la Terre, déterminer la valeur numérique, dans le système international, de la constante de gravitation ε . (Le rayon de la Terre est $R_o = 6\,400$ km).

2°) La masse de la Lune est $m_o = \frac{M_o}{81}$; son rayon est $r_o = 0,27\ R_o$. Quelle est l'intensité de la pesanteur γ_o

à la surface de Lune ?

7/ La mesure de la constante universelle de la gravitation peut s'effectuer suivant une méthode employée pour la première fois par l'Anglais Cavendish en 1798 à l'aide d'une balance de torsion.



Un fil vertical OA supporte par son centre une tige horizontale très légère, munie à ses extrémités de deux petites sphères de masses m = 50,00 g chacune Ces masses sont soumises à l'attraction de deux grosses sphères de masses M = 30,00 kg chacune, situées dans le plan horizontal contenant les deux petites sphères.

Lorsque la tige atteint sa position d'équilibre, le fil est tordu d'un angle α . Cet équilibre résulte de l'égalité de deux moments :

- Le moment du couple des forces d'attraction (f = f') de M sur m;

- Le moment de rappel C α du fil, C étant la constante de torsion du fil dont la valeur numérique dans le système international est : $C = 5{,}000.10^{-7}$ SI.

L'angle de rotation de la tige est

$\alpha = (2{,}01.10^{-3} \pm 0{,}01.10^{-3})$ rd.

La longueur de la tige est ℓ = 20,00 cm, connue avec une incertitude relative négligeable.

La distance séparant les centres de M et m est d = 14,10 cm ± 0,05 cm.

1°) Exprimer la force f en fonction de C, α et ℓ.

2°) L'interaction de gravitation entre M et m est= $\frac{\varepsilon Mm}{d^2}$

En déduire la valeur de la constante universelle de la gravitation ε dans le système international, ainsi que son incertitude absolue. (Les incertitudes relatives

sur n et sur M sont négligeables).

3°) Calculer la masse de la Terre, ainsi que son incertitude absolue. Le rayon moyen de la Terre est $R = 6370$ km $\pm$ 10 km. La valeur moyenne de l'intensité du champ de pesanteur au sol est $g_o = 9{,}80$ N/kg $\pm$ 0,02N/kg

8/ Exercice inspiré d'une fable de La Fontaine.

Maître Corbeau, tenant en son bec un fromage, volait au dessus de la verte campagne (altitude : 44,1 m, vitesse : 36,0 km/h. Beau temps, pas un souffle de vent). Passant à la verticale de Maître Renard et surpris à la vue de son rusé compère qui lui avait déjà joué bien des vilains tours, il ouvrit un large bec et lâcha le fromage. Alors, Maître Renard s'élança (sur une distance d_1 en mouvement uniformément accéléré), puis, toutes pattes en avant il freina (sur une distance d_2 en mouvement uniformément retardé) et s'immobilisa à l'instant et au lieu ou tomba le fromage.

1°) Quelle distance Maître Renard a-t-il parcourue dans la verte campagne où $g = 9{,}80$ m/s^2?

2°) Quelles sont les durées t_1 et t_2 des deux mouvements du renard, sachant que la distance d_2 est égale au neuvième de la distance d_1 ?

3°) Quelles sont les accélérations γ_1 et γ_2 des deux mouvements ?

9/ Un projectile quitte le sommet d'une montagne avec une vitesse v_o dont les composantes dans le plan de la trajectoire sont :

$$\begin{cases} v_{ox} = 600 \text{ m/s} \\ v_{oy} = 300 \text{ m/s} \end{cases}$$

1°) Déterminer le module de la vitesse et sa direction à l'origine O.

2°) Donner les équations paramétriques du mouvement.

3°) Quelles sont les coordonnées du point le plus élevé de la trajectoire ?

4°) Calculer la valeur de x pour $y = -1625$ m. A quel instant le point correspondant est-il atteint ?

5°) Calculer le module de la vitesse en ce point.

Prendre $g = 10{,}0$ m/s^2.

Chapitre 4

LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

La dynamique est l'étude des mouvements des systèmes matériels sous l'action des forces auxquelles ils sont soumis.

I - LE PRINCIPE DE L'INERTIE

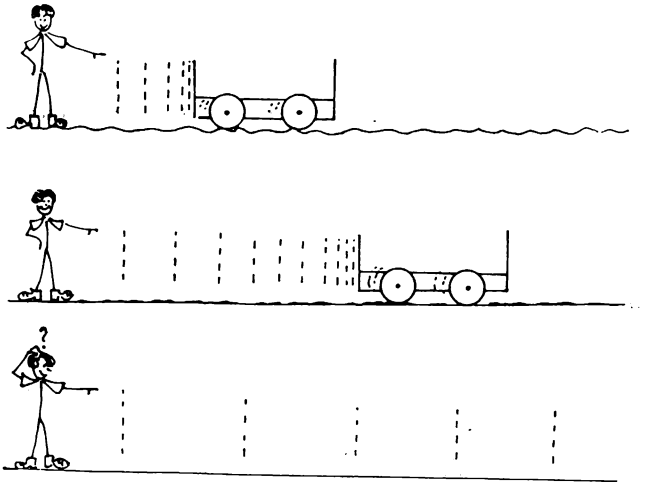
D'après un raisonnement intuitif issu de l'expérience quotidienne, le mouvement d'un objet se déplaçant à vitesse constante, tel celui d'un chariot sur une route horizontale, est nécessairement lié à une force qui le produit. Si l'on cesse de pousser le chariot, il ralentira puis s'arrêtera.

Le philosophe grec Aristote écrivait à ce sujet il y a 2 400 ans :

"Le corps en mouvement s'arrête quand la force qui le pousse ne peut plus agir de façon à le pousser".

Cette conception du mouvement était fausse. Mais l'autorité du philosophe était si grande qu'il fallut attendre les expériences de Galilée, soit près de 2 000 ans, pour débrouiller l'énigme du mouvement.

Pour montrer l'erreur d'Aristote, nous reprendrons le raisonnement de l'expérience "idéalisée" imaginé par Galilée.



Constatons tout d'abord que le mouvement du chariot ne cesse pas immédiatement lorsqu'on cesse de le pousser. Existe-t-il un moyen d'allonger sa course ? Si l'expérience a lieu sur le sable d'une plage, il parcourra une distance très courte; elle sera beaucoup plus grande sur une bonne route, plus grande encore dans un long couloir de marbre lisse.

A la limite, et c'est là l'expérience idéalisée, si la route horizontale était parfaitement lisse, si les axes de roues étaient parfaitement huilés, il n'existerait plus aucune force de frottements qui étaient responsables du ralentissement et le chariot poursuivrait indéfiniment son mouvement à vitesse constante.

Sur Terre, tous les mouvements non entretenus cessent en raison des forces de frottement. Mais un corps lancé dans l'espace interstellaire, loin de toute matière poursuit indéfiniment son mouvement à vitesse constante.

Les réflexions qui précèdent nous conduisent à énoncer le principe de l'inertie établi par Galilée :

PRINCIPE

> Un point matériel soumis à un ensemble de forces de résultante nulle est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

II- LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

1/ Une force engendre une accélération

Un mobile en mouvement rectiligne uniforme ne peut accélérer, ralentir ou changer de direction que s'il est soumis à une force :

- c'est une force motrice qui lui permet de démarrer ;
- ce sont les forces de frottement qui le ralentissent;
- une force latérale lui permet de changer de direction.

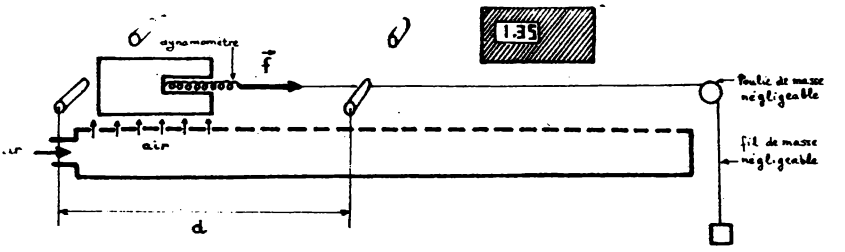
Nous considérerons donc comme établie expérimentalement la propriété suivante :

Une force agissant sur un point matériel lui communique une accélération.

2/ Etude expérimentale

Le dispositif (idéal) comporte un chariot supporté par un coussin d'air et glissant sans frottement sur un banc horizontal.

Le poids du chariot et la réaction du support admettent une résultante nulle, de sorte que nous ne les avons pas représentés. La seule force agissant sur le chariot est la traction exercée par un fil fixé d'une part au chariot et d'autre part à une masse d'entrainement (figure ci-dessous). La valeur de la force de traction est lue sur un dynamomètre solidaire du chariot.



Partant sans vitesse initiale, le chariot parcourt la distance d pendant la durée t lue sur une horloge électronique.

Nature du mouvement

Dans une première expérience, la force de traction est constante. En donnant à d des valeurs croissantes et en mesurant les durées de parcours correspondantes, on détermine la nature du mouvement. Le procédé est le même que celui utilisé pour étudier la nature du mouvement de chute libre.

On constate que le mouvement est rectiligne uniformément accéléré. Son accélération est constante.

Ce point étant acquis, il nous suffit dorénavant de mesurer la durée de parcours pour une seule distance d et de calculer l'accélération :

$$d = \frac{1}{2} \gamma t^2 \iff \gamma = \frac{2d}{t^2}$$

En résumé :

Avec ce dispositif, on connaît :

- La force $\vec{f}$ agissant sur le chariot. ($\|\vec{f}\|$ est donnée par le dynamomètre)
- L'accélération $\vec{\gamma}$ prise sous l'action de cette force.

Masse du chariot constante. Force croissante

Dans une seconde expérience, la masse du chariot reste constante mais on fait varier la force de traction. (Il

suffit pour cela de faire varier la masse motrice suspendue à l'extrémité du fil).

- Sous l'action d'une force $\vec{f}_1$, $\vec{\gamma}_1$
- Sous l'action d'une force $\vec{f}_2$, $\vec{\gamma}_2$
- Sous l'action d'une force $\vec{f}_3$, $\vec{\gamma}_3$ etc.

Si pour chaque expérience on effectue le rapport $\frac{f}{\gamma}$, on obtient des rapports égaux entre eux et ayant numériquement même valeur que la masse M du chariot.

$$\frac{f_1}{\gamma_1} = \frac{f_2}{\gamma_2} = \frac{f_3}{\gamma_3} = \ldots = M \text{ masse du chariot.}$$

Nous avons mis en évidence une relation entre les trois grandeurs f , γ et M :

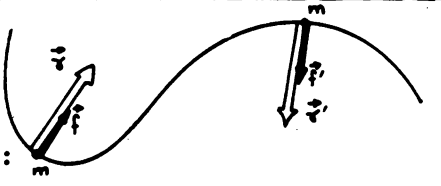
$$\frac{f}{\gamma} = M \quad \text{ou} \quad f = M\,\gamma$$

$\vec{f}$ et $\vec{\gamma}$ ayant dans cette expérience la direction et le sens du mouvement, on peut écrire la relation vectoriellement : $\vec{f} = M\,\vec{\gamma}$

3/ Enoncé du principe fondamental de la dynamique

Cette relation établie au cours d'une expérience très particulière est générale. C'est la relation fondamentale de la dynamique. Elle permet d'énoncer le principe fondamental :

> Un point matériel soumis à une force $\vec{f}$ possède une accélération $\vec{\gamma}$ de même direction et de même sens que la force et proportionnelle à cette force.



$$\vec{f} = m.\,\vec{\gamma}$$

Remarques :

1°) Les principes ne se démontrent pas. L'expérience décrite plus haut ne constitue qu'une vérification. On considère comme vrai un principe tant qu'on n'a pas découvert des faits avec lesquels ils sont en contradiction.

2°) Si la force est nulle, d'après la relation fondamentale, l'accélération est également nulle, de sorte que si le mobile est au repos il conserve son état de repos

et s'il est en mouvement, ce mouvement est rectiligne uniforme. Nous retrouvons l'énoncé du "principe" de l'inertie qu'il faut donc considérer comme un théorème puisqu'il est déduit du principe fondamental.

4/ Définition du newton ; dimension d'une force.

Si dans la relation fondamentale nous posons m = 1 kg et $\gamma = 1 m/s^2$, alors f = 1N. On définit ainsi l'unité de force du système international :

L'unité SI de force est le newton. C'est la force qui, appliquée à une masse de 1kg lui communique une accélération de $1 m/s^2$.

La dimension d'une force se déduit des dimensions de la masse et de l'accélération :

$$[f] = M\ L\ T^{-2}$$

5/ Cas particulier : point matériel dans le champ de pesanteur

Un point matériel de masse m placé dans le champ de pesanteur terrestre est soumis à une force d'attraction qui est son poids : $\vec{p} = m.\vec{G}$

Dans cette relation $\vec{G}$ est le vecteur intensité du champ de pesanteur, de module :

$G = \frac{\mathcal{G}M}{d^2}$, exprimé en N/kg, (voir : champ de pesanteur)

D'après la relation fondamentale de la dynamique, le point prend une accélération $\vec{g}$ telle que :

$$\vec{p} = m . \vec{g}$$

p: poids exprimé en newtons
m: masse exprimé en kg
g: accélération de la pesanteur, exprimée en m/s^2

$\vec{G}$ et $\vec{g}$ sont deux grandeurs différentes :

- $\vec{G}$ caractérise un état de l'espace en un point donné ;
- $\vec{g}$ est l'accélération d'un mobile quelconque abandonné en ce point.

Mais ces deux grandeurs ont même valeur numérique. C'est pourquoi on les note généralement par la même lettre g.

III- MASSE PESANTE. MASSE INERTE

Ce paragraphe peut être passé en première lecture. On tente d'y expliquer pourquoi tous les objets ont même mouvement de chute libre.

1/ La masse inerte

Reprenons le dispositif expérimental utilisé plus haut. En ajoutant des surcharges au chariot on fait croître sa masse. Mais on règle le dispositif de façon que la force de traction soit constante.

On constate alors que pour une même force agissant sur un chariot de masse de plus en plus grande, l'accélération est de plus en plus faible. Plus précisément :

Si f agit sur M, l'accélération est γ

Si f agit sur 2M, l'accélération est $\frac{\gamma}{2}$

Si f agit sur 3M, l'accélération est $\frac{\gamma}{3}$

La masse du chariot représente donc son aptitude à s'opposer à la modification de sa vitesse. On l'appelle pour cette raison son inertie ou sa masse inerte.

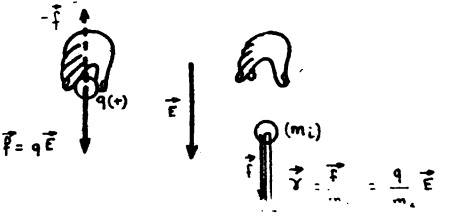
2/ Charge électrique et masse inerte d'une petite sphère

Maintenons immobile dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$ une petite sphère de charge électrique q, positive par exemple. Elle est soumise à une force d'attraction :

$$\vec{f} = q.\vec{E}$$

Si l'on augmente la charge électrique q, la force $\vec{f}$ croît proportionnellement.

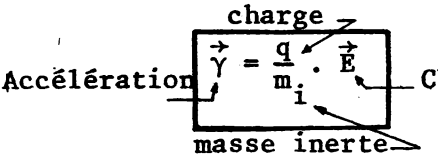
La charge q est donc, pour un champ électrique $\vec{E}$ donné, un coefficient responsable de l'intensité de la force électrique. Appelons le coefficient d'attraction.



La valeur de q étant fixée, lâchons la sphère. Etant soumise à une force constante $\vec{f}$, elle prend un mouvement uniformément accéléré, d'accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{f}}{m} = \frac{q.\vec{E}}{m} \qquad \vec{\gamma} = \frac{q}{m} . \vec{E}$$

Il est possible d'augmenter la masse de la sphère sans modifier sa charge électrique. Par exemple, la doubler. Alors l'accélération est divisée par 2. La masse en question est donc l'inertie de la sphère ou sa masse inerte m_i :



Puisqu'on peut faire varier m_i sans changer q, ou faire varier q sans changer m_i, la sphère peut prendre n'importe quelle accélération dans le champ électrique uniforme $\vec{E}$.

La charge q(coefficient d'attraction) et la masse inerte m_i (coefficient de modération de l'accélération) sont indépendantes.

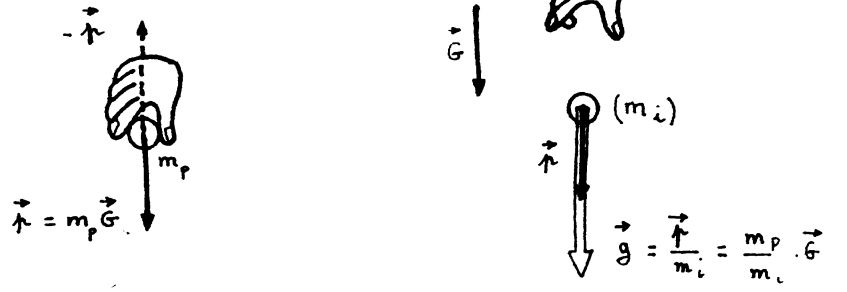
3/ Masse pesante et masse inerte d'une petite sphère

Il faut lire ce paragraphe en parallèle avec le précédent pour en saisir les similitudes et les différences.

Maintenons immobile dans le champ de pesanteur constant G une sphère de masse m. Elle est soumise à une force d'attraction (son poids) : $\vec{p} = m.\vec{G}$

Si l'on fait croître la masse de la sphère (en ajoutant de la matière), la force p croît proportionnellement.

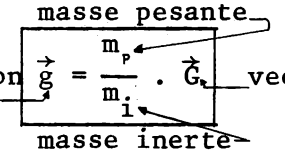
La masse m est donc un coefficient responsable de l'intensité de la force d'attraction. Appelons la masse d'attraction ou masse pesante m_p.



La valeur de m_p étant fixée, lâchons la sphère. Etant soumise à la force constante $\vec{p}$, elle prend un mouvement uniformément accéléré, d'accélération :

$$\vec{g} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{m}{m} \cdot \vec{G} \qquad \vec{g} = \frac{m_p}{m} \cdot \vec{G}$$

Si nous poursuivions la comparaison avec le paragraphe précédent, il faudrait dire qu'on laisse le coefficient m_p constant et qu'on double le coefficient m de façon à diviser l'accélération g par deux. Le coefficient m étant évidemment la masse inerte m_i , celle qui modère l'accélération.



Mais tous les objets ont même accélération. Parcequ'on ne peut pas doubler la masse inerte sans doubler la masse pesante.

Et puisque numériquement g = G alors $m_p = m_i$.

La masse d'attraction ou masse pesante m_p , celle qui est responsable de l'intensité du poids dans un champ de pesanteur donné et la masse inerte m_i, celle qui modère les accélérations sont identiques. Il n'y a pas à faire la distinction entre ces deux coefficients.

C'est pourquoi tous les objets ont même accélération de chute libre.

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 4

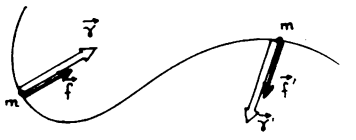
I - LE PRINCIPE DE L'INERTIE

Si un point matériel n'est soumis à aucune force (ou à un ensemble de forces de résultante nulle), il est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

$\vec{f} = \vec{0} \iff$ Mouvement rectiligne uniforme.

II- LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Un point matériel soumis à une force $\vec{f}$ possède une accélération $\vec{\gamma}$ de même direction et de même sens que la force et proportionnelle à cette force.



$\vec{f} = m.\vec{\gamma}$

m en kg
γ en m/s²
f en N

Relation fondamentale de la dynamique.

On peut préciser :

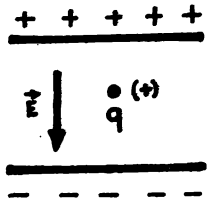
- Si la force $\vec{f}$ est constante en direction, module et sens, il en est de même pour l'accélération. Le mouvement est alors uniformément varié dans le sens de la force, mais pas nécessairement rectiligne. C'est le cas du projectile dans le champ de pesanteur.

- Si comme précédemment la force est constante et si le mobile a une vitesse initiale de même direction, le mouvement est rectiligne uniformément varié.

Chapitre 4

E X E R C I C E S

1/ Une très petite gouttelette d'huile, de poids $p = 3{,}78.10^{-14}$N porte la charge élémentaire positive $q = 1{,}60.10^{-19}$C. Placée dans le champ électrique uniforme $\vec{E}$ d'un condensateur plan à air, elle est soumise à une force électrique $\vec{f} = q\vec{E}$ de même sens que celui de $\vec{E}$.



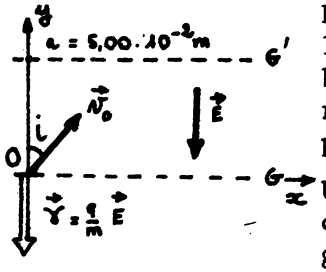
Lorsqu'elle se déplace, elle est soumise à une force résistante due à l'air, de sens opposé à celui du déplacement et de module R = kv proportionnel à sa vitesse. $k = 3{,}40.10^{-10}$ S.I.

Représenter sur deux figures séparées l'ensemble des forces agissant sur la gouttelette :

a- à l'instant t = 0 s où elle va se mettre en mouvement ;
b- à un instant ultérieur.

Montrer que sa vitesse atteint une valeur limite v_i que l'on calculera pour $E = 4{,}00.10^4$ V/m.

2/ Exercice d'après le baccalauréat de juin 1976. La version complète se trouve à la fin du chapitre consacré à l'accélération des électrons par les champs électriques.



Entre deux grilles de fil fin métallique, planes et parallèles, assimilables à des plaques de condensateur plan, règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$ perpendiculaire aux grilles.

Une particule ponctuelle, de masse m et de charge q positive pénètre entre les grilles au point O à l'instant 0 s. Sa vitesse à cet instant est $\vec{v}_o$. Elle fait un angle i avec l'axe Oy. Dans le champ $\vec{E}$, la particule est soumise à une force électrique $\vec{f} = q\vec{E}$ qui lui communique une accélération $\vec{\gamma} = \frac{\vec{f}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}$

1°) Ecrire l'équation de la trajectoire de la particule lorsqu'elle se déplace entre les grilles G et G' (atten-

tion, les notations ne sont pas celles utilisées au chapitre 3 : i est l'angle formé par les directions de la vitesse $\vec{v}_o$ et de l'axe Oy).

2°) Application numérique : $i = 30°$; $m = 1{,}67.10^{-27}$ kg $q = 1{,}60.10^{-19}$ C; $v_o = 5{,}00.10^{6}$ m/s; $E = 1{,}60.10^{6}$ V/m.

3°) Les grilles sont distantes de $a = 5{,}00.10^{-2}$ m. "A l'extérieur des grilles" le champ est nul et la particule se déplace en mouvement rectiligne uniforme, avec la vitesse qu'elle avait en arrivant sur G'.

a - Montrer que la particule sort par la grille G'.

b - Calculer le module v_a de la vitesse de la particule au point A où elle traverse la grille G'.

Chapitre 5

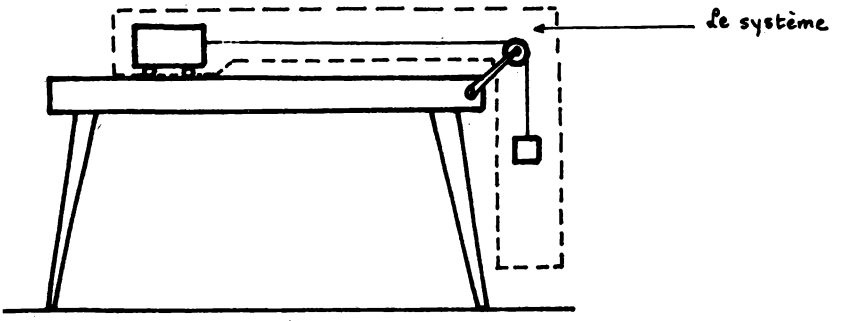
NOTIONS SUR LA DYNAMIQUE DES SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

THEOREME DU CENTRE DE GRAVITE

I - LES SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

Nous avons énoncé au chapitre précédent le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel isolé.

Or, aucun objet ne peut être réduit à un point. Les objets sont formés d'ensembles de points. Ce sont des systèmes matériels.



Le système peut être formé d'une ou de plusieurs parties. Pour définir correctement le système on peut l'entourer d'un trait comme sur la figure ci-dessus. Ce système est formé d'un chariot, d'une masse, d'une poulie et d'un fil.

Tout ce qui n'appartient pas au système constitue l'extérieur. (la table, le support de la poulie, le sol etc.).

On doit distinguer :

Les systèmes indéformables :

Les distances entre leurs différents points ne peuvent pas varier au cours du temps. (une pierre, une masse marquée etc.).

Les systèmes déformables :

Les distances entre leurs différents points peuvent varier au cours du temps (les liquides, une corde, le système représenté sur la figure pour lequel la distance entre un point quelconque du chariot et un point quelconque de la masse est variable, etc.).

II- FORCES INTERIEURES ET FORCES EXTERIEURES

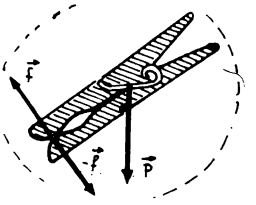
Un système ayant été défini, il importe de distinguer les forces qui sont responsables de son mouvement de celles qui n'y participent pas.

1/ Les forces intérieures

Les forces intérieures sont celles qui s'exercent entre deux points ou deux parties d'un système. Elles sont opposées deux à deux en raison du principe de l'action et de la réaction (si A exerce une force sur B, B exerce une force opposée sur A). Leur résultante est nulle :

$$\Sigma \vec{F}_{int} = \vec{0}$$

En conséquence, les forces intérieures ne participent pas au mouvement du système. Mais elles peuvent le déformer.



Dans la figure ci-dessus, les forces $\vec{f}$ et $-\vec{f}$ sont deux forces intérieures opposées. Elles ne participent pas au mouvement de chute. En revanche, le point $\vec{P}$ est la force responsable du mouvement. C'est une force extérieure au système.

2/ Les forces extérieures

Les forces extérieures au système sont celles qui provoquent son mouvement.

Pour faire l'inventaire des forces extérieures sans en oublier, on recherchera toujours dans cet ordre :

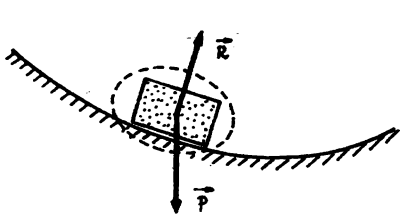
a- Les forces appliquées

- à distance : poids, force électrique, force magnétique.
- de contact : résistance de l'air, frottement visqueux, frottement solide, poussée d'Archimède..

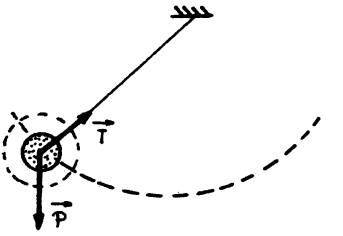
b- Les forces de liaison

Elles sont de deux sortes : réaction d'un support et tension d'un fil ou d'un ressort.

Ces forces limitent les déplacements du système.



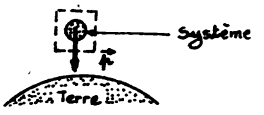
Réaction du support

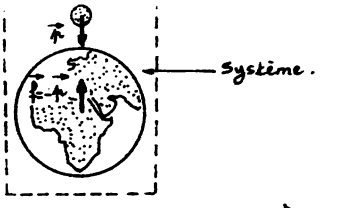


Tension du fil

3/ Relativité des notions de forces intérieures ou extérieures

Suivant le choix de la frontière du système une force qui était extérieure peut devenir intérieure.



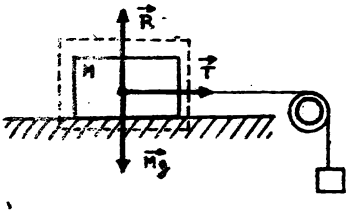


Si le système est limité à la bille, son poids $\vec{P}$ est une force extérieure qui provoque son mouvement.

Si la Terre fait partie du système, la force $\vec{P}$ est l'une des intéractions de gravitation. Elle ne provoque pas le mouvement du système. Mais les deux forces intérieures $\vec{P}$ et $-\vec{P}$ déforment le système formé de la bille et de la Terre.

Un bon "truc".

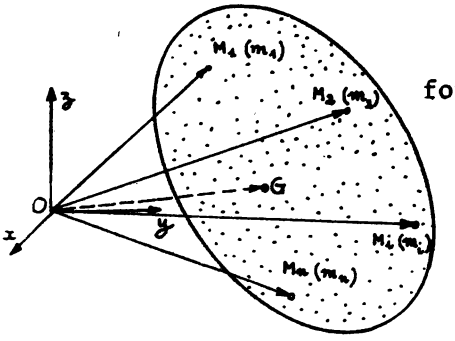
Pour n'oublier aucune force extérieure dans l'inventaire, pour ne pas en inventer qui n'existent pas, on procède ainsi: la frontière étant tracée, on en fait le tour. Seuls les éléments liés à d'autres systèmes et traversant la frontière peuvent exercer des forces extérieures sur notre système.



Ici, la frontière est traversée par un fil, par unsupport et par le champ de pesanteur. Il y a donc trois forces extérieures: la tension du fil, la réaction du support et le poids du système.

III-LE THEOREME DU MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITE

Centre des masses ou centre de gravité d'un système de points matériels.



Soit un système matériel formé des points :

- M_1 de masse m_1
- M_2 de masse m_2
- .....
- M_i de masse m_i
- .....
- M_n de masse m_n

O étant un point quelconque de l'espace, le centre de gravité du système est un point G (unique et indépendant de O) défini par :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{OG} = \sum_{i=1}^{n} (m_i . \vec{OM_i}) \quad \text{ou} \quad \vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (m_i . \vec{OM_i})}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

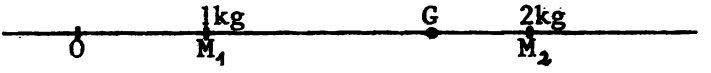
$\sum_{i=1}^{n} m_i$ est la masse totale M du système.

On peut donc écrire

$$M \cdot \vec{OG} = \sum_{i=1}^{n} (m_i . \vec{OM_i}) \quad \text{ou} \quad \vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (m_i . \vec{OM_i})}{M}$$

Exemple

Déterminer la position du centre de gravité d'un système formé des points M_1 de masse m_1 = 1kg et M_2 de masse m_2 = 2kg distants de 50cm.



Choisissons arbitrairement un point O sur la droite passant par les points M_1 et M_2 de sorte que $\overline{OM_1}$ = 30cm par exemple.

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OM_1} \cdot 1 + \vec{OM_2} \cdot 2}{3} \quad ; \quad \overline{OG} = \frac{\overline{OM_1} \cdot 1 + \overline{OM_2} \cdot 2}{3} = 63,3 \text{ cm}$$

On en déduit M_1G : $\overline{M_1G}$ = 33,3 cm

A titre d'exercice, vérifier qu'on trouve le même résultat quelle que soit la position de O et en particulier si O est confondu avec M_1.

Soient M_1 de masse m_1 , M_2 de masse m_2 etc. les points du système. G son centre de gravité.

M_1 est soumis à la force $\vec{f}_1$ et prend l'accélération $\vec{\gamma}_1$ telle que :

$$\vec{f}_1 = m_1 \cdot \vec{\gamma}_1$$

M_2 est soumis à la force $\vec{f}_2$ et prend l'accélération $\vec{\gamma}_2$ telle que :

$$\vec{f}_2 = m_2 \vec{\gamma}_2 \qquad \text{etc.}$$

La question est : est-il possible de déterminer l'accélération du centre de gravité G (étant entendu que ce point n'est pas l'un des points matériels du système, mais un point de l'espace défini mathématiquement par la formule du paragraphe précédent. Il peut d'ailleurs être hors du système, comme c'est le cas pour celui qui est représenté sur la figure en haut de cette page)?

G est défini par : $\vec{OG} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} (m_i . \vec{OM}_i)$

où $\vec{OG}$ est le vecteur espace du point G et $\vec{OM}_i$ le vecteur espace du point M_i.

Dérivons deux fois par rapport au temps les deux membres de cette égalité:

$$\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} i \right) \qquad (1)$$

$\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2}$ est l'accélération $\vec{\gamma}_G$ du centre de gravité et

$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$ est l'accélération $\vec{\gamma}_i$ du point M_i. Par suite :

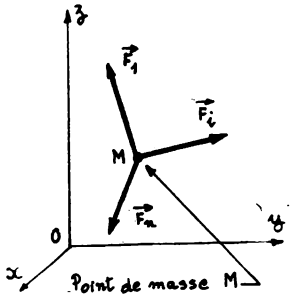
$$\vec{\gamma}_G = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} (m_i \cdot \vec{\gamma}_i) \qquad (2)$$

Dans $m_i \cdot \vec{\gamma}_i$ nous reconnaissons la force extérieure $\vec{f}_i$ qui s'exerce sur le point M_i. L'accélération du centre de gravité s'exprime donc par :

$$\vec{\gamma}_G = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i$$

Ainsi, connaissant l'ensemble des forces extérieures agissant sur les différents points d'un système matériel quelconque, on peut déterminer l'accélération de son centre de gravité et par suite le mouvement de ce point.

Mouvement d'un point libre



Imaginons un point matériel libre ayant même masse M que tout le système précédent.

Appliquons à ce point en les transportant parallèlement à elles même toutes les forces $\vec{f}_i$ qui agissaient sur les points M_i.

On peut déterminer l'accélération du point en appliquant la relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i = M \cdot \vec{\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\gamma} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i$$

Le point a même mouvement que celui du centre de gravité du système matériel. On peut donc énoncer le théorème relatif au mouvement du centre de gravité d'un système matériel :

Théorème

Le centre de gravité G d'un système matériel quelconque, déformable ou indéformable a même mouvement qu'un point matériel libre où serait concentrée toute la masse du système et auquel seraient appliquées en les transportant parallèlement à elles mêmes toutes les forces extérieures agissant sur les différents points du système.

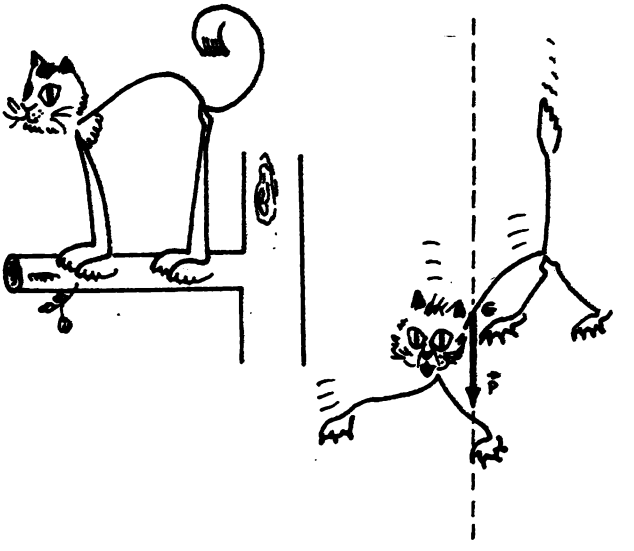
Importance du théorème

Connaissant l'ensemble des forces extérieures agis sant sur un système, on se contente d'étudier le mouvement de son centre de gravité comme s'il était un point matériel libre ayant la masse totale du système. On est donc ramené à un problème de dynamique du point.

En particulier, le poids d'un corps ne s'exerce pas en son centre de gravité, mais en tous les points. En accord avec le théorème on peut appliquer la résultante de tous les poids élémentaires au centre de gravité et étudier le mouvement de ce point.

Un exemple:

Un chat tombe d'une branche d'arbre sans vitesse initiale. Les contorsions de l'animal sont dues à des forces intérieures. Les seules forces extérieures, si l'on néglige la résistance de l'air, sont les poids élémentaires dont nous appliquons la résultante au centre de gravité: la trajectoire du centre de gravité est verticale quels que soient les mouvements de l'animal. Ces mouvements sont des déformations du système sous l'action de forces intérieures qui ne peuvent pas dévier le centre de gravité de sa trajectoire verticale.



L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 6

I - LES SYSTEMES DE POINTS MATERIELS

Les systèmes matériels sont classés en deux catégories :

Les systèmes indéformables tels que les distances entre leurs différents points ne varient pas au cours du temps.

Les systèmes déformables tels que les distances entre leurs différents points varient au cours du temps.

II- LES FORCES

Après avoir défini un système, c'est-à-dire après avoir choisi sa frontière on fait l'inventaire des forces agissant sur lui.

Les forces intérieures

Elles sont opposées deux à deux et leur résultante est nulle. Elles ne participent pas au mouvement du système mais peuvent contribuer à le déformer.

Les forces extérieures

Ce sont les forces responsables du mouvement. Dans la presque totalité des problèmes il s'agit :

- du poids (et parfois d'une force électrique)
- des forces de liaison avec des systèmes voisins : tensions des fils et réactions des supports
- des forces de frottement.

III- LE THEOREME DU MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITE

Le centre de gravité d'un ensemble de points matériels M_i de masse m_i est un point G défini par la relation :

Théorème :

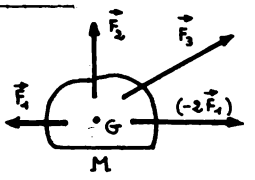
$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \vec{OG} = \sum_{i=1}^{n} (m_i . \vec{OM_i})$$

Le centre de gravité G d'un système matériel quelconque, déformable ou indéformable a même mouvement qu'un point matériel libre où serait concentrée toute la masse du système et auquel seraient appliquées en les transportant parallèlement à elles mêmes toutes les forces extérieures agissant sur les différents points du système.

Chapitre 6

APPLICATION DE LA RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE A DES MOUVEMENTS RECTILIGNES

Problème

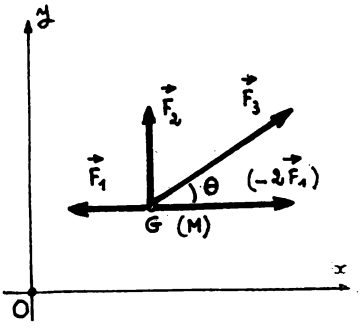


Un ensemble de forces extérieures agissant sur un système matériel, on cherche l'accélération de son centre de gravité.

I - LES CONVENTIONS CHOISIES

Une première simplification du problème est offerte par le théorème du centre de gravité. On applique les forces au centre de gravité en considérant qu'il possède toute la masse du système.

1/ La relation fondamentale de la dynamique vectorielle



La relation fondamentale de la dynamique (en abrégé R.F.D.) appliquée au centre de gravité s'écrit :

$$\boxed{\Sigma \vec{F}_{\text{extérieures}} = M\,\vec{\gamma}}$$

ici :

$$\vec{F}_1 + (-2\vec{F}_1) + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = M\,\vec{\gamma}$$

Les forces sont généralement connues alors que l'accélération est la grandeur inconnue que l'on cherche.

On simplifie encore le problème en rapportant le mouvement à des axes de coordonnées convenablement choisis. On projette l'ensemble des forces sur chaque axe et on étudie séparément les effets des composantes de ces forces suivant ces axes.

2/ La R.F.D. algébrique

Après avoir projeté l'ensemble des forces sur chaque axe, on écrit l'expression algébrique de la R.F.D. Pour cela, on adopte deux conventions différentes pour les projections des forces et pour les projections de l'accélération.

a- Valeur algébrique de la projection d'une force

C'est son module affecté d'un signe : si la projection a le sens positif, c'est-à-dire celui de l'axe orienté, on affecte son module du signe (+).

Si la projection a le sens négatif, on affecte son module du signe (-).

Projections sur Ox

Force	Projection	Module de la projection	Valeur algébrique
$\vec{F}_1$	$\vec{F}_1$	F_1	$- F_1$
$(-2\vec{F}_1)$	$(-2\vec{F}_1)$	$2F_1$	$+ 2F_1$
$\vec{F}_2$	$\vec{0}$	0	0
$\vec{F}_3$	$(\overrightarrow{F_3 \cos\theta})$	$F_3 \cos\theta$	$+ F_3 \cos\theta$

Projections sur Oy

Force	Projection	Module de la projection	Valeur algébrique
$\vec{F}_1$	$\vec{0}$	0	0
$(-2\vec{F}_1)$	$\vec{0}$	0	0
$\vec{F}_2$	$\vec{F}_2$	F_2	$+ F_2$
$\vec{F}_3$	$(\overrightarrow{F_3 \sin\theta})$	$F_3 \sin\theta$	$+ F_3 \sin\theta$

Afin de ne pas encombrer la figure, il est préférable de ne pas représenter les projections des forces.

b- Valeur algébrique des composantes de l'accélération

L'accélération $\vec{\gamma}$ est inconnue. On ne connaît pas a priori les signes des valeurs algébriques des projections $\vec{\gamma}_x$ et $\vec{\gamma}_y$. On note donc γ_x et γ_y les valeurs algébriques des composantes de l'accélération. Leurs signes ne seront connus qu'après l'application numérique.

R.F.D. algébrique suivant l'axe Ox

$$- F_1 + 2F_1 + F_3 \cos\theta = M \cdot \gamma_x$$

d'où l'on déduit : $\gamma_x = \dfrac{F_1 + F_3\cos\theta}{M}$

R.F.D. algébrique suivant l'axe Oy

$$F_2 + F_3 \sin\theta = M \cdot \gamma_y$$

d'où l'on déduit :

$$\gamma_y = \frac{F_2 + F_3 \sin\theta}{M}$$

Si le calcul numérique donne $\gamma_x > 0$ alors $\vec{\gamma}_x$ a le sens positif.
Si le calcul numérique donne $\gamma_x < 0$ alors $\vec{\gamma}_x$ a le sens négatif.
Même raisonnement pour γ_y.

II- METHODE DE RESOLUTION D'UN EXERCICE DE DYNAMIQUE DE TRANSLATION

1/ Faire un schéma en définissant le système.(choix de la frontière). S'il est déformable on le décompose en parties indéformables.

2/ Pour chaque partie indéformable, faire l'inventaire des forces extérieures et les appliquer au centre de gravité.

3/ Ecrire pour chaque partie la R.F.D. vectorielle.

4/ Projeter pour chaque partie la relation sur l'axe ou sur les axes orientés choisis. On obtient ainsi les R.F.D. algébriques. Il est inutile de représenter les projections des forces sur les axes.

5/ On peut alors répondre aux questions posées qui se réduisent généralement à deux types :

Quelle est l'accélération du système ?

Quelles sont les forces de liaisons ?

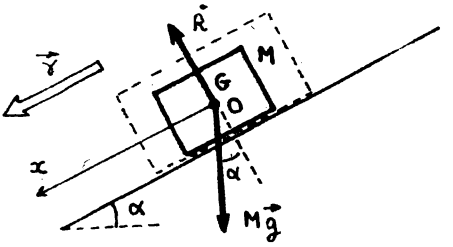
Exemples d'applications de la méthode

1/ Solide sur un plan incliné

Un solide de masse M repose sur un plan parfaitement lisse (sans frottement). On l'abandonne sans vitesse ini-

tiale.

-Déterminer son accélération et la nature du mouvement.
-Quelle est la réaction du support ?



Le système est formé d'une seule partie indéformable que nous avons encadrée.

Inventaire des forces extérieures :

- Le poids : $\vec{P} = \vec{Mg}$
- La réaction du support $\vec{R}$.

(si le support est parfaitement lisse, la réaction du support lui est perpendiculaire).
Il n'y a pas d'autre force extérieure. En particulier, pas de "force dans le sens du mouvement". C'est la résultante de $\vec{P}$ et de $\vec{R}$ qui a le sens du mouvement ;ce n'est pas une troisième force.

En résumé, le système étant placé dans le champ de pesanteur et n'étant en contact qu'avec un seul système voisin, le support, il y a deux forces extérieures et deux seulement.

La relation fondamentale de la dynamique vectorielle s'écrit : $\vec{Mg} + \vec{R} = \vec{M\gamma}$

Le choix des axes dépend du problème posé. Ici: axe Ox dans le sens du mouvement, c'est-à-dire dans le sens de l'accélération et axe Oy dans le sens de la réaction du support.

$\vec{Mg}$ a pour projections $\overline{(Mg \cos\alpha)}$ suivant et $\overline{(Mg \sin\alpha)}$ suivant O_x. Les valeurs algébriques étant :

Mg cos α : $-Mg \sin\alpha$

$\vec{R}$ a pour projections $\vec{R}$ suivant Oy, de valeur algébrique R et $\vec{0}$ suivant Ox.

Exemple de présentation

R.F.D. vectorielle	R.F.D. algébriques
$\vec{Mg} + \vec{R} = M \cdot \vec{\gamma}$	sur Ox : $Mg \sin\alpha + 0 = M.\gamma$ (1) sur Oy : $-Mg\cos\alpha + R = 0$ (2)

La relation (1) donne l'accélération :

$$\gamma = g \sin \alpha$$

Elle est indépendante de la masse du système. Tous les objets ont même accélération sur un plan parfaitement lisse d'inclinaison donnée. C'est en quelque sorte une "chute libre ralentie".

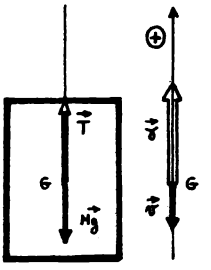
La relation (2) donne la réaction du support :

$$R = Mg \cos \alpha$$

2/ Deuxième exemple : l'ascenseur

Un ascenseur peut monter ou descendre en mouvement uniforme. Il peut monter en accélérant ou en ralentissant. Il peut descendre en accélérant ou en ralentissant.

Un ascenseur descend avec un mouvement uniformément ralenti d'accélération $\vec{\gamma}$. Exprimer la tension du cable qui le soutient.



Deux forces agissent sur l'ascenseur : son poids $\vec{Mg}$ et la tension $\vec{T}$ du cable.

Puisque le mouvement est ralenti, l'accélération a le sens contraire de celui de la vitesse ($\gamma v < 0$). La vitesse étant dirigée vers le bas, l'accélération est dirigée vers le haut.
On choisit donc d'orienter l'axe du mouvement vers le haut.

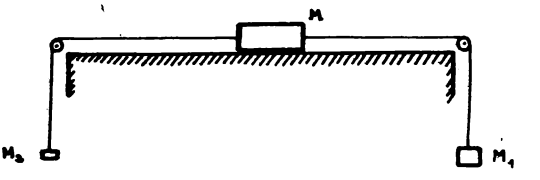
R.F.D. vectorielle	R.F.D. algébrique
$\vec{Mg} + \vec{T} = M \cdot \vec{\gamma}$	$-Mg + T = M \cdot \gamma$

$$T = M(g + \gamma)$$

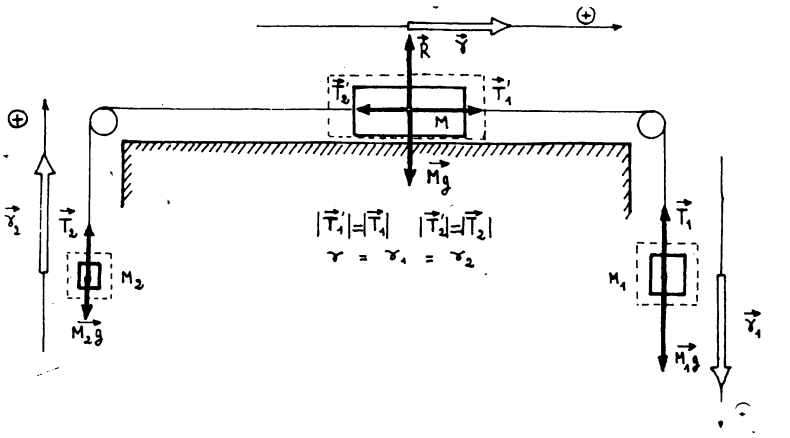
La tension du cable est supérieure au poids de l'ascenseur.

Sur le même modèle, traiter à titre d'exercice les trois autres cas de mouvements uniformément variés.
Cas particulier : quelle est la tension du cable lorsque le mouvement est uniforme ?

3/ Troisième exemple



Le dispositif schématisé ci-dessus comprend un chariot de masse M pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal. Il est relié par l'intermédiaire de fils et de poulies de masses négligeables aux masses M_1 et M_2 . Déterminer l'accélération du chariot. On suppose les fils inextensibles et $M_1 > M_2$.



Ce système déformable est formé de trois parties indéformables : les masses M_1 et M_2 et le chariot.

- Forces extérieures agissant sur M_1 : $\vec{M}_1 g$ et $\vec{T}_1$
- Forces extérieures agissant sur M_2 : $\vec{M}_2 g$ et $\vec{T}_2$
- Forces extérieures agissant sur le chariot : son poids $\vec{Mg}$ et la réaction $\vec{R}$ du support qui sont deux forces opposées ; les tensions $\vec{T}_1'$ et $\vec{T}_2'$.

Si les poulies ont des masses négligeables, elles modifient les directions des fils mais laissent constants les modules des tensions.

Donc : $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}\|$ et $\|\vec{T}_2\| = \|\vec{T}_2'\|$

Si $M_1 > M_2$, on prévoit les sens des déplacements et des accélérations $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ et $\vec{\gamma}$. On oriente les axes des mouvements par continuité comme indiqué sur la figure.

Dans ces conditions $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ et $\vec{\gamma}$ ont non seulement mêmes modules (parce que les fils inextensibles transmettent aux trois parties les mêmes déplacements pendant les mêmes durées), mais aussi mêmes valeurs algébriques :

Valeurs algébriques : $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$

	R.F.D. vectorielles	R.F.D. algébriques
Sur M_1	$\vec{M_1 g} + \vec{T_1} = M_1 \vec{\gamma_1}$	$M_1 g - T_1 = M_1 \gamma$ (1)
Sur M_2	$\vec{M_2 g} + \vec{T_2} = M_2 \vec{\gamma_2}$	$-M_2 g + T_2 = M_2 \gamma$ (2)
Chariot	$\vec{Mg} + \vec{R} + \vec{T_1'} + \vec{T_2'} = M\vec{\gamma}$	$0 + 0 + T_1 - T_2 = M\gamma$ (3)
Par addition de (1), (2) et (3) $\Rightarrow$		$(M_1 - M_2)g = (M_1 + M_2 + M)\gamma$

$$\gamma = \frac{(M_1 - M_2)\, g}{M_1 + M_2 + M}$$

III- LES FORCES D'INERTIE

Une expérience de physique dans un vaisseau cosmique

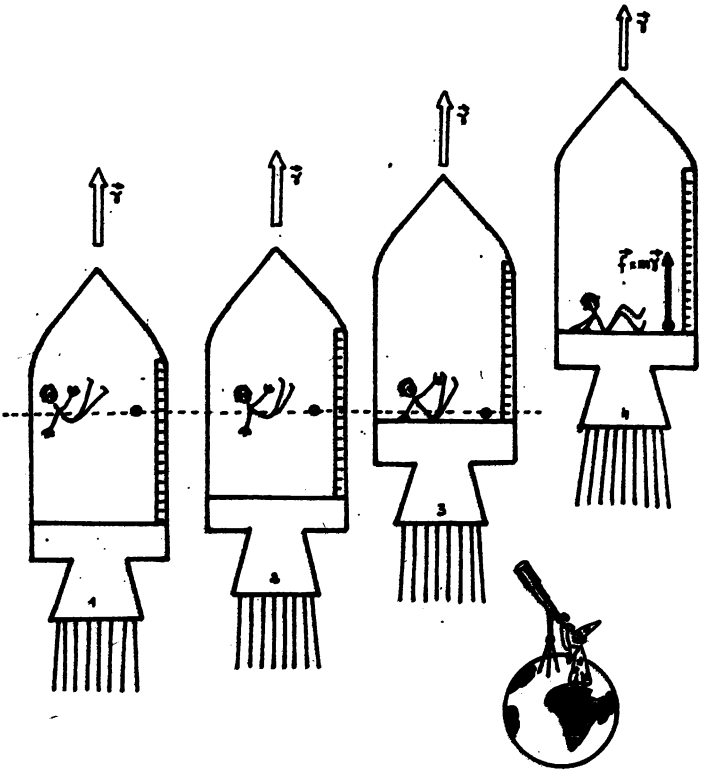
Dans son vaisseau cosmique, très loin de la Terre et de tout champ de pesanteur un cosmonaute a embarqué le matériel nécessaire à l'étude de la chute libre d'une bille : règle graduée et horloge électronique.

En état d'apesanteur, les objets et lui même flottent librement dans la cabine. Il n'y a ni haut ni bas.

Brusquement, les réacteurs qui jusqu'alors étaient au repos sont mis en marche, à l'insu du cosmonaute (par télécommande depuis la Terre). La fusée prend par rapport à la Terre un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Nous allons décrire de deux façons les phénomènes qui se produisent à bord, selon qu'ils sont observés de l'extérieur par un astronome ou de l'intérieur par le cosmonaute.

1/ Point de vue de l'observateur extérieur



Avant le départ de la fusée, n'étant soumis à aucune force (apesanteur), la bille et le cosmonaute sont immobiles. Le démarrage de la fusée ne change rien à cette situation : ils demeurent immobiles par rapport à l'astronome aussi longtemps que la fusée ne les a pas rejoints (figures 1, 2 et 3).

Dès que la fusée les a rejoints, elle les entraine dans son mouvement rectiligne uniformément accéléré (figure 4).

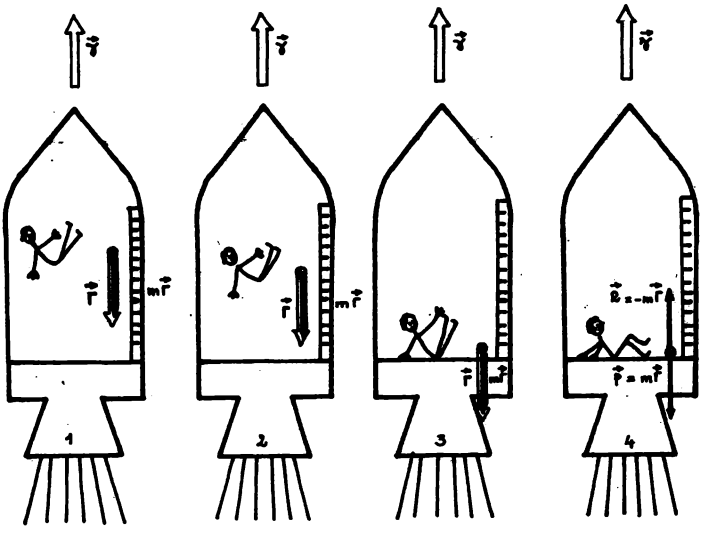
Alors que l'immobilité (fig 1 à 3) s'explique pour l'astronome par l'abscence de forces, le mouvement uniformément accéléré de la figure 4 provient de la force constante exercée par la fusée sur les objets avec lesquels elle est entrée en contact.

Par exemple, sur la bille de masse m, la fusée exerce une force $\vec{f}$ telle que : $\vec{f} = m \cdot \vec{\gamma}$

La bille n'est soumise à aucune autre force.

2/ Point de vue du cosmonaute (observateur intérieur)

Précisons bien que le cosmonaute n'ayant aucun moyen de communication avec l'extérieur ignore totalement que la fusée s'est mise en mouvement. C'est pourquoi son interprétation des phénomènes est complètement différente de celle de l'astronome.



Pour le cosmonaute, ce n'est pas la fusée qui rejoint les objets, mais les objets qui tombent vers le bas (figures 1, 2 et 3), ce qui montre que la notion de haut et de bas est apparue.

Les expériences réalisées avec la bille, la règle graduée et l'horloge démontrent que les mouvements de chute sont uniformément accélérés, d'accélération $\vec{\Gamma}$. Ces objets sont donc placés dans un champ de pesanteur de vecteur champ $\vec{\Gamma}$.

Lorsqu'ils ont atteint le sol, les objets demeurent immobiles (figure 4) sous l'action de deux forces opposées: leur poids et la réaction du sol. Par exemple, pour la bille dont la masse est m :

poids : $\vec{P} = m \cdot \vec{\Gamma}$

réaction du sol: $\vec{R} = -m \cdot \vec{\Gamma}$

En fait, si le cosmonaute croit tomber avec une accélération $\vec{\Gamma}$ "vers le bas", c'est parce que la fusée a une accélération $\vec{\gamma}$ de sens opposé. Nous pouvons donc exprimer les accélérations du cosmonaute en fonction de celle de la fusée par $\vec{\Gamma} = (-\vec{\gamma})$. Dorénavant, nous écrirons, pour exprimer le point de vue du cosmonaute :

Accélération de la pesanteur : $(-\vec{\gamma})$ γ en m/s^2

Vecteur champ de pesanteur : $(-\vec{\gamma})$ γ en N/kg

Et par suite :

Poids de la bille : $\vec{P} = m(-\vec{\gamma}) = -m\vec{\gamma}$

Réaction du sol : $\vec{R} = -m(-\vec{\gamma}) = m\vec{\gamma}$

3/Champ d'inertie. Poids d'inertie (ou force d'inertie)

Comparons les points de vue de l'astronome et du cosmonaute :

Figures I.2.3. Du point de vue de l'astronome, aucune force n'agit sur les objets, alors que du point de vue du cosmonaute ils sont soumis à leurs poids :

$$\vec{p} = - m \cdot \vec{\gamma}$$

Figures 4. Pour l'astronome, les objets sont en mouvement accéléré sous l'action de force $\vec{f} = m \cdot \vec{\gamma}$ exercées sur eux par la fusée. En revanche, pour le cosmonaute, ils sont immobiles sous l'action de forces opposées : leurs poids et la réaction de la fusée :

$$\vec{p} = - m \cdot \vec{\gamma} \quad \text{et} \quad \vec{R} = m \cdot \vec{\gamma}$$

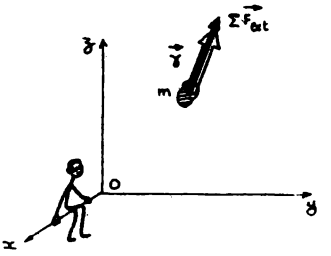
Ce qui montre que pour le cosmonaute, lié à la fusée accélérée, il existe un champ de pesanteur qui n'existe pas pour l'astronome: le champ d'inertie, de vecteur $(-\vec{\gamma})$

Nous pourrions appeler "poids d'inertie" le poids d'un objet placé dans ce champ. Mais l'appellation officielle est force d'inertie.

47 Généralisation

Sous l'action d'un ensemble de forces extérieures, $\Sigma\vec{F}_{ext}$ un système de masse m prend une accélération $\vec{\gamma}$ par rapport à un référentiel fixe (O,x,y,z). On peut envisager le problème de deux façons :

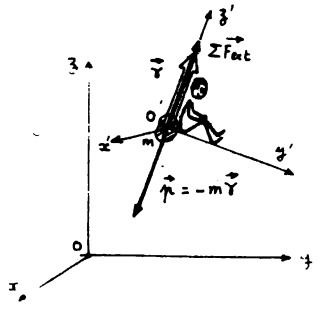
a- Observateur extérieur



Un observateur lié au référentiel fixe, donc extérieur au système accéléré explique le mouvement de ce système en appliquant la relation fondamentale de la dynamique :

$$\boxed{\Sigma\vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{\gamma}} \qquad (1)$$

b- Observateur intérieur



Soit (O',x',y',z') un référentiel associé au système et ayant le même mouvement accéléré par rapport au référentiel fixe.

Un observateur lié au référentiel accéléré, ajoute à toutes les forces envisagées par l'observateur extérieur un poids d'inertie $-m.\vec{\gamma}$, de sens contraire à celui de l'accélération du système.

Pour expliquer l'immobilité du système dans le référentiel (O',x',y',x'), il écrit :

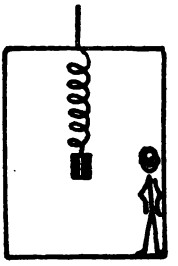
$$\boxed{\Sigma\vec{F}_{ext} + (-m \cdot \vec{\gamma}) = \vec{0}} \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) sont équivalentes mathématiquement, mais physiquement elles n'ont absolument pas même signification. La première traduit un mouvement accéléré alors que la seconde explique un état d'équilibre.

L'avantage de la seconde relation est de remplacer, dans certains cas un problème de dynamique par un problème de statique.

IV - EXEMPLES D'UTILISATION DE LA FORCE D'INERTIE

1/ L'ascenseur en mouvement accéléré



Un ressort de raideur k, chargé d'une masse m, est suspendu au plafond d'un ascenseur qui descend en ralentissant avec une accélération γ

1/ Quelle est la tension du ressort?
2/ Quel est son allongement ?
3/ Quel est le poids local d'un passager de masse M ?

Rappel sur le ressort à spires non jointives

L'allongement d'un ressort à spires non jointives est proportionnel à la force exercée à l'une de ses extrémités. Nous considérons le cas où l'une des forces exercée est le poids d'une masse suspendue à l'extrémité inférieure. On suppose alors que la masse du ressort est négligeable devant la masse suspendue.

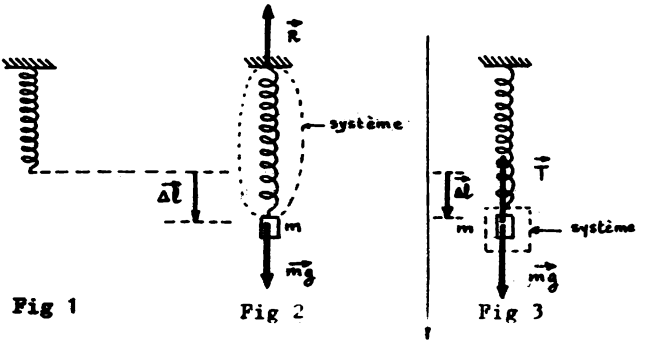


Fig 1 Fig 2 Fig 3

Figure 1 : Le ressort n'est pas chargé.

Figure 2 : Le ressort est chargé de la masse m. Le système étudié est le ressort. Les forces extérieures qui agissent sur lui sont le poids $\vec{mg}$ de la masse m et la réaction du support, $\vec{R}$, opposée à $\vec{mg}$. (Les tensions aux extrémités du ressort sont des forces intérieures non représentées).

Soit $\vec{\Delta\ell}$ l'allongement. Pour un ressort à spires non jointives :

$$\vec{mg} = k.\ \vec{\Delta\ell}$$ (k: raideur exprimée en N/m)

Figure 3 : Le système étudié est maintenant la masse m. Lorsqu'elle est en équilibre, elle est soumise à deux forces extérieures de résultante nulle :

- son poids $\vec{mg}$
  la tension $\vec{T}$ du ressort

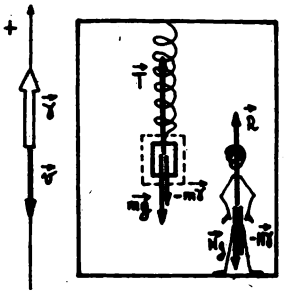
$\Rightarrow \quad \vec{mg} + \vec{T} = \vec{0}$

A l'équilibre de la masse m, la tension du ressort est donc opposée au poids de la masse m : $\vec{mg} = -\vec{T}$

Compte tenu de la relation $\vec{mg} = k.\vec{\Delta\ell}$ on peut exprimer la tension du ressort en fonction de son allongement :

$$\vec{T} = -k \, . \, \vec{\Delta\ell}$$

Réponses aux questions de l'exercice



1/ La vitesse de l'ascenseur est dirigée vers le bas et son accélération vers le haut, car il ralentit ($\gamma v < 0$). Nous orientons donc l'axe du mouvement vers le haut.

Dans tout l'exercice, nous adoptons le point de vue du passager lié à l'ascenseur accéléré.

La masse m est en équilibre. Elle est soumise :

- à son poids $\vec{mg}$ dans le champ de pesanteur terrestre;
- à son "poids d'inertie" $(-\vec{m.\gamma})$ dans le champ d'inertie de l'ascenseur accéléré. Son sens était opposé à celui de $\vec{\gamma}$, il est dirigé vers le bas, comme $\vec{mg}$;
- à la tension $\vec{T}$ du ressort.

Condition d'équilibre

$$\vec{mg} + (-m\vec{\gamma}) + \vec{T} = \vec{0}$$

Expression algébrique

$$-mg - m\,\gamma + T = 0$$

Noter que la valeur algébrique de la projection de $(-m\vec{\gamma})$ sur l'axe orienté est $-m\gamma$ conformément aux conventions du § (I,2° a). En effet, $|-m\,\vec{\gamma}| = m\gamma$. On affecte ce module du signe moins puisque la projection a le sens négatif.

La tension du ressort vaut :

$$\boxed{T = m(g + \gamma)}$$

Elle est supérieure à la tension dans l'ascenseur au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Cela tient au fait que le poids "terrestre" et le poids d'inertie ont même sens.

2/ L'allongement est proportionnel au poids total de m:

$$\vec{mg} + (-\vec{m\gamma}) = k \cdot \vec{\Delta\ell}$$

algébriquement : $-mg - m\gamma = -k \cdot \Delta\ell$ (respecter les conventions !).

soit :

$$\boxed{\Delta\ell = \frac{mg + m\gamma}{k}}$$

Dans un ascenseur en translation uniforme, l'allongement du ressort est seulement $\Delta\ell' = mg/k$.

3/ Poids du passager : c'est la somme vectorielle de deux poids de même sens :

$\vec{P} = \vec{Mg} + (-\vec{M\gamma})$. En module : $\boxed{P = Mg + M\gamma}$

Le passager "pèse plus" que dans un ascenseur en translation uniforme.

A titre d'exercice, répondre aux mêmes questions lorsque l'accélération de l'ascenseur est dirigée vers le bas (il monte en ralentissant ou il descend en accélérant. On doit trouver :

1°) $T = m(g - \gamma)$ inférieure à la tension de repos.

2°) $\Delta\ell = \frac{mg - m\gamma}{k}$ inférieur à l'allongement de repos.

3°) $P = Mg - M\gamma$ inférieur au poids de repos.

Tout cela tient au fait que le vecteur champ d'inertie et le vecteur champ de pesanteur terrestre sont de sens contraires.

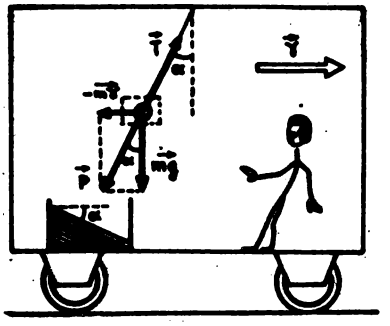
2/ Wagon en mouvement rectiligne uniformément accéléré

Un wagon se déplace en mouvement rectiligne uniformément accéléré sur une voie horizontale. Un pendule simple (masse m fixée à un fil) est suspendu au plafond.

1°) De quel angle le pendule s'incline-t-il ?

2°) Quel est le poids total de la masse m pour un passager du wagon (direction, intensité) ?
Quelle est la tension du fil ?

3°) Quel est l'angle formé par la surface d'un liquide avec le plan horizontal ?



Pour le passager, lié au système accéléré, la masse m est en équilibre sous l'action de trois forces :

- son poids dans le champ terrestre : $\vec{p} = \vec{mg}$;
- la force d'inertie dans le champ d'inertie: $(-m\,\vec{\gamma})$;
- La tension du fil : $\vec{T}$.

$$\vec{mg} + (-m\,\vec{\gamma}) + \vec{T} = \vec{0}$$

1°) Dans le wagon non accéléré, la direction du fil est celle du poids $\vec{mg}$. Dans le wagon accéléré, la direction du fil est celle du poids résultant $\vec{mg} + (-m\,\vec{\gamma})$.

Le sens de l'inclinaison est celui du poids d'inertie $(-m\vec{\gamma})$, c'est-à-dire le sens opposé à celui de l'accélération $\vec{\gamma}$ du wagon.

L'angle d'inclinaison est donné par :

$$tg\alpha = \frac{\|-m\vec{\gamma}\|}{\|\vec{mg}\|} = \frac{m\gamma}{mg}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{\gamma}{g}}$$

Pour le passager, la direction de la verticale locale est celle du fil. Il s'incline d'ailleurs spontanément suivant cette direction.

2°) Poids total : $P^2 = \|-m\vec{\gamma}\|^2 + \|\vec{mg}\|^2 = m^2(g^2 + \gamma^2)$

$$\boxed{P = m\sqrt{(g^2 + \gamma^2)}}$$

Si l'angle α a déjà été calculé on peut obtenir P par la relation :

$$P = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

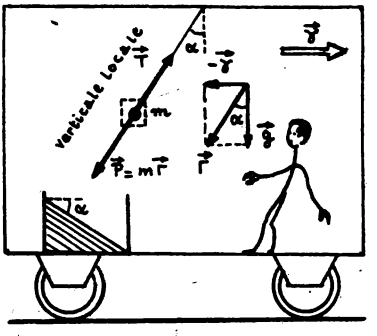
La tension est la force opposée au poids total. Elle a donc même module que lui.

3°) La surface d'un liquide est perpendiculaire à la verticale locale. Elle forme donc avec le plan horizontal l'angle α déjà déterminé.

Remarque

On peut aborder le problème de façon voisine : pour l'observateur lié, le champ de pesanteur local résulte de la superposition du champ de pesanteur terrestre, de vecteur $\vec{g}$ et du champ d'inertie, de vecteur $(-\vec{\gamma})$; son vecteur champ, qui définit la verticale locale est donc :

$$= \vec{g} + (-\vec{\gamma})$$



Son module est :

$$= \sqrt{g^2 + \gamma^2}$$

et son inclinaison par rapport à la verticale terrestre α telle que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\| \vec{\gamma} \|}{\| \vec{g} \|} = \frac{\gamma}{g}$$

Le pendule s'incline suivant cette direction.

La masse m est en équilibre sous l'action de deux forces opposées : son poids local $\vec{P} = m$ et la tension $\vec{T}$ du fil :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad m + \vec{T} = \vec{0}.$$

Le module de $\vec{P}$ est $P = m = m\sqrt{g^2 + \gamma^2}$

La surface de l'eau définit le plan horizontal local, orthogonal à la verticale locale.

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 6

I - METHODE DE RESOLUTION D'UN EXERCICE DE DYNAMIQUE DE TRANSLATION

1/ Faire un schéma en définissant le système. S'il est déformable, on le décompose en parties indéformables.

2/ Pour chaque partie indéformable, faire l'inventaire des forces extérieures et les appliquer au centre de gravité.

3/ Ecrire pour chaque partie la relation fondamentale de la dynamique vectorielle :

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \cdot \vec{\gamma}$$

4/ Projeter pour chaque partie la relation fondamentale sur les axes orientés choisis. On obtient ainsi des relations algébriques pour lesquelles on doit respecter les conventions ci-dessous.

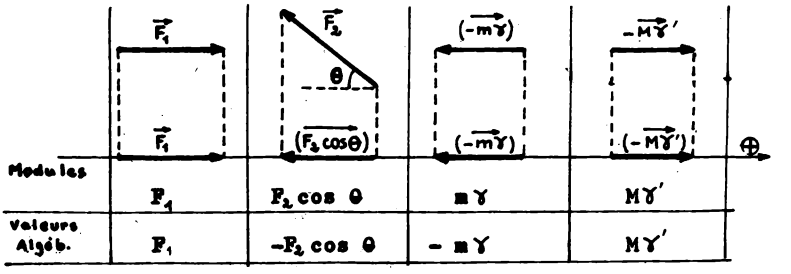
II - CONVENTIONS POUR LES VALEURS ALGEBRIQUES

a/ La valeur algébrique de la projection d'une force s'obtient en affectant son module d'un signe :

- Si la projection a le sens de l'axe orienté sa valeur algébrique est son module affecté du signe (+)

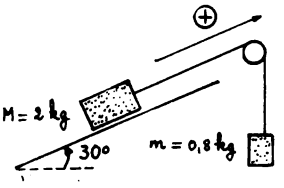
- Si la projection a le sens contraire de celui de l'axe orienté, sa valeur algébrique est son module affecté du signe (-).

Exemples



b/ On note γ_x et γ_y les valeurs algébriques des composantes de l'accélération suivant les axes Ox et Oy (ou γ si on projette sur un seul axe parallèle à $\vec{\gamma}$).Les signes de ces valeurs algébriques ne sont connus qu'après avoir effectué l'application numérique.

Exemple



Ayant fait l'hypothèse (au hasard) que l'accélération a le sens représenté, on démontre que :

$$\gamma = \frac{(-M \sin 30 + m)\, g}{M + m}$$

Numériquement : $\gamma = -0{,}70\ m/s^2$.

Conclusion :

L'accélération a le sens contraire du sens représenté.

III- LES FORCES D'INERTIE

Pour un observateur lié à un système dont l'accélération est $\vec{\gamma}$ par rapport à un référentiel fixe, il existe un champ de pesanteur appelé champ d'inertie, dont le vecteur champ $(-\vec{\gamma})$ a le sens contraire de celui de l'accélération $\vec{\gamma}$ du système.

Il en résulte que toute masse m du système est soumise dans ce champ à un "poids d'inertie"$(-m\vec{\gamma})$ de sens contraire à celui de l'accélération du système. Ce poids s'appelle traditionnellement la force d'inertie.

Ce champ d'inertie et les forces d'inertie existent pour l'observateur lié au système accéléré, mais n'existent pas pour un observateur extérieur au système accéléré.

Point de vue de l'observateur extérieur

La masse m est en mouvement accéléré sous l'action d'un ensemble de forces extérieures. Il écrit la relation fondamentale de la dynamique :

$$\boxed{\Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}}$$

Point de vue de l'observateur lié au système accéléré

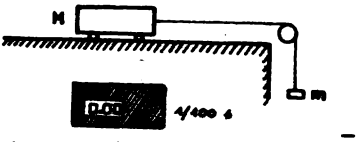
A toutes les forces énumérées par l'observateur extérieur s'ajoute la force d'inertie. Sous l'action de l'ensemble de ces forces, la masse m est en équilibre.

$$\boxed{\Sigma \vec{F}_{ext} + (-m\vec{\gamma}) = \vec{0}}$$

Chapitre 6

E X E R C I C E S

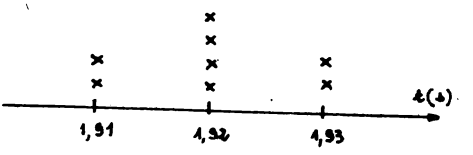
1/ On utilise au cours de cette expérience le matériel de travaux pratiques représenté ci-dessous :



- Un chariot de masse M = $2{,}000.10^{-1}$ kg ;
- Une poulie de masse négligeable ;
- Une masse m reliée au chariot par un fil de masse négligeable ;
- Une horloge électronique au 1/100 s.

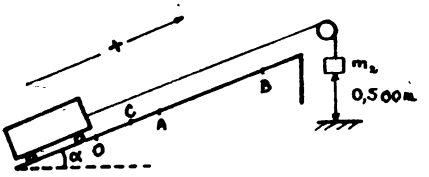
1°) Lorsque le rail sur lequel repose le chariot est horizontal, le chariot demeure au repos pour toutes les masses m suspendues inférieures à 2,9 g. Au delà de cette valeur, l'équilibre n'est plus possible. Comment peut-on expliquer l'équilibre du chariot bien qu'il soit soumis entre autres forces à la traction du fil? Calculer la valeur limite f atteinte par la force de frottement (conserver deux chiffres significatifs). L'intensité du champ de pesanteur est g = 9,80 N/kg.

2°) Le rail étant horizontal, on suspend à l'extrémité du fil une masse m_1 = 20,0 g.
a/ Le chariot démarre sans vitesse initiale. Voici les résultats de plusieurs mesures de la durée d'un parcours x = 1,400 m. Donner un encadrement de l'accélération du chariot. (Chaque mesure se traduit par une croix sur l'axe des durées).



b/ La force de frottement f est constante au cours du mouvement. Donner son expression en fonction de M, m_1, g et λ. Calculer un encadrement de f et comparer à la valeur limite de la force de frottement lorsque le chariot est au repos.

3°) On incline le rail d'un angle α comme indiqué sur la figure ci-dessous. On remplace la masse m_1 par une masse m_2 placée à 0,500 m du sol. Partant de O sans vitesse initiale, le chariot aura quatre mouvements successifs :



Un mouvement accéléré entre O et A. OA = 0,500 m. Au passage du chariot au point A, la masse m_2 atteint le sol.

- Un mouvement uniformément ralenti entre A et B avec arrêt en B.

- Un mouvement accéléré entre B et A.

- Un mouvement ralenti entre A et C avec arrêt en C. Au retour du chariot en A, le fil se tend à nouveau et la masse m_2 quitte le sol.

a/ Donner les expressions théoriques des accélérations γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 en respectant l'orientation imposée. La force de frottement a même module à la montée et à la descente, mais son sens est toujours opposé à celui de mouvement.

b/ Calculer les valeurs algébriques des accélérations. On donne :

$$\alpha = 5,0° \Longrightarrow Mg \sin\alpha = 1,70.10^{-1} \text{ N}$$

$$m_2 = 50,0g \Longrightarrow m_2 g = 4,90.10^{-1} \text{ N}$$

$$\|\vec{f}\| = 0,30.10^{-1} \text{ N}$$

4°)

a/ Calculer la distance AB parcourue au cours du second mouvement.

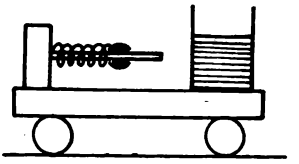
b/ Quelle est la vitesse v'_A du chariot à son retour en A juste avant que la masse m_2 quitte le sol ?

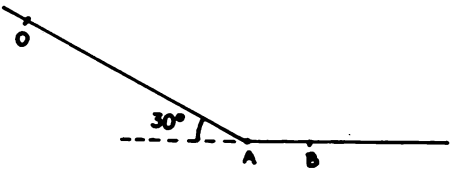
c/ Au moment du choc qui se produit lorsque le fil se tend et soulève m_2 , la vitesse du chariot passe brusquement de v'_A à v''_A . Calculer v''_A sachant que AC = -0,185 m.

2/

1°) On suspend à un ressort à spires non jointives et de masse négligeable une masse m = 500g. Le ressort s'allonge de 25,0 cm. Calculer sa raideur. Prendre g =10,0N/kg

2°) Le ressort est enfilé sur une tige parfaitement lisse et on fixe à l'une de ses extrémités une sphère de masse m' = 200g, creusée de façon à pouvoir coulisser sur la tige. Ce dispositif est monté horizontalement sur le chariot. On a également fixé sur le chariot un vase contenant de l'eau.





Le chariot part sans vitesse initiale du point O d'un plan incliné à 30° par rapport au plan horizontal. Il est soumis pendant la descente à une force de frottement égale au dixième de son poids total (chariot plus accessoires). La distance OA est égale à 2,00 m. Arrivé en A (où il passe sans choc) un dispositif de freinage non représenté sur la figure l'arrête en 40 cm. Pendant la phase de freinage, son mouvement est uniformément ralenti.

a/ En supposant que la sphère prend immédiatement sa position d'équilibre, calculer l'allongement du ressort pendant le freinage.

b/ En supposant de même que l'eau prend immédiatement sa position d'équilibre, calculer l'angle que forme sa surface avec le plan horizontal.

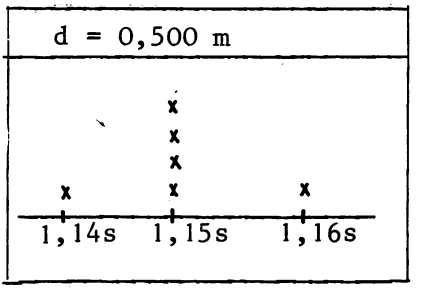
3°)Quel est l'allongement du ressort pendant le mouvement de descente entre O et A ?

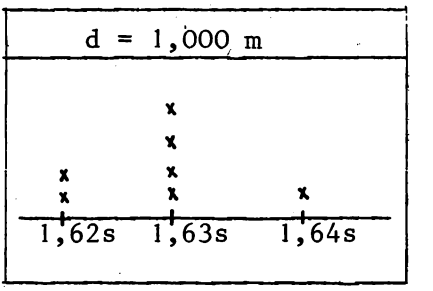
3/ A- PARTIE EXPERIMENTALE

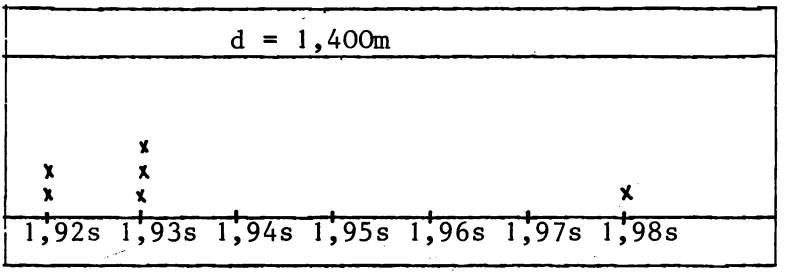
Le dispositif de travaux pratiques schématisé sur la figure ci-contre comprend un rail incliné d'un angle $\alpha = 5°$ ($\sin 5° = 8{,}72.10^{-2}$) et un chariot de masse $M = 2{,}00.10^{-1}$ kg

1°)Calculer l'accélération théorique de ce chariot en l'abscence de toute force de frottement. L'intensité du champ de pesanteur est g = 9,80 N/kg.

2°)Pour comparer ce résultat à l'accélération expérimentale, on chronomètre les durées de parcours du chariot démarrant sans vitesse initiale pour les distances suivantes :





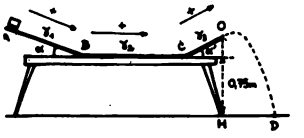


Pour chacune de ces trois expériences, où chaque croix correspond à une mesure, déterminer le domaine expérimental du rapport $\frac{2d}{t^2}$

a/ A partir de ces trois résultats, donner la valeur de l'accélération et son incertitude absolue.

b/ En raison des forces de frottement, l'accélération est inférieure à la valeur théorique calculée plus haut. Donner un encadrement de la valeur absolue de la résultante des forces de frottement.

B/ Partie Théorique



Le chariot précédent part du point A sans vitesse initiale, parcourt la section AB = d_1 = 1,400m inclinée de $\alpha = 5°$, puis la section BC = d_2 = 1,400m horizontale, puis il s'engage sur une section ascendante CD = d_3 = 0,305m inclinée de $\alpha = 10°$ (sin 10° = 0,174 et cos 10° = 0,985).

La force de frottement dont le module est supposé constant vaut $f = 0,20.10^{-4}$N.

1°) Calculer les valeurs algébriques des accélérations γ_1, γ_2, γ_3 en conservant les orientations imposées sur la figure.

2°)A quelle distance HD du bord de la table le chariot achève-t-il sa course ? La hauteur de la table est :

h = 0,75m.

4/

1°)Un train se compose d'une locomotive de 150 tonnes et de 9 voitures identiques de 50 tonnes chacune. Il démarre sur voie rectiligne et horizontale et il atteint la vitesse de 18 km/h au bout d'un parcours de 125 mètres. On suppose constante la force de traction de la locomotive ainsi que les résistances passives (forces de frottement).

Calculer l'accélération du train et le temps mis pour effectuer le parcours.

Avec la même accélération, sur quel parcours et en combien de temps le train atteindra-t-il sa vitesse normale de 90 km/h ?

2°) Les résistances au mouvement sont supposées constantes et égales à 50 N par tonne de véhicule.

Calculer l'effort de traction de la locomotive pendant la période de démarrage.

Que devient cet effort de traction quand le train roule à la vitesse constante de 90 km/h ?

3°) Les différentes voitures composant le train sont reliées entre elles par des crochets d'attelage. Chaque crochet est relié au châssis de la voiture par un ressort dont l'allongement, proportionnel à l'effort de traction est 1 centimètre pour 10 000 N.

Calculer, pendant la période de démarrage, l'allongement des ressorts reliant :

a/ La locomotive à la première voiture ;
b/ La première voiture à la deuxième ;
c/ La huitième voiture à la neuvième.

4°) La force motrice étant supprimée, le train aborde, à la vitesse de 90 km/h, une voie qui s'élève de 6 millimètres par mètre de voie.

A quelle distance le train s'arrêtera-t-il si les résistances passives conservent la valeur primitive ?
Combien de temps le train continuera-t-il à rouler ?
On prendra g = 10,0 N/kg.

(baccalauréat).

5/ Une fusée a une masse totale de 15 tonnes au départ. La masse des produits réagissant dans le moteur est 8 tonnes. La fusée consomme ces produits en 40 secondes, le débit étant constant. La poussée F exercée par le moteur est une force constante et égale à $2,00.10^5$N.

On appellera g l'accélération de la pesanteur au sol et l'on prendra g comme unité d'accélération.

1°)Si la fusée était mobile horizontalement sans frottement (sur un chariot, par exemple), quelle serait l'accélération au départ ?

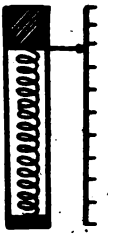
2°)Dans le cas où il serait possible de maintenir un mouvement horizontal sans frottement (on suppose dans cette question que la résistance de l'air est négligeable), calculer l'accélération en fonction du temps et représenter graphiquement cette fonction.

Echelles du graphique : 1cm pour 5 secondes et 3cm pour g (on pourra utilement tracer la courbe sur papier millimétré de façon à pouvoir faire, si besoin est, une mesure d'aire approximative).

3°)En utilisant le graphique précédent, calculer en kilomètres par heure une valeur approximative de la vitesse atteinte à la fin du fonctionnement du moteur, dans les conditions précédentes. (pour cette question, on prendra $g = 9,80\ m/s^2$).

4°) La fusée part verticalement du sol. Des mesures directes montrent qu'au bout de 20 secondes l'accélération est 0,8 g. Calculer la résistance de l'air sur le mobile à cet instant, en supposant que l'accélération de la pesanteur n'a pas sensiblement varié avec l'altitude.

5°) Dans le cas précédent, les accélérations sont mesurées à l'aide d'un ressort à boudin contenu dans un tube parallèle à l'axe de la fusée.



Sur le ressort est fixée une masselotte cylindrique munie d'un repère. Au repos, le poids du cylindre raccourcit le ressort de 1 cm.

Etablir la relation qui lie le raccourcissement x du ressort à l'accélération γ de la fusée et dessiner en vraie grandeur la graduation de l'appareil.

(baccalauréat)

Chapitre 7

LES MOUVEMENTS CIRCULAIRES

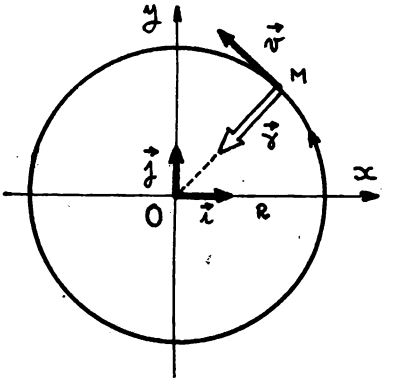
I - L'ETUDE CINEMATIQUE DU MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

1°) Définition.

Le mouvement circulaire uniforme est celui d'un point qui se déplace sur un cercle avec une vitesse constante en module.

2°) L'accélération du mobile

O est le centre de la trajectoire et R son rayon. Le mouvement est rapporté au repère orthonormé $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

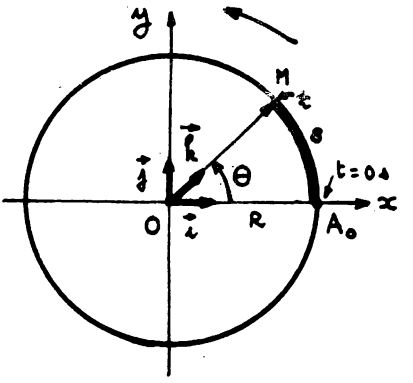


Le mobile étant en mouvement curviligne possede une accélération dirigée dans la concavité de la trajectoire. Puisque seule la direction de la vitesse varie, l'accélération est normale à la trajectoire. Plus précisément, la trajectoire étant circulaire, l'accélération est centripète, c'est-à-dire dirigée vers le centre O.

3°) Les grandeurs angulaires.

a/ L'élongation angulaire

La trajectoire étant orientée et munie d'une origine des arcs A_o, on peut repérer la position du mobile par l'arc $\overset{\frown}{A_oM} = s$, appelé abscisse curviligne du point M.



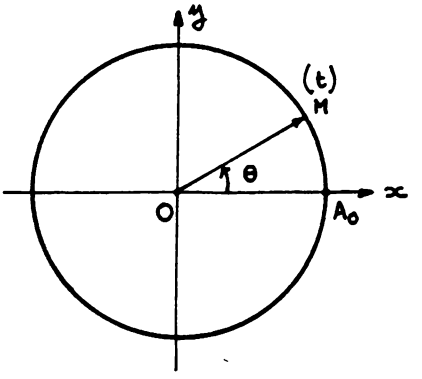
On peut également le repérer par l'angle polaire de son vecteur espace $\overrightarrow{OM}$:

$$\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$$

Nous convenons d'appeler élongation angulaire l'angle polaire θ.

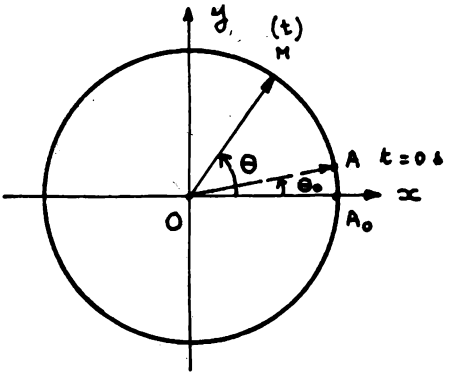
b/ L'équation horaire du mouvement.

L'élongation angulaire est un fonction du temps. Par définition, le mouvement est circulaire uniforme si cette fonction est du premier degré du temps.



Si l'élongation angulaire est nulle à l'instant t= 0s l'équation horaire est:

$$\theta = \omega t$$



Si l'élongation angulaire initiale est θ_o, l'équation horaire est:

$$\theta = \omega t + \theta_o$$

L'élongation angulaire s'exprime en radians (rd).

est un coefficient constant dont nous allons donner la signification au paragraphe c.

c/ La vitesse angulaire.

Par définition, la vitesse angulaire est la dérivée par rapport au temps de l'élongation angulaire. C'est donc:

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \omega .$$

Le coefficient constant de l'équation horaire est donc la vitesse angulaire du mobile.

La vitesse angulaire d'un mobile en mouvement circulaire uniforme est constante.

Elle s'exprime en radians par seconde (rd/s).

d/ L'accélération angulaire.

C'est la grandeur qui caractérise les variations de la vitesse angulaire dans le temps. Par définition, c'est la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire. C'est donc la dérivée seconde par rapport au temps de l'élongation angulaire.

$$\theta'' = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

L'accélération angulaire d'un mouvement circulaire uniforme est nulle puisque la vitesse angulaire est constante.

4°) Une relation entre la vitesse et la vitesse angulaire

L'abscisse curviligne $s = \overset{\frown}{A_oM}$ et l'angle polaire θ sont liés par :

$s = R.\theta$ (s : en mètres si R en mètres et θ en radians)

Dérivons cette relation par rapport au temps:

$$\frac{ds}{dt} = R. \frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{ds}{dt}$, dérivée par rapport au temps de l'abscisse curviligne est le module de la vitesse du mobile.

$\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire du mobile. Ces deux grandeurs sont donc liées par:

$$\boxed{v = R.\theta' = R.\omega}$$

5°) Expressions de l'accélération normale.

Dans l'exercice 1, avec solution abrégée de ce chapitre on montre que l'accélération du mouvement circulaire uniforme est centripète et on établit l'expression de son module.

Dans ce paragraphe, nous admettrons que:

L'accélération d'un mobile en mouvement circulaire uniforme est portée par la normale à la trajectoire et a pour module:

$$\gamma = \frac{v^2}{R}$$

En remplaçant dans l'expression précédente v par $R\omega$, on obtient une seconde expression de l'accélération:

$$\gamma = \frac{R^2\omega^2}{R} = R.\omega^2$$

$$\boxed{\gamma = \frac{v^2}{R} = R.\omega^2}$$

6°) Période et fréquence du mouvement.

Après chaque révolution, le mobile repasse périodiquement par les mêmes points de sa trajectoire. C'est pourquoi on qualifie de périodique le mouvement circulaire uniforme.

La durée d'une révolution est la période T du mouvement

Dans l'équation horaire $\theta = \omega t$, écrivons que lorsque l'angle polaire θ est égal à 2π , la durée t est la période T :

$$2\pi = \omega T$$

La période vaut donc :

$$T = \frac{2\Pi}{\omega}$$

ω en rd/s
T en secondes.

La fréquence est le nombre de périodes du mouvement en une seconde. Par exemple, si la période du mouvement est 1/10s, le mobile effectue 10 révolutions chaque seconde; si la période est 1/100s, il effectue 100 révolutions chaque seconde.

La fréquence est donc l'inverse de la période :

$$N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\Pi}$$

On l'exprime en s^{-1} ou Hertz, dont l'abréviation est Hz.

II--LE MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORMEMENT VARIE

1°) Définition

Un mobile est animé d'un mouvement circulaire uniformément varié si son accélération angulaire est constante.

2°) Les équations du mouvement

On procède comme pour les mouvements rectilignes: partant de $\theta'' = Cte$, une primitive par rapport au temps donne la vitesse angulaire :

$\theta' = \theta''t + \theta'_o$ $\quad$ θ'_o est la vitesse angulaire initiale.

Une seconde primitive donne l'équation horaire :

$\theta = \frac{1}{2}\theta''t^2 + \theta'_o t + \theta_o$ $\quad$ θ_o est l'élongation angulaire initiale.

En éliminant t entre ces deux relations, on obtient :

$$\theta'^2 - \theta'^2_o = 2\theta''(\theta - \theta_o)$$

Equations du mouvement circulaire uniformément varié

$$\begin{aligned} \theta &= \tfrac{1}{2}\theta'' t^2 + \theta'_o t + \theta_o \\ \theta' &= \theta'' t + \theta'_o \\ \theta'^2 - \theta'^2_o &= 2\theta''(\theta - \theta_o) \end{aligned}$$

$(\theta' = \omega)$

On a intérêt à faire un parallèle avec les équations

du mouvement rectiligne uniformément varié (voir "l'essentiel" de ce chapitre).

3°) Une relation entre l'accélération tangentielle et l'accélération angulaire

En dérivant une première fois par rapport au temps la relation : $s = R\theta$

Nous avons obtenu : $v = R\,\theta'$

Dérivons une seconde fois par rapport au temps :

$$\frac{dv}{dt} = R\,\frac{d\theta'}{dt} = R\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\frac{dv}{dt}$, dérivée par rapport au temps du module de la vitesse, est l'accélération tangentielle du mobile.

Nous écrirons donc : $\gamma_T = R\theta''$

Regroupons les trois relations :

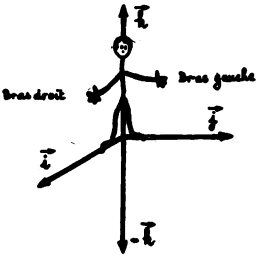
$s = R\theta$	s en m ; R en m ; θ en rd
$v = R\theta'$	v en m/s; R en m ; θ' en r/s
$\gamma_T = R\theta''$	γ_T en m/s^2, R en m ; θ'' en rd/s

Elles s'appliquent à tous les mouvements circulaires. Pour le mouvement circulaire uniforme l'accélération tangentielle et l'accélération angulaire sont nulles.

4°) Représentation vectorielle des grandeurs angulaires

Introduction : orientation dans l'espace du système de référence.

Base directe ; Base inverse

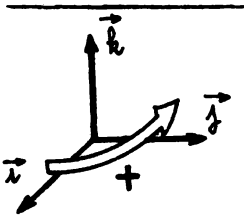


Soient deux bases orthonormées $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $(\vec{i},\vec{j},-\vec{k})$, la seconde étant déduite de la première en changeant $\vec{k}$ en $-\vec{k}$.

La base est de sens directe si un observateur plaçant son bras droit suivant $\vec{i}$ et son bras gauche suivant $\vec{j}$, voit le vecteur $\vec{k}$ dirigé des pieds vers la tête.

La base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est directe. La base $(\vec{i},\vec{j},-\vec{k})$ est inverse.

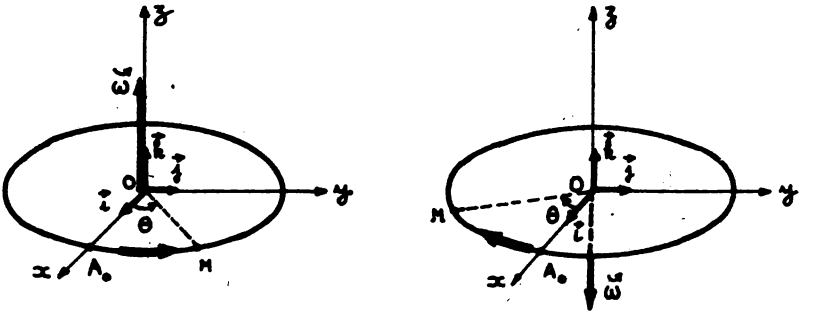
Sens de rotation positif



$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ étant une base directe, une rotation autour de $\vec{k}$ est directe ou positive si elle s'effectue de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$.

Elle est inverse ou négative si elle s'effectue de $\vec{j}$ vers $\vec{i}$.

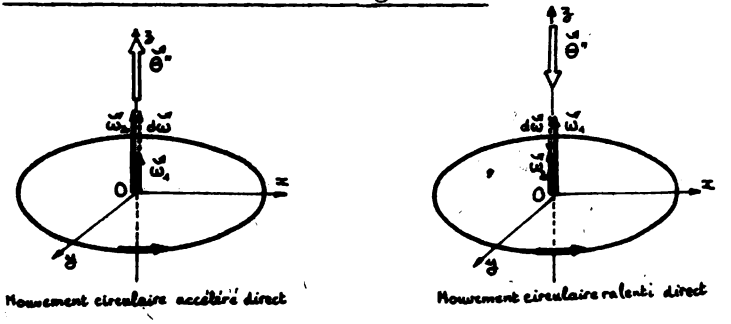
a/ Le vecteur vitesse angulaire



xOy est le plan de la trajectoire circulaire et Oz est l'axe de rotation.

On représente la vitesse angulaire par un vecteur porté par l'axe Oz, de même sens que le vecteur $\vec{k}$ si la rotation a lieu dans le sens direct et de sens contraire à celui de $\vec{k}$ si la rotation a lieu dans le sens inverse.

b/ Vecteur accélération angulaire



Le vecteur accélération angulaire est le vecteur $\vec{\theta}'' = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$, de même direction que celle de $\vec{\omega}$.

Son sens est le même que celui de $\vec{\omega}$ si le mouvement est circulaire accéléré, c'est-à-dire si $\|\vec{\omega}\|$ est croissant;

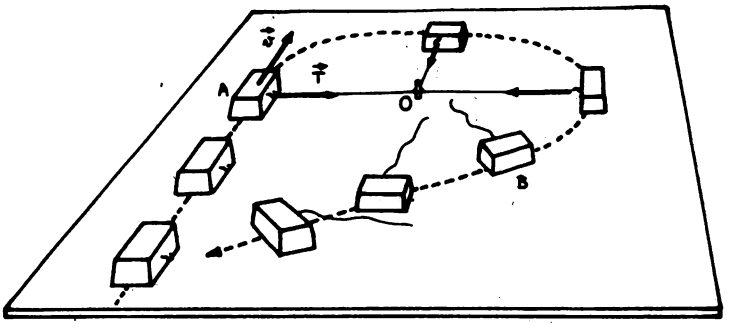
Son sens est contraire à celui de $\vec{\omega}$ si le mouvement est circulaire ralenti, c'est-à-dire si $\|\vec{\omega}\|$ est décroissant;

Dans tous les cas, si ω et θ'' sont les valeurs algébriques de la vitesse angulaire et de l'accélération angulaire :

Mouvement circulaire accéléré $\Longleftrightarrow$ $\omega . \theta'' > 0$
Mouvement circulaire ralenti $\Longleftrightarrow$ $\omega . \theta'' < 0$

III- L'ETUDE DYNAMIQUE DU MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

1°) La force centripète



Un solide glisse sur un plan horizontal parfaitement lisse. Il est soumis à 2 forces extérieures, son poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ du support (non représentées sur la figure), telles que :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

Son mouvement est donc rectiligne uniforme (principe d'inertie).

Supposons qu'à un instant donné, lorsqu'il passe en A on le relie à l'extrémité d'un fil dont l'autre extrémité est fixée au point O du plan.

Peut-on prévoir la nature du mouvement à partir de cet instant ?

Quelles forces sont responsables de ce mouvement ?

Le fil maintient le centre de gravité à distance constante du point O. Sa trajectoire est donc un arc de cercle. Le rôle du fil est de modifier la direction de la vitesse, mais il est sans influence sur son intensité. Le centre de gravité se déplace donc en mouvement circulaire uniforme.

Aux forces extérieures précédentes, il faut maintenant ajouter la tension du fil. On a :

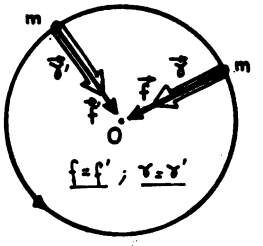
$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{T} \text{ , car } \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

La somme des forces extérieures se réduit à la tension $\vec{T}$, dirigée vers le centre de la trajectoire et que l'on appelle pour cet raison force centripète.

Si le fil vient à casser, au passage en B, la tension disparaît et le centre de gravité du mobile reprend un mouvement rectiligne uniforme.

2°) Expression de la force centripète

Soit un point matériel de masse m en mouvement circulaire uniforme. Nous allons retrouver par un raisonnement théorique la force centripète responsable du mouvement et donner son expression.



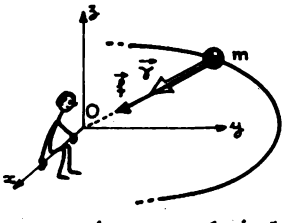
L'accélération du mouvement circulaire uniforme est centripète et a pour intensité :

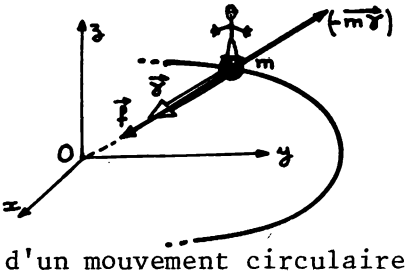
$$\gamma = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

La force qui crée cette accélération a même direction et sens que $\vec{f} = m\vec{\gamma}$. Elle est donc centripète et a pour intensité :

$$f = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

3°) La force d'inertie centrifuge





Un point matériel est animé d'un mouvement circulaire uniforme dans le référentiel fixe (O,x,y,z). Un observateur de ce référentiel explique le mouvement du point par une force centripète :

$$f = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R$$

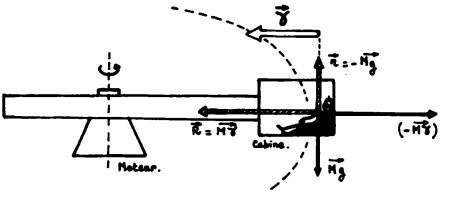
Pour un observateur lié au point et possédant la même accélération que lui, il existe en plus de la force $\vec{f}$ une force d'inertie $(-m\vec{\gamma})$ de sens opposé à celui de l'accélération du point, donc centrifuge (mot à mot : qui fuit le centre).

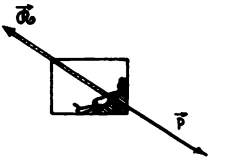
Sous l'action de ces deux forces, le point est immobile. La condition d'équilibre s'écrit :

$$\vec{f} + (-m\vec{\gamma}) = \vec{0}$$

4°) Cosmonaute en centrifugeuse et cosmonaute en orbite "circum-terrestre"

Nous allons donner deux exemples confirmant le caractère de poids de la force d'inertie.





La centrifugeuse schématisée ci-dessus est destinée à l'entrainement des cosmonautes. Elle tourne avec un vitesse angulaire constante et une accélération centripète. Dans la cabine, le cosmonaute se considère comme immobile. D'après lui, les forces auxquelles il est soumis sont :

- son poids $\vec{Mg}$ dans le champ de pesanteur terrestre ;
- la réaction de la cabine $\vec{r} = -\vec{Mg}$, opposée au poids terrestre.
- La force d'inertie centrifuge $(-\vec{M\gamma})$ qui plaque le cosmonaute contre une paroi de la cabine ;
- la réaction de cette paroi $\vec{R} = \vec{M\gamma}$. Elle est centripète.

(Notons que pour un observateur extérieur la force d'inertie centrifuge n'existe pas et que la force centripète $\vec{M\gamma}$ n'est pas une réaction exercée par la cabine, mais la force centripète qui permet au cosmonaute d'être en mouvement circulaire uniforme).

La condition d'équilibre s'écrit :

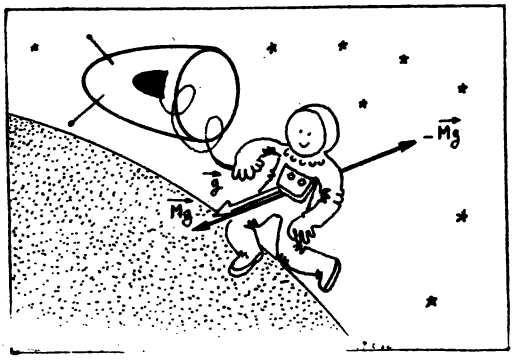
$$\underbrace{\vec{Mg} + (-\vec{M\gamma})}_{\vec{P}} + \underbrace{\vec{r} + \vec{R}}_{\vec{\omega}} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{\omega} = \vec{0}$$

Le poids total est la somme vectorielle des poids terrestre et d'inertie. La réaction totale est la somme vectorielle des réactions.

Bien que les poids et les réactions aient une résultante nulle, le cosmonaute les ressent avec une sensation d'écrasement d'autant plus pénible que la vitesse angulaire de la centrifugeuse est plus grande. Parce que ces forces ne sont pas de même nature :

- les poids s'appliquent en chaque point du corps ;
- les réactions s'appliquent uniquement aux points de contact du corps avec [illegible].



Le second exemple est celui d'un cosmonaute en satellite artificiel placé en orbite circulaire à l'altitude h.

On peut calculer l'intensité du champ de pesanteur terrestre à cette altitude :

Au sol : $g_o = \frac{\mathcal{G}M}{R^2}$ (M : masse de la Terre ; R: son rayon).

A l'altitude h, c'est-à-dire à la distance R + h du centre :

$$g = \frac{\mathcal{G}M}{(R + h)^2}$$

Effectuons le rapport : $\frac{g}{g_o} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$ D'où : $g = g_o \left(\frac{R}{R + h}\right)^2$

Supposons h = 300 km. Avec R = 6 400 km et g_o=9,80N/kg, on calcule g = 8,94 N/kg. On a donc tort de prétendre assez fréquemment que la pesanteur n'existe plus au-delà de l'atmosphère (vers 200 km d'altitude, l'atmosphère, extrêmement raréfiée, permet aux satellites de graviter sans perturber leur trajectoire de façon appréciable).

• Pour un observateur terrestre, le cosmonaute en mouvement circulaire uniforme est soumis à une seule force centripète :

son poids $\vec{p} = M\vec{g}$

Son accélération centripète est précisément l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ à l'altitude h.

• Pour expliquer son immobilité par rapport à la cabine, le cosmonaute considère deux forces :

- son poids $\vec{p} = M\vec{g}$ dans le champ de pesanteur terrestre;
- son poids d'inertie $(-M\vec{g})$ dû à l'accélération $\vec{g}$ de son référentiel.

La condition d'équilibre : $M\vec{g} + (-M\vec{g}) = \vec{0}$

Bien que, comme dans l'exemple précédent, le cosmonaute soit soumis à un ensemble de forces de résultante nulle, la situation pour lui est totalement différente : les forces sont de même nature : ce sont des poids. La résultante des poids est donc nulle et le cosmonaute est en état d'apesanteur.

IV -EXEMPLES D'EXERCICES

Conseils pour la résolution des exercices

- Faire un schéma du dispositif. Isoler le système dont on étudie le mouvement. Faire figurer l'accélération centripète.

- Choisir l'un des [illegible] observateur extérieur ou observateur intérieur lié).

1- Si l'on a choisi le point de vue de l'observateur extérieur, le système est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est centripète, comme l'accélération.

2- Si l'on a choisi le point de vue de l'observateur lié, le système est soumis en plus des forces précédentes à la force d'inertie centrifuge. La résultante de toutes les forces est nulle et le système est en équilibre.

1/ Le pendule conique

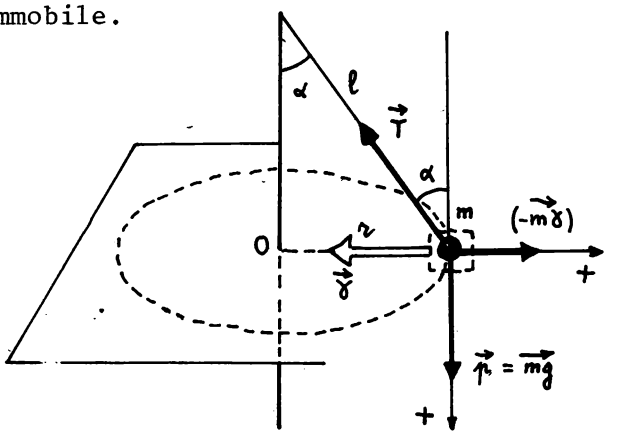
Une petite bille, de masse m, est suspendue par un fil de longueur ℓ et de masse négligeable à un axe vertical en rotation uniforme. Ce dispositif constitue un pendule conique.

1°) Exprimer la tension du fil pour une vitesse angulaire ω.

2°) Quelle est l'inclinaison du pendule ?

3°) A partir de quelle vitesse angulaire ω_0 le pendule se soulève-t-il ?

Nous résoudrons l'exercice en adoptant le point de vue d'un observateur lié à la bille et qui la considère comme immobile.



1°) La bille est en équilibre sous l'action de trois forces :

- son poids $\vec{p} = \vec{mg}$;
- la force d'inertie centrifuge $(-\vec{m\gamma})$;
- la tension $\vec{T}$ du fil.

Ecrivons la condition d'équilibre relatif :

$$\vec{mg} + (-\vec{m\gamma}) + \vec{T} = \vec{0}$$

Projetons cette relation sur l'axe horizontal passant par la bille :

$$m\gamma - T \sin\alpha = 0$$

Le rayon de la trajectoire est $r = \ell \sin\alpha$ et l'accélération $\gamma = \omega^2 r = \omega^2 \ell \sin\alpha$

$$m\omega^2 \ell \sin\alpha - T \sin\alpha = 0$$

$$\boxed{T = m\omega^2 \ell}$$

2°) Projetons la condition d'équilibre sur l'axe vertical passant par la bille :

$$mg - T \cos\alpha = 0$$

d'où $\cos\alpha = \frac{mg}{T}$. Si nous remplaçons T par son expression établie précédemment, nous obtenons :

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 \ell}$$

3°) Cette relation n'a de sens que si $\cos\alpha \leqslant 1$, c'est-à-dire si :

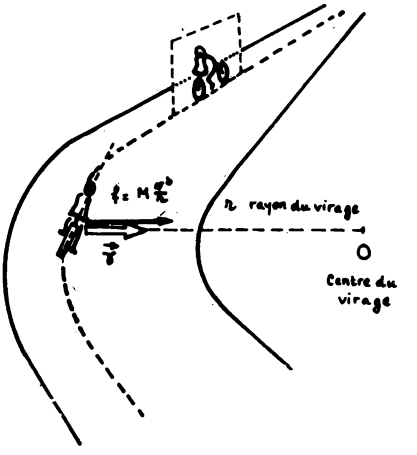
$$\frac{g}{\omega^2 \ell} \leqslant 1 \quad \text{ou encore si} \quad \omega^2 \geqslant \frac{g}{\ell}$$

Il y a donc une vitesse angulaire limite ω_0 au-dessous de laquelle le pendule ne peut pas se soulever. Sa valeur est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

2/ Le cycliste dans un virage

Quand un cycliste est en translation rectiligne uniforme sur une route horizontale, la résultante des forces auxquelles il est soumis est nulle (principe d'inertie).



S'il prend un virage à vitesse constante, il possède une accélération centripète. La résultante des forces auxquelles il est soumis est également centripète. De plus, nous savons par expérience que le cycliste et sa machine sont inclinés vers l'intérieur du virage.

Supposons la route parfaitement lisse. Le système formé par le cycliste et sa machine est soumis à deux

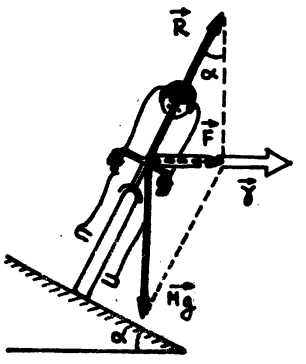
forces de résultante nulle :

- Le poids $\vec{Mg}$
- La réaction $\vec{R}$ de la route perpendiculaire à la route:

$$\vec{Mg} + \vec{R} = \vec{0}$$

Le mouvement est rectiligne uniforme. Le virage est donc impossible. Pour que la résultante des forces soit centripète, il faut que la réaction $\vec{R}$ soit inclinée. Sur une route parfaitement lisse cette condition n'est possible que si la route elle même est inclinée, c'est-à-dire si le virage est "relevé".

•Virage sur une route sans frottements, inclinée.



Nous nous proposons de déterminer quelle doit être l'inclinaison de la route pour que le cycliste prenne un virage avec une vitesse de module v. Nous adoptons le point de vue d'un observateur extérieur.

Le système cycliste+bicyclette est soumis à deux forces extérieures :

- Le poids $\vec{P} = \vec{Mg}$
- La réaction de la route $\vec{R}$, perpendiculaire au plan de la route.

La résultante de ces deux forces est la force centripète $\vec{F}$ qui permet au cycliste de prendre son virage.

La route est inclinée d'un angle α par rapport au plan horizontal et le cycliste dont la direction est orthogonale à la route est incliné du même angle α par rapport à la direction verticale. Cet angle est donné par :

$tg\alpha = \frac{F}{Mg}$. Soit r le rayon du virage. La relation fondamentale s'écrit :

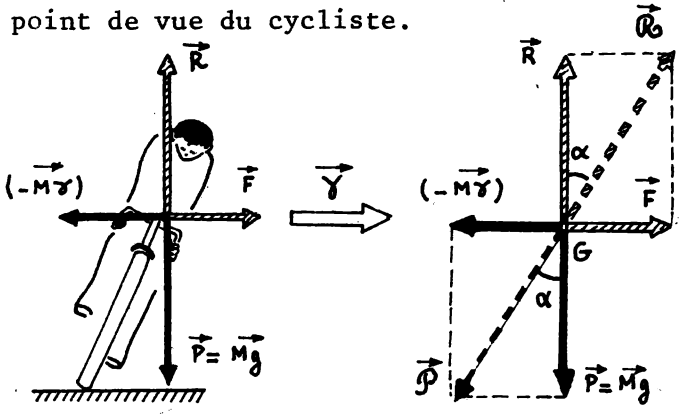
$F = M\gamma = M\frac{v^2}{r}$. Portons cette valeur de F dans l'expression de $tg\alpha$:

$$tg\alpha = \frac{\frac{Mv^2}{r}}{Mg} = \frac{v^2}{r.g}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{v^2}{r.g}}$$

•Virage sur une route horizontale avec frottements

Dans la pratique, les routes ne sont pas parfaitement lisses, heureusement. Et les virages sont rarement relevés. Considérons donc une route horizontale réelle et adoptons le point de vue du cycliste.



Quatre forces s'exercent sur le système formé du cycliste et de sa bicyclette. Pour simplifier, nous les appliquons au centre de gravité :

- le poids $\vec{P} = \vec{Mg}$ dans le champ de pesanteur terrestre;
- la réaction $\vec{R}$ de la route à ce poids;
- la force d'inertie centrifuge, due à l'accélération centripète du système ;
- la réaction tangentielle de la route : elle est opposée à la force d'inertie centrifuge. C'est la force de frottement $\vec{F}$ centripète. La résultante de ces forces est nulle :

$$\underbrace{\vec{P} + (-\vec{M\gamma})}_{\vec{\mathcal{P}}} + \underbrace{\vec{R} + \vec{F}}_{\vec{\mathcal{R}}} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathcal{P}} + \vec{\mathcal{R}} = \vec{0}$$

La résultante $\vec{\mathcal{P}}$ du poids terrestre et du poids d'inertie est le poids total du système. C'est une force inclinée par rapport à la verticale terrestre, ce qui explique qu'on ne peut pas prendre un virage à bicyclette (ou même à la course à pied) sans être incliné vers l'intérieur du virage.

On appelle réaction de la route la somme vectorielle des réactions normale (opposée au poids terrestre) et tangentielle (force de frottement opposée à la force d'inertie). La réaction de la route $\vec{\mathcal{R}}$ est donc inclinée.

Si la force de frottement est soudainement réduite, à cause d'une flaque d'huile par exemple, elle n'équilibre plus la force d'inertie centrifuge et c'est le déra-

page vers l'extérieur du virage.

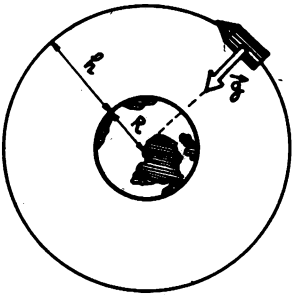
Pour déterminer l'angle d'inclination, on procède comme plus haut et on trouve :

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{r.g}}$$

L'inclinaison ne dépend pas de la masse du système. Elle ne dépend que de la vitesse et du rayon du virage.

3°) La satellite artificiel

On se propose de déterminer la vitesse d'un satellite artificiel lorsqu'il gravite à l'altitude h en orbite circulaire. On en déduira la période du satellite, c'est-à-dire la durée d'une révolution.



L'accélération centripète du satellite est l'accélération de la pesanteur g à l'altitude h.

L'accélération centripète est de la forme $\gamma = \frac{v^2}{r}$. Ici $\gamma = g$ et $r = R + h$

On a donc :

$$g = \frac{v^2}{R + h}$$

On en déduit la vitesse du satellite:

$$v = \sqrt{g(R + h)}$$

Déterminons g à l'altitude h en fonction de g_o au sol. Rappelons que $g_o = \frac{\varepsilon M}{R^2}$ et $g = \frac{\varepsilon M}{(R+h)^2}$. Partant de ces deux relations on obtient :

$g = g_o \frac{R^2}{(R+h)^2}$. Portons dans l'expression de v:

$$v = \sqrt{g_o \frac{R^2}{(R+h)^2}(R+h)}$$

Finalement : $\boxed{v = R\sqrt{\frac{g_o}{R + h}}}$

Exemples numériques

En prenant R = 6 400 km et $g_o = 9{,}80$ m/s², on peut cal-

culer les vitesses du satellite à 300 km d'altitude et à 36 000 km. On trouve respectivement :

$v = 7{,}75 \cdot 10^3$ m/s ou 28 000 km/h et

$v' = 3{,}08 \cdot 10^3$ m/s ou 11000 km/h.

Première vitesse cosmique

C'est la vitesse qu'il faudrait donner a un satellite artificiel pour le placer en orbite au niveau du sol. Ce qui ne serait possible que si la Terre était une sphère parfaite dépourvue d'atmosphère.

Dans la première expression de v, posons $g = g_o$ et $h = 0$. On obtient :

$v = \sqrt{R \cdot g_o}$. Numériquement : $v = 7{,}90 \cdot 10^3$ m/s.

Aucun satellite ne peut être placé en orbite si sa fusée porteuse n'a pas au moins atteint au cours du lancement la première vitesse cosmique :

$$v = 7{,}90 \text{ km/s}$$

Seconde vitesse cosmique

Une sonde spatiale ne peut se libérer du champ de pesanteur terrestre, pour aller vers une autre planète, si sa fusée porteuse n'a pas au moins atteint la seconde vitesse cosmique, de l'ordre de 11 km/s. (vitesse établie à partir de considérations énergétiques. Voir exercice page 29[illegible].

Durée d'une révolution

C'est la période du satellite : $T = \frac{2\Pi}{\omega}$ avec $\omega = \frac{v}{R+h}$

D'où $T = \frac{2\Pi(R + h)}{v}$. En remplaçant v par son expression établie ci-dessus, on obtient :

$$T = 2\Pi(R+h) \frac{\sqrt{R + h}}{R \sqrt{g_o}}$$

Exemples numériques

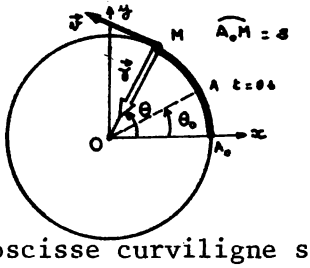
Pour h = 300 km, on trouve T = 5400 s soit 1 heure et trente minutes. Pour h = 36 000 km on trouve 86 600 s soit sensiblement 24 heures. Un satellite placé en orbite circulaire au dessus de l'équateur à cette altitude a une durée de révolution égale à celle de la Terre. Il est donc immobile par rapport à elle : c'est un satellite géostationnaire.

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 7

I - ETUDE CINEMATIQUE DU MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

1/ Définition

> Le mouvement circulaire uniforme est celui d'un point qui se déplace sur un cercle avec une vitesse constante en module.



L'accélération du mobile est centripète et s'exprime par :

$$\gamma = \frac{v^2}{R} \quad \text{ou} \quad \gamma = \omega^2 R$$

Le mobile est repéré soit par son abscisse curviligne $s = \widehat{A_oM}$, soit par l'angle polaire de son vecteur espace: $\theta = (\vec{i}, \vec{OM})$ que l'on appelle élongation angulaire.

2/ Equation horaire. Période. Fréquence

L'équation horaire d'un mouvement circulaire uniforme est une fonction du premier degré du temps : $\theta = \omega t + \theta_o$

ω est la vitesse angulaire constante du mobile, exprimée en rd/s.

La période est la durée d'une révolution

$$T = \frac{2\Pi}{\omega}$$

La fréquence est le nombre de périodes par seconde. C'est l'inverse de la période :

$$N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\Pi}$$

Elle s'exprime en Hertz (Hz).

3/ Vitesse angulaire ; accélération angulaire.

La vitesse angulaire est la dérivée par rapport au temps de l'élongation angulaire. Elle est constante.

L'accélération angulaire est la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire. C'est donc la dérivée seconde par rapport au temps de l'élongation angulaire. Elle est nulle puisque la vitesse angulaire est constante.

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \omega \text{ (rd/s)} \qquad \theta'' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ (rd/s}^2\text{)}$$

$$\theta'' = 0.$$

4/ Relation entre grandeurs linéaires et angulaires

L'abscisse curviligne est liée à l'élongation angulaire par :

$s = R \cdot \theta$ (s en mètres, R en mètres, θ en radians.)

En dérivant deux fois par rapport au temps on obtient deux nouvelles relations :

Abscisse curviligne	$s = R\theta$	Elongation angulaire
Vitesse linéaire	$v = R\theta'$	Vitesse angulaire
Accélération tangentielle	$\gamma_T = R\theta''$	Accélération angulaire

La troisième relation s'applique à des mouvements circulaires quelconques. Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération tangentielle et l'accélération angulaire sont nulles.

II- LE MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORMEMENT VARIE

1/ Définition

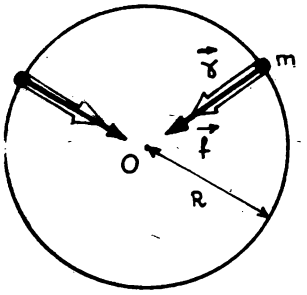
Un mobile est en mouvement circulaire uniformément varié si sa trajectoire est circulaire et si son accélération angulaire est constante.

2/ Equations du mouvement. Parallèle avec le mouvement rectiligne

Mouvement rectiligne uniformément varié.	Mouvement curviligne uniformément varié.
$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_o t + x_o$	$\theta = \frac{1}{2}\theta'' t^2 + \theta'_o t + \theta_o$
$v = \gamma t + v_o$	$\theta' = \theta'' t + \theta'$
$v^2 - v_o^2 = 2\gamma(x - x_o)$	$\theta'^2 - \theta'^2_o = 2\theta''(\theta - \theta_o)$

III- ETUDE DYNAMIQUE DU MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

1/ La force centripète

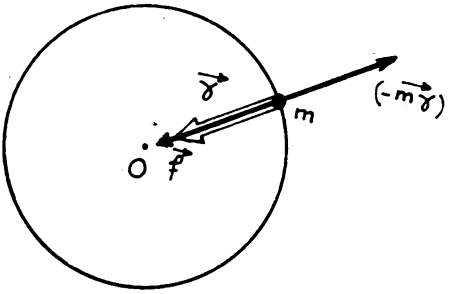


L'accélération centripète est communiquée au mobile par une force centripète :

$$f = m\gamma = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

2/ La force d'inertie centrifuge

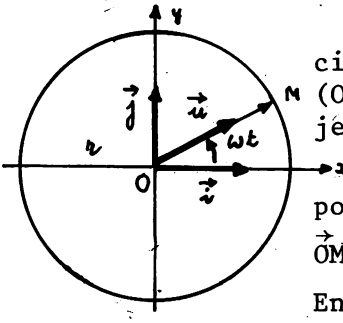
Pour un observateur lié au mobile en mouvement circulaire uniforme, il existe un champ d'inertie dont le vecteur champ $(-\vec{\gamma})$ a le sens opposé à celui de l'accélération. Il est donc centrifuge. Il en résulte que toute masse m est soumise à une force d'inertie centrifuge $(-m\vec{\gamma})$.



Chapitre 7

EXERCICES

1/ Exercice avec solution abrégée



Une particule est en mouvement circulaire uniforme dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. O est le centre de la trajectoire et r son rayon.

$\vec{u}(t)$ étant le vecteur unitaire porté par le vecteur espace, on a :

$\vec{OM}(t) = r.\vec{u}(t) = r[\cos \omega t.\vec{i} + \sin \omega t.\vec{j}]$

En déduire :

1°) L'expression de la vitesse $\vec{v}(t)$ et son module.

2°) L'expression de l'accélération $\vec{\gamma}(t)$, sa direction, son sens et son module.

Solution :

$$\vec{v}(t) = \frac{d(\vec{OM})}{dt} = r\left[\frac{d}{dt}(\cos \omega t)\,\vec{i} + \frac{d}{dt}(\sin \omega t)\,\vec{j}\right]$$

$$\vec{v}(t) = r\left[-\omega \sin \omega t.\vec{i} + \omega \cos \omega t.\vec{j}\right] = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Valeur absolue de la vitesse : $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \omega^2 r^2$

$$\boxed{v = \omega r}$$

Accélération :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = r.\left[-\omega^2 \cos \omega t.\vec{i} - \omega^2 \sin \omega t.\vec{j}\right]$$

$$\vec{\gamma}(t) = -r\omega^2\left[\cos \omega t.\vec{i} + \sin \omega t.\vec{j}\right] = -r\omega^2.\vec{u}(t).$$

L'accélération a donc le sens contraire de celui du vecteur $\vec{u}$. Elle est centripète. Son module est $\gamma = \omega^2 r$. Compte tenu de $\omega = \frac{v}{r}$ établi à la question précédente, on retrouve les deux expressions :

$$\boxed{\gamma = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

2/ Convertir en unités internationales les vitesses angu-

laires suivantes : 50 tours par seconde ; 120 tours par minute.

3/ Un cosmonaute subit un entrainement dans une centrifugeuse. Son fauteuil est fixé à 10 mètres de l'axe de rotation et tourne à la vitesse angulaire de 2rd/s. Exprimer l'intensité de son champ de pesanteur g' en prenant pour unité l'intensité du champ de pesanteur terrestre (g = 9,80 N/kg).

4/ Un pendule conique est formé d'une masse m = 100 g suspendue à l'extrémité d'un fil d'un mètre de longueur.

1°) Calculer la vitesse angulaire ω_o en dessous de laquelle il ne s'écarte pas de la verticale.

2°) Quelle est alors sa fréquence de rotation ?

3°) Quelle est son inclinaison par rapport à la verticale lorsque sa vitesse angulaire est 90 tours par minute ?

4°) Calculer la tension du fil pour cette vitesse angulaire.

5/ La loi d'attraction universelle appliquée à deux corps de masses m_1 et m_2 dont les centres sont à la distance d, s'écrit :

$$F = \frac{\varepsilon m_1 m_2}{d^2} \qquad \varepsilon = 6{,}67.10^{-11} \text{ S.I.}$$

A- a/ Exprimer l'accélération g_o de la pesanteur au niveau du sol en fonction de ε, du rayon R de la Terre, de sa masse M, en supposant qu'elle est concentrée en son centre.

b/ Sachant que R = 6 400 km, calculer M. (On donne g_o = 9,80 N/kg).

B- a/ Exprimer en fonction de g_o, R et z l'intensité g de la pesanteur à une altitude z quelconque.

b/ Montrer que si z est petit devant R, g est une fonction linéaire de z.

c/ Dans ce dernier cas, calculer l'erreur relative commise en prenant g = g_o à 3 200 m d'altitude.

C- Un satellite artificiel évolue à très haute altitude, où la valeur de g est celle trouvée au § B a/, en décrivant un cercle concentrique à la Terre.

a/ Calculer sa vitesse en fonction de g_o, R et z.

b/ Quelle est cette vitesse si z = 36 000 km/h ?

c/ Quelle est alors la durée d'une révolution ? L'exprimer en secondes et en heures.

d/ Quelles réflexions vous inspire ce dernier résultat, lorsque l'orbite est dans le plan équatorial ?

(Baccalauréat).

6/ Un ressort de masse négligeable a pour longueur au repos L = 48 cm. Lorsqu'on le suspend verticalement et qu'on fixe une masse M = 200 g à sa partie inférieure, il s'allonge de 1 cm.

1°) Calculer la raideur du ressort sachant que son allongement est proportionnel à la force agissante.

2°) La figure 1 représente ce ressort enfilé sur une tige horizontale T, fixée à l'une de ses extrémités D, tandis qu'à l'autre extrémité est fixée une masse m de 50 g pouvant coulisser sans frottement sur la tige T.

Calculer l'allongement x du ressort, sachant que la vitesse angulaire du système est de 2 tours par seconde.

3°) La figure 2 représente le système précédent, avec en plus une tige creuse de masse négligeable, longue de 42 cm. Cette tige est fixée à la masse m de la seconde question, tandis qu'à son autre extrémité est fixée une masse identique coulissant sur T.

Le système faisant 2 tours par seconde, calculer le nouvel allongement y du ressort.

4°) La figure 3 représente un système comparable au précédent, mais la tige creuse a été remplacée par un ressort enfilé sur T, long de 60,2 cm au repos, de même raideur que le précédent. Calculer, lorsque le système fait 2 tours par seconde les allongements x et y de chacun des ressorts.

Dans tout le problème, on prendra $\Pi^2 = 9,80$ et g=9,80N/kg

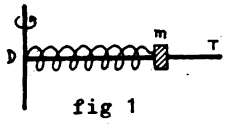


fig 1

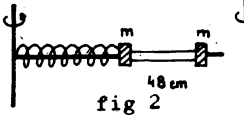


fig 2

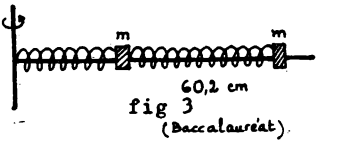


fig 3
(Baccalauréat)

7/ Ce problème présente schématiquement des méthodes pour calculer certaines données astronomiques.

1°) Mesure de la constante universelle de la gravitation

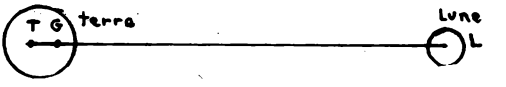
Une expérience réalisée en 1798 par Cavendisch a montré que l'interaction de gravitation entre une sphère de masse m = 30,0 g et une sphère de masse M = 50,0 kg, dont les centres sont distants de 15,0 cm vaut :

$$f = \varepsilon \frac{M.m}{d^2} = 4,4 \cdot 10^{-9} \text{ N}.$$

En déduire la constante universelle de la gravitation dans le système international.

2°) Masse de la Terre. Le poids moyen au niveau du sol d'un corps de masse m = 1,00 kg est p = 9,80 N. Le rayon moyen de la Terre étant R = 6 400 km, quelle est la masse de la Terre ?

3°) Masse de la lune. Les observations astronomiques donnent les renseignements suivants :



- La distance moyenne du centre de la Terre au centre de la Lune est TL. = 384 000 km

- Le barycentre du système Terre-Lune est un point G autour duquel tournent les deux astres, à la distance GT = 4 650 km du centre de la Terre.

a/ Quelle est la masse de la Lune ?

b/ Le rayon moyen de la Lune est r = 1 740 km. Quelle est la valeur de l'intensité du champ de pesanteur lunaire au niveau du sol)?

c/ Quelle est la première vitesse cosmique de la Lune, (vitesse d'un satellite au niveau du sol)?

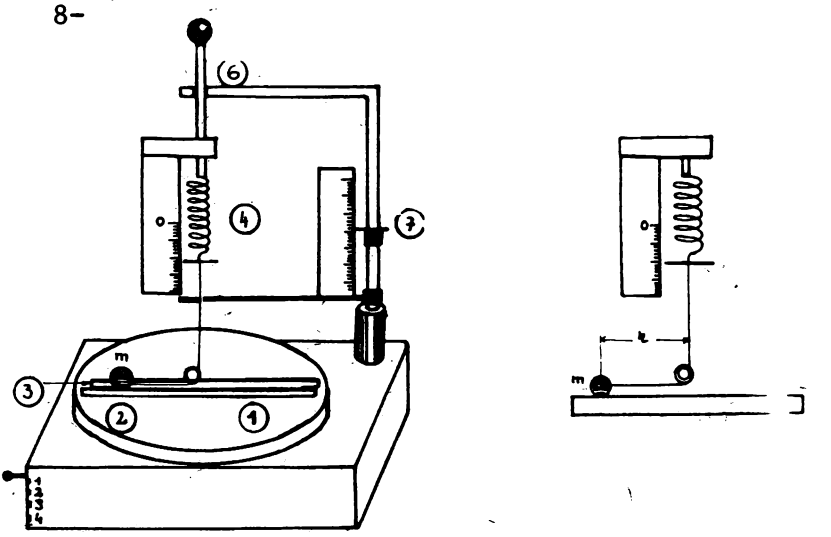
4°) Masse du Soleil. La Terre tourne autour du Soleil en 365 jours environ sur une trajectoire pratiquement circulaire à une distance moyenne de 150 millions de kilomètres de son centre.

a/ Donner l'expression de l'accélération centripète de la Terre, en fonction de D, distance Terre-Soleil et T, durée de la révolution de la Terre autour du Soleil.

b/ Soit M_S la masse du Soleil. Donner une expression de l'intensité du champ de pesanteur solaire au niveau de la Terre en fonction de ε, M_S et D.

c/ En déduire la masse du Soleil dans le système international.

8-



Le dispositif schématisé ci-dessus est destiné, selon son constructeur, à vérifier expérimentalement la relation $F = m\,\omega^2 r$ des mouvements circulaires uniformes. Il est formé :

- d'un plateau (1) pouvant tourner à différentes vitesses angulaires ;

- d'une masse m (2) astreinte par un dispositif de guidage (3) à tourner à la même vitesse angulaire que la plateau et à se déplacer suivant un rayon.

- d'un dynamomètre (4) auquel la masse est reliée par l'intermédiaire d'une poulie et d'un fil très léger.

Le constructeur ne fournissant aucun renseignement sur le ressort du dynamomètre, on commence par l'étalonner en suspendant des masses M croissantes à son extrémité inférieure et en mesurant l'allongement ℓ correspondant.

M(g)	$\ell + \Delta\ell$ (cm)
100	1,20 ± 0,05
200	2,40 ± 0,05
400	4,80 ± 0,05

Le plateau possède 4 vitesses angulaires différentes que l'on peut sélectionner à l'aide de la manette (5). Le constructeur annonce les valeurs suivantes : 75 tours/mn, 100 tours/mn, 125 tours/mn, 150 tours/mn. Il signale que ces valeurs sont données à 2% près et que l'on peut obtenir des valeurs plus précises par une détermination personnelle des vitesses angulaires.

Position 1	79,0s ± 0,1 s
Position 2	59,2s ± 0,1 s
Position 3	47,6s ± 0,1 s
Position 4	40,0s ± 0,1 s

On chronomètre donc les durées de 100 tours du plateau en plaçant successivement la manette sur les quatre positions (tableau ci-dessus).

Cette seconde étude étant achevée, on relie le dynamomètre à la masse m et le plateau est mis en rotation. Lorsque sa vitesse angulaire est constante, la masse m, après avoir été repoussée vers la périphérie du plateau se trouve à la distance r de l'axe de rotation et décrit un cercle de rayon r. On peut faire varier à volonté le rayon de la trajectoire, pour une vitesse angulaire donnée en relevant ou en abaissant le dynamomètre à l'aide de la tige (6). Ce rayon est mesuré grâce à la partie (7) du dispositif, mais nous ne préciserons pas comment, le lecteur n'ayant pas la possibilité d'effectuer personnellement la manipulation.

Voici quelques résultats de mesures :

Masse m(g)	Position de la manette (5)	Allongement (cm)	Rayon r (cm)
100	1	0,20 ± 0,05	4,4 ± 0,1
100	2	0,60 ± 0,05	4,9 ± 0,1
100	3	1,70 ± 0,05	6,2 ± 0,1
100	4	2,30 ± 0,05	8,7 ± 0,1
200	3	3,70 ± 0,05	9,2 ± 0,1
200	4	6,30 ± 0,05	10,8 ± 0,1

Remarque :

Les résultats de toutes les expériences effectuées au cours de l'étude du dispositif ne sont pas nécessairement utiles à la résolution du problème. Le lecteur choisira ceux dont il aura besoin. Certaines incertitudes relatives sont négligeables devant d'autres. Dans ce cas, il ne faudra pas en tenir compte dans les calculs.

1°) Déduire de la première étude expérimentale la raideur du ressort et son incertitude absolue(g=9,80N/kg).

2°) Le plateau tournant à vitesse constante, représenter pour un observateur lié à la masse m l'ensemble des forces qui assurent son équilibre relatif (on supposera dans cette étude que ni la masse ni la poulie ne sont soumises à des frottements). Représenter également la force agissant sur la partie inférieure du ressort. Il s'agit de la tension du fil, responsable de l'allongement du dynamomètre.

S'il n'y a aucun frottement, la tension du fil est égale en module à la force centrifuge agissant sur m.

3°) En choisissant 3 ou 4 parmi les mesures de la troisième étude et compte tenu de la seconde étude, comparer les domaines expérimentaux des modules de la force mesurée par le dynamomètre (tension du fil) et de la force centrifuge. A-t-on vérifié expérimentalement, comme l'annonce le constructeur, la formule $F = m \omega^2 r$?

4°) L'influence de la poulie étant supposée négligeable, on peut admettre que la tension du fil mesurée par le dynamomètre a même module que la tension du fil agissant sur la masse m. Quel ensemble de forces assure à votre avis l'équilibre relatif de la masse m ? Pour un observateur extérieur, quel ensemble de forces constitue la force centripète responsable du mouvement circulaire uniforme de la masse ?

5°) Pour l'une des mesures de votre choix, donner le domaine expérimental de la force de frottement agissant sur la masse m.

9/ Un cycliste et sa bicyclette ont une masse de 100 kg. Ils prennent un virage de 10 mètres de rayon à la vitesse constante v. Quelle vitesse maximale peuvent-ils atteindre sans déraper si la valeur maximale des forces de frottement, tangentes au sol est 200 N ? Prendre g = 9,80 N/kg.

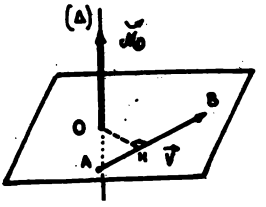
chapitre 8

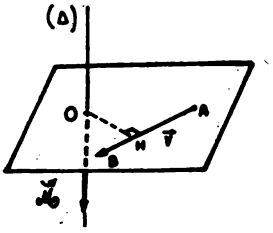
ROTATION D'UN SOLIDE AUTOUR D'UN AXE FIXE

I - INTRODUCTION : MOMENT D'UN VECTEUR

1/ Moment d'un vecteur par rapport à un point

(Ou moment d'un vecteur par rapport à un axe lorsque le vecteur est orthogonal à 1'axe).





Soit un vecteur $\vec{V} = \vec{AB}$ et O un point donné. On appelle moment du vecteur $\vec{AB}$ par rapport à ce point O, le vecteur $\vec{\mathcal{M}_O}$ d'origine O, perpendiculaire au plan défini par O et $\vec{AB}$ et de module :

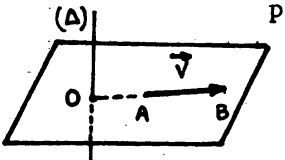
$$\mathcal{M}_O = AB.OH$$

OH est la distance du point O au support du vecteur $\vec{AB}$.

Le sens de $\vec{\mathcal{M}_O}$ est tel que le trièdre $(\vec{\mathcal{M}_O}, \vec{OA}, \vec{AB})$ soit direct.

Considérons l'axe (Δ) orthogonal au plan défini par le vecteur $\vec{AB}$ et par le point O. Le moment du vecteur $\vec{AB}$ par rapport à l'axe (Δ) est égal au moment du vecteur $\vec{AB}$ par rapport au point O.

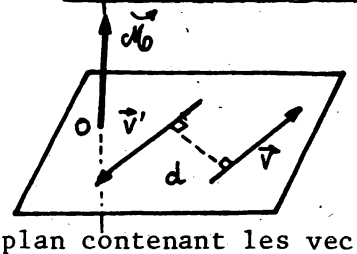
Cas particulier : le support du vecteur $\vec{AB}$ passe par le point O.



La distance du support au point O ou à l'axe (Δ) est nulle.

Le moment de $\vec{AB}$ est nul. $\vec{\mathcal{M}_O} = \vec{0}$

2/ Moment d'un couple de vecteurs



Les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ forment un couple s'ils ont même module, même direction et des sens contraires.

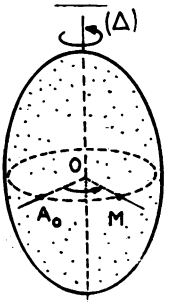
Le moment de ce couple par rapport à un axe quelconque orthogonal au plan contenant les vecteurs, est un vecteur $\vec{\mathcal{M}_O}$ perpendiculaire à ce plan et de module :

$\mathcal{M}_{\Delta} = V \cdot d$ d : distance des supports de $\vec{V}$ et $\vec{V}'$

Unité d'un moment de force

Si le vecteur est une force, son moment a pour unité dans le système international le mètre.newton (m.N).

II- LE MOMENT D'INERTIE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN AXE

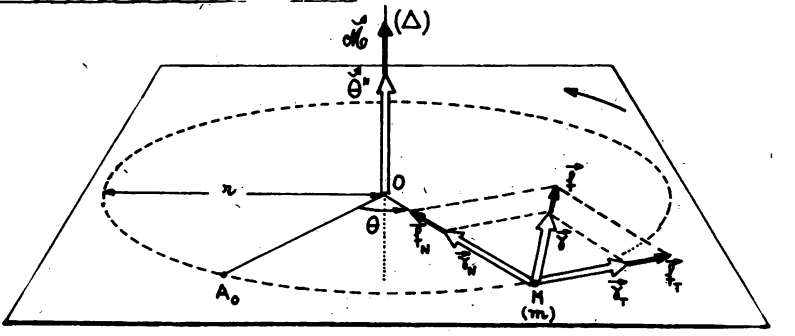


On se propose d'étudier la nature du mouvement de rotation d'un solide tournant autour d'un axe fixe (Δ) sous l'action d'un ensemble de forces extérieures.

Pour cela, il faudra d'abord définir une grandeur physique, nouvelle dans ce cours : le moment d'inertie du solide par rapport à son axe de rotation.

Nous commencerons par l'étude du mouvement d'un seul point du solide.

1/ Rotation d'un point du solide



Soit M un point quelconque du solide, de masse m.

$\vec{f}$ étant la résultante des forces qui lui communiquent un mouvement de rotation quelconque, la relation fondamentale appliquée à ce point s'écrit :

$$\vec{f} = m \cdot \vec{\gamma}$$

On se propose de déterminer le moment de la force $\vec{f}$ par rapport à l'axe (Δ).

Commençons par projeter la relation fondamentale sur l'axe normal et sur l'axe tangent à la trajectoire au point M :

$$f_N = m \cdot \gamma_N$$

$$f_T = m \cdot \gamma_T = mr\theta'' \quad \text{car} \quad \gamma_T = r\theta''$$

On a $\vec{f} = \vec{f}_N + \vec{f}_T$. Par suite : $\mathcal{M}_{\vec{f}/\Delta} = \mathcal{M}_{\vec{f}_N/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{f}_T/\Delta}$

Le moment de $\vec{f}_N$ par rapport à l'axe (Δ) est nul puisque son support rencontre (Δ) au point O. Donc :

$$\mathcal{M}_{\vec{f}/\Delta} = \mathcal{M}_{\vec{f}_T/\Delta}$$

$\|\mathcal{M}_{\vec{f}/\Delta}\| = f_T \cdot r = mr^2 . \theta''$. La relation peut s'écrire vectoriellement :

$$\boxed{\mathcal{M} = mr^2\ddot{\theta}''} \qquad (1)$$

2/ Cas du solide entier

Problème : Il s'agit de déterminer le moment résultant par rapport à l'axe de rotation (Δ) de toutes les forces agissant sur le solide.

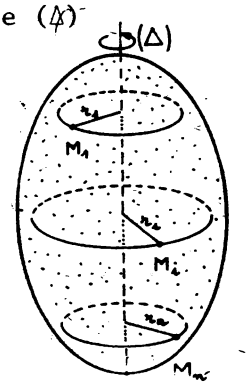
Soit M_1 le point de masse m_1 tournant à la distance r_1 de (Δ)

.....

Soit M_i le point de masse m_i tournant à la distance r_i de (Δ)

.....

Soit M_n le point de masse m_n tournant à la distance r_n de (Δ)



Si le solide est indéformable, tous ses points ont même accélération angulaire. Appliquons la relation (1) à chacun d'eux :

$$\mathcal{M}_1 = m_1 r_1^2 . \ddot{\theta}''$$
.....
$$\mathcal{M}_i = m_i r_i^2 . \ddot{\theta}''$$
.....
$$\mathcal{M}_n = m_n r_n^2 . \ddot{\theta}''$$

Additionnons membre à membre toutes ces relations :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \ldots + \mathcal{M}_i + \ldots + \mathcal{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i = \sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2 . \ddot{\theta}'')$$

$$= \ddot{\theta}'' \sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2)$$

$$\boxed{\mathcal{M} = \ddot{\theta}'' . \sum_{i=1}^{n} (m_i r_i^2)} \qquad (2)$$

3°) Moment d'inertie du [illegible] par rapport à son axe de rotation

La quantité scalaire $\sum_{i=1}^{n} (m_i r_i)$ est par définition le moment d'inertie du solide par rapport à son axe de rotation. On le note J.

$$J = \sum_{i=1}^{n} (m_i \, r_i^2)$$

L'unité de moment d'inertie internationale se déduit des unités de masse et de longueur : c'est le kilogramme mètre carré ($kg.m^2$)

4°) La relation fondamentale de la dynamique de rotation

La relation (2) s'écrit :

$$\mathcal{M} = J . \theta''$$

C'est la relation fondamentale de la dynamique de rotation, grâce à laquelle on peut calculer l'accélération angulaire d'un système matériel en rotation autour d'un axe fixe lorsqu'on connaît son moment d'inertie par rapport à cet axe et le moment des forces agissant sur lui.

5°) Parallèle entre rotation et translation

Nous pouvons établir un parallèle entre les deux relations fondamentales de la dynamique.

R.F.D. de translation	R.F.D. de rotation
$\vec{f} = m . \vec{\gamma}$	$\mathcal{M} = J . \theta''$

La force $\vec{f}$ a pour équivalent le moment de force $\mathcal{M}$

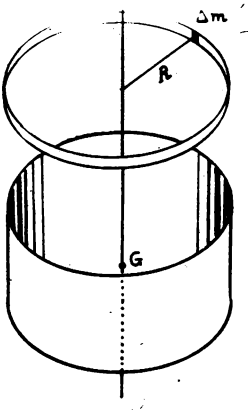
La masse ou inertie m a pour équivalent le moment d'inertie J

L'accélération $\vec{\gamma}$ a pour équivalent l'accélération angulaire θ''

III- QUELQUES MOMENTS D'INERTIE

1/ Quelques cas où l'axe passe par le centre de gravité

a/ Anneau ; cylindre creux.



M est la masse de l'anneau (ou du cylindre) et R le rayon. L'épaisseur est négligeable devant le rayon.

Soit Δm la masse d'un petit élément de l'anneau (ou du cylindre). Le moment d'inertie de cet élément par rapport à l'axe (Δ) est :

$$j = \Delta m . R^2$$

Le moment d'inertie de tout le système est :

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \; R^2$$

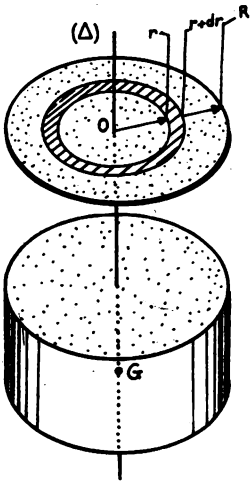
Tous les éléments sont à la même distance de l'axe.

Donc :

$$J = R^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = R^2 . M$$

$$\boxed{J = M . R^2}$$

b/ Disque plein : cylindre plein



La démonstration est facultative. Nous donnons celle du disque.

La surface d'un anneau de rayon r et d'épaisseur dr à l'intérieur du disque est :

$$s = 2\Pi \; r.dr$$

Soit σ la masse par unité de surface. La masse de l'anneau est :

$$dm = \sigma . s = \sigma . 2\Pi \; r . dr$$

D'après le § a, le moment d'inertie de cet anneau par rapport à (Δ) est :

$$j = dm.r^2 = \sigma 2 \Pi r^3 dr$$

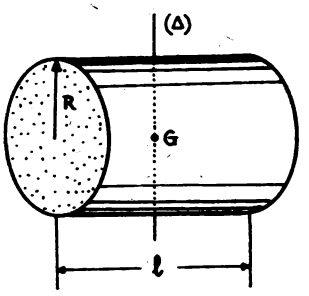
Le moment d'inertie de tout le disque s'obtient par une intégrale :

$$J = \int_0^R \sigma \, 2.\pi \, r^3 dr = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi\sigma \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\sigma \pi R^4}{2}$$

La surface du disque est $S = \pi R^2$ et sa masse : $M = \sigma \pi R^2$. L'expression de J devient donc : $J = \frac{1}{2} MR^2$

Une démonstration du même type conduit pour le cylindre plein à une expression identique :

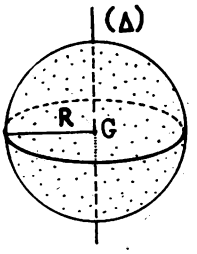
$$J = \frac{M.R^2}{2}$$



Le moment d'inertie d'un solide donné, dépend de l'axe par rapport auquel on le définit. Ainsi, le moment d'inertie d'un cylindre plein de rayon R et de longueur ℓ par rapport à un axe perpendiculaire à l'axe de révolution et passant par le centre de gravité est :

$$J = \frac{MR^2}{4} + \frac{M\ell^2}{12}$$

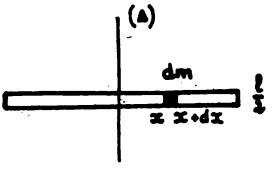
c/ Sphère homogène (pleine).



Le moment d'inertie d'une sphère pleine homogène, de rayon R et de masse M, par rapport à un axe passant par son centre est :

$$J = \frac{2}{5} MR^2$$

d/ Barre homogène



Nous cherchons le moment d'inertie d'une barre homogène de masse M et de longueur ℓ par rapport à un axe perpendiculaire passant en son milieu. La démonstration est facultative.

Soit λ la masse par unité de longueur ; un élément de longueur dx situé à la distance x de l'axe a pour masse :

$$dm = \rho . dx$$

et pour moment d'inertie : $j = dm.x^2 = \rho x^2 . dx$. Le moment d'inertie de toute la barre est la somme de tous les moments élémentaires :

$$J = \rho \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} x^2 dx = \rho \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/2}^{+\ell/2} = \rho \left[\frac{\ell^3}{24} + \frac{\ell^3}{24}\right] = \rho \frac{\ell^3}{12}$$

$\rho.\ell$ étant la masse totale M de la barre, le moment d'inertie vaut :

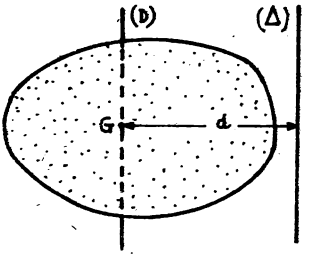
$$\boxed{J = \frac{M\ell^2}{12}}$$

Remarque :

Les démonstrations des §§ b et d ne peuvent faire l'objet d'une interrogation ou d'une question au baccalauréat.

2/ Théorème de Huygens

Problème : Connaissant le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe passant par son centre de gravité, il s'agit de déterminer le moment d'inertie du solide par rapport à un axe parallèle au précédent et qui, par conséquent, ne passe pas par son centre de gravité.



Soit M la masse du solide; J_G le moment d'inertie par rapport à un axe (D) passant par le centre de gravité; J_Δ le moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) parallèle au précédent; d la distance des deux axes.

Nous admettrons la formule et le théorème suivants :

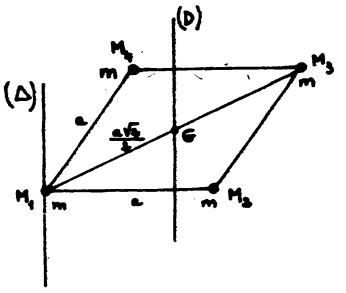
$$\boxed{J_\Delta = J_G + Md^2}$$

Théorème :

Le moment d'inertie J_Δ d'un solide par rapport à un axe quelconque est égal à la somme du moment d'inertie J_G par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité et du produit de la masse totale M du solide par le carré de la distance d des deux axes.

Vérification du théorème

Un système est formé de 4 points M_1, M_2, M_3, M_4 de même masse m, placés aux sommets d'un carré de côté a.



1°) Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe (D) perpendiculaire au plan du carré et passant par son centre de gravité G.

2°) Déterminer directement puis [illegible]cation du théorème de Huygens [illegible] moment d'inertie par [illegible] à l'axe parallèle passant par M_1 .

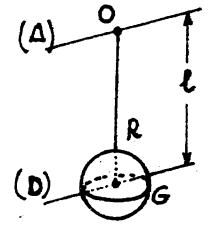
1°) $J_G = m.GM_1^2 + m.GM_2^2 + m.GM_3^2 + m.GM_4^2$ avec $GM_1 = GM_2 = GM_3 = GM_4 = a\sqrt{2}/2$. On obtient : $J_G = 2\ m.a^2$

2°) $J_\Delta = m.M_1M_2^2 + m.M_1M_4^2 + m.M_1M_3^2 = m.a^2 + m.a^2 + m.2a^2 = 4.m.a^2$ $\qquad J_\Delta = 4\ m.a^2$

Application du théorème :

$J_\Delta = J_G + 4m\ (M_1G)^2 = 2m.a^2 + 4m\ a^2/2 \qquad J_\Delta = 4\ m.a^2$

EXEMPLE D'UTILISATION DU THEOREME DE HUYGENS



Un pendule pesant est formé d'une sphère de rayon R et de masse M, suspendue à un fil de masse négligeable. Distance de l'axe de rotation au centre de gravité : OG = ℓ . Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation (Δ).

Théorème de Huygens :

$$J_\Delta = J_G + M\ell^2 = \frac{2}{5} MR^2 + M\ell^2$$

$$J_\Delta = M\left(\frac{2}{5} R^2 + \ell^2\right)$$

IV- METHODE DE RESOLUTION DES EXERCICES COMBINANT LA TRANSLATION ET LA ROTATION

1°) Faire un schéma en définissant le système.

2°) Décomposer le système en parties indéformables.

3°) Pour les parties en translation, on procède comme cela a été indiqué au chapitre 6.

4°) Pour les parties en rotation :

a/ Faire l'inventaire des forces dont les moments sont responsables de la rotation.

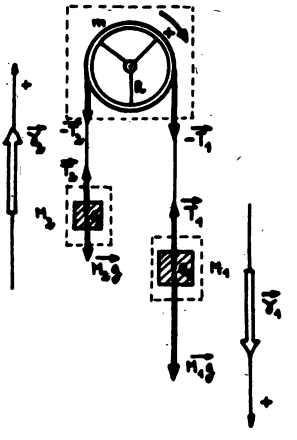
b/ Appliquer à chaque partie la relation fondamentale de la dynamique de rotation : $\vec{\mathcal{M}} = J\vec{\theta}''$

- On obtient une relation algébrique en affectant du signe + le module des moments des forces qui tendent à faire tourner le système dans le sens positif choisi et en affectant du signe - le module des moments des forces qui tendent à le faire tourner en sens contraire.

Le sens positif de rotation s'obtient "par continuité" avec le sens positif de translation.

Exemple d'exercice : la machine d'Atwood

C'est un dispositif historique imaginé par un physicien anglais du 18 ième siècle pour faire l'étude expérimentale de mouvements rectilignes uniformément variés.



La machine est formée de trois parties indéformables :

- deux masses M_1 et M_2 en translation ;
- une poulie de masse m, de rayon R, en rotation. On assimile la poulie à un cerceau : son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est $J = mR^2$

Les masses M_1 et M_2 sont reliées par un fil inextensible et de masse négligeable passant sur la gorge de la poulie.

On se propose de déterminer l'expression de l'accélération de l'une des masses.

Pour résoudre cet exercice, on tiendra compte des points suivants :

- les accélérations $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$ des masses ont même valeur algébrique :

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$$

- L'accélération $\vec{\gamma}$ est égale à l'accélération tangentielle de la gorge de la poulie (c'est le fil inextensible qui transmet cette accélération).

θ'' étant l'accélération angulaire de la poulie, on a :

$$\gamma = \gamma_T = R\,\theta'' \implies \theta'' = \frac{\gamma}{R}$$

Toutes les forces participant à la rotation et à la translation étant représentées sur la figure, dressons le tableau suivant :

	R.F.D. vectorielles	R.F.D. algébriques
M_1	$\vec{M_1 g} + \vec{T_1} = \vec{M_1 \gamma_1}$	$M_1 g - T_1 = M_1 \gamma$ (1)
M_2	$\vec{M_2 g} + \vec{T_2} = \vec{M_2 \gamma_2}$	$T_2 - M_2 g = M_2 \gamma$ (2)
Poulie	$\sum \vec{\mathcal{M}} = J\vec{\theta}''$	$T_1 R - T_2 R = J\theta'' = J\frac{\gamma}{R} \implies T_1 - T_2 = J\frac{\gamma}{R^2}$ (3)

$$(1) + (2) + (3) : (M_1 - M_2)g = (M_1 + M_2 + \frac{J}{R^2})\,\gamma$$

Compte tenu de $J = mR^2$, on a :

Remarque.

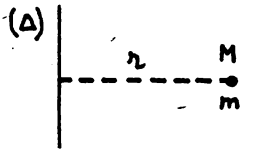
Si la poulie est un disque plein de masse m, son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est $J = \frac{1}{2} mR^2$. Une démonstration identique conduit à l'expression suivante de l'accélération :

$$\gamma = \frac{(M_1 - M_2)\,g}{M_1 + M_2 + \frac{1}{2} m}$$

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 8

I - LE MOMENT D'INERTIE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN AXE FIXE

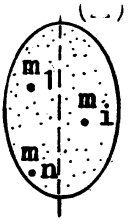
1°) Le moment d'inertie d'un point



C'est le scalaire positif : $\boxed{j = m.r^2}$

m: masse du point en kg.
r: distance du point à l'axe, en mètres
j: moment d'inertie en kg.m²

2°) Moment d'inertie d'un solide



C'est la somme de tous les moments d'inertie des différents points :

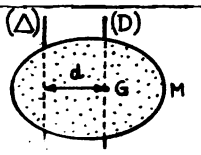
$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{n} j_i = \sum_{i=1}^{n} (m_i . r_i^2)}$$

3°) Quelques moments d'inertie

a/ Par rapport à un axe passant par le centre de gravité

L'élève doit savoir établir l'expression du moment d'inertie d'un anneau ou d'un cylindre creux par rapport à l'axe de révolution. Les autres sont fournis dans les énoncés d'exercices.

b/ Théorème de Huygens



$$\boxed{J_\Delta = J_G + Md^2}$$

II- RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE DE ROTATION

La R.F.D. appliquée à un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe s'exprime par .....

$$\boxed{\sum \vec{M} = J\,\ddot{\theta}}$$

- $\sum \vec{M}$: Somme vectorielle des moments des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation.
- J : Moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation.
- $\ddot{\theta}$: Accélération angulaire.

Expression algébrique

$\sum \mathcal{M}_O$ est la somme algébrique des moments des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation.

$$\sum \mathcal{M}_O = J\,\theta''$$

La valeur algébrique d'un moment est obtenue en affectant son module du signe + s'il tend à faire tourner le solide dans le sens positif et du signe moins dans le sens contraire.

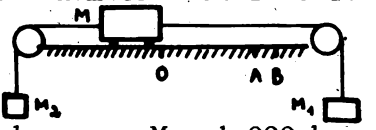
METHODE DE RESOLUTION DES EXERCICES

Revoir la partie correspondante du cours.

Chapitre n° 8

EXERCICES

1/ Le dispositif schématisé ci-dessous comprend :



- Un chariot de masse M = 1,000 kg placé sur des rails horizontaux ;
- Deux masses M_1 = 300 g et M_2 = 200 g ;
- Deux poulies identiques de masse m = 100 g, de rayon R, à frottements négligeables, assimilables à des disques pleins de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mR^2$ par rapport à leur axe de rotation. Les fils reliant les diverses parties du dispositif sont inextensibles et leur masse est négligeable.

Le chariot est soumis au cours de ses déplacements à un ensemble de forces de frottements dont la résultante a un module égal au 1/20 de son poids et dont le sens est opposé à celui du déplacement.

1°) Le chariot part de O sans vitesse initiale. Calculer son accélération.

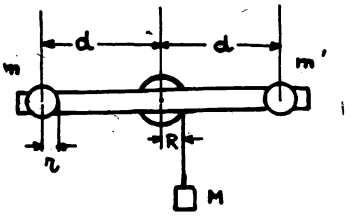
2°) Lorsqu'il passe en A, le fil qui le relie à la masse M_1 casse.

a/ Calculer la distance AB parcourue jusqu'à son arrêt en B, sachant que la distance OA est égale à 0,500 m.

b/ Quelle est la durée du parcours OB ?

3°) Quelle est la durée du parcours BO ?

2/ Au cours d'une manipulation de travaux pratiques on utilise le dispositif représenté ci-dessous :



La barre et le treuil sont solidaires et tournent sans frottement appréciable autour de l'axe (Δ). On appelle :

J, le moment d'inertie de la partie en rotation par rapport à (Δ).

J_o, le moment d'inertie de la barre et du treuil par rapport à (Δ).

R = 2,00 cm, le rayon du treuil ;

(C) et (C'), deux cylindres homogènes situés à la distance d de (Δ), de rayon r = 1,20 cm, de masses m = m' = 200 g, de moment d'inertie par rapport à (D) et (D'), axes parallèles à (Δ):

$$Jm/(D) = Jm'/(D') = \frac{1}{2} mr^2$$

M, masse de 100g suspendue au fil enroulé sur le treuil.

1°) Etablir l'expression théorique de l'accélération de M en fonction de M, g, J, R. En déduire la nature du mouvement de M et la nature du mouvement de la partie en rotation.

2°) Pour confirmer expérimentalement le résultat précédent, on chronomètre les durées t correspondant à des rotations θ de la barre démarrant sans vitesse angulaire initiale.

a/ Exprimer l'accélération angulaire θ" en fonction de θ et t.

b/ Les résultats de l'expérience sont portés dans le tableau ci-dessous :

θ (rd)	t_m(s)	t_M(s)	θ''_m (rd / s²)	θ''_M
3Π	5,0	5,3	0,67	0,75
4Π	5,8	6,2	0,65	0,75
5Π	6,4	6,7	0,70	0,77
6Π	7,0	7,4	0,69	0,77
7Π	7,7	8,2	0,65	0,74

t_m : durée minimale de la rotation θ ;

t_M : durée maximale de la rotation θ ;

θ''_m : valeur minimale de θ"

θ''_M : valeur maximale de θ"

Tracer les domaines expérimentaux correspondant à chaque mesure de θ''. En déduire la valeur expérimentale de l'accélération angulaire, son incertitude absolue et son incertitude relative.

3°)

a/ La distance des cylindres (C) et (C') peut prendre les valeurs 12,0 cm, 16,0 cm, 20,0 cm et 24,0 cm. Quelle erreur relative commet-on sur les moments d'inertie de (C) et (C') par rapport à (Δ) en les assimilant à des masses ponctuelles, pour d = 12,0 cm et pour d = 24,0cm ? Compte tenu de l'incertitude relative sur θ'', cette assimilation est-elle justifiée ?

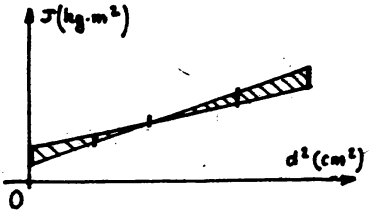
b/ Donner dans ce cas l'expression théorique du moment d'inertie J du dispositif en fonction de J_o, m et d^2. Quelle est la nature de la courbe $J = f(d^2)$?

4°) Montrer que le moment d'inertie du dispositif peut s'exprimer sous la forme $J = \frac{MR(g - R\theta'')}{\theta''}$ avec $g = 9,80\ m/s^2$. Par la suite le produit $R\theta''$ sera négligé devant g et l'on prendra $J = \frac{MRg}{\theta''}$.
Justifier cette approximation.

5°)

a/ Pour chaque valeur de d on détermine expérimentalement les valeurs extrêmes de θ'' et par suite celles de J:

d(cm)	θ''(rd)	θ''(rd)	J_m(kg.m^2)	J_M(kg.m^2)
12	1,87	2,06	$0,95.10^{-2}$	$1,05.10^{-2}$
16	1,30	1,36	$1,45.10^{-2}$	$1,50.10^{-2}$
20	0,93	1,00	$1,95.10^{-2}$	$2,10.10^{-2}$
24	0,70	0,75	$2,60.10^{-2}$	$2,80.10^{-2}$



J_m : valeur minimale

J_M : valeur maximale

Porter sur papier millimétré les segments représentatifs de J en abscisse en fonction de d^2 en ordonnées (1cm pour $0,2.10^{-2}$ kg.m^2 et 1cm pour 20 cm^2). Tracer la droite de coefficient directeur minimal et la droite de coefficient directeur maximal passant par l'ensemble des segments. D'après le § 3 b/, que représentent les intersections de ces deux droites avec l'axe OJ ?

Donner les valeurs expérimentales extrêmes J_{om} et J_{oM} du moment d'inertie J_o de la barre et du treuil.

b/ Les deux cylindres (C) et (C') sont supprimés et la masse M remplacée par une masse M' = 20,0g. On détermine la durée d'une rotation $\theta = 5\Pi$. On trouve :

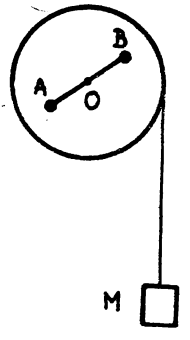
$$t_m = 5,9 \text{ s} \quad ; \quad t_M = 6,2 \text{ s.}$$

En déduire les valeurs expérimentales extrêmes J'_{om} et J'_{oM} de J_o. Les résultats des expériences décrites aux §§ 5 a/ et 5 b/ concordent-ils ?

6°) Les cylindres (C) et (C') sont à nouveau fixés à la distance d = 24,0 cm. Le système démarre sans vitesse angulaire initiale, entrainé par la masse M = 100 g. Après 6,3 s ± 0,2 s de rotation, le fil se décroche et le dispositif s'arrête en 2mn 7s ± 5s.

Calculer la valeur du moment résistant ainsi que son incertitude absolue. On prendra la valeur de $(\theta'' \pm \Delta\theta'')$ déterminée au § 2 b/ et la valeur de $(J \pm \Delta J)$ du § 5 a/.

3/ Les parties B) et C) sont indépendantes. Dans tout le problème, on prendra g = 9,8 m/s^2.



Un disque plein, de rayon R = 0,5m, de masse μ = 1kg, peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal confondu avec son axe de symétrie de révolution. Sur l'une de ses faces verticales de centre O, il porte deux surcharges ponctuelles de même masse $m_A = m_B$ = 2kg ; ces surcharges sont situées sur un diamètre en 2 points A et B symétriques par rapport à O :

$$OA = OB = \frac{R}{2} .$$

Un fil inextensible et de masse négligeable est enroulé par une extrémité sur le disque et porte à l'autre extrémité un corps de masse M = 0,5 kg.

A/ Le moment d'inertie du disque seul par rapport à l'axe de rotation est $J_o = \frac{1}{2} \mu R^2$.

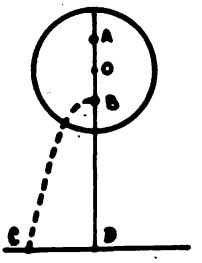
Calculer littéralement, puis numériquement, le moment d'inertie du disque, muni des deux surcharges A et B, par rapport à son axe.

B/

1°) A l'instant t = 0, le disque muni de ses deux surcharges, et la masse M sont abandonnés avec une vitesse initiale nulle. Montrez qu'à partir de cet instant origine, la masse M est animée d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Calculer son accélération γ .

2°) Lorsque la masse M a effectué un déplacement d=2m , le fil se détache de la poulie. Quel est à cet instant, la vitesse angulaire de rotation de la poulie ? Quel est le mouvement ultérieur de la poulie ?

C/ Le fil et le corps de masse M étant supprimés, le disque, muni des deux surcharges A et B tourne avec une vitesse angulaire θ' constante autour de son axe. La surcharge B se détache à l'instant où elle passe à la verticale du point O et au-dessous. Elle atteint le sol horizontal en un point C situé à une distance x de la verticale du point O. Lorsque la surcharge B s'est détachée, elle était située à une hauteur BD = h.



1°) Calculer x en fonction de θ', R, g et h.

2°) x = 1,1 m, h = 2,42m. Calculer la vitesse de rotation θ' du disque autour de son axe.

(Baccalauréat, partiel)

4/ Pour faire glisser un corps M de masse m = 70 kg le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné à 30° sur l'horizontale, on le tire à l'aide d'un câble C. Au cours de ce déplacement le plan exerce sur M une force de frottement f, parallèle au plan, de sens opposé à celui du mouvement et égal au dixième du poids du corps.

1°) Dans une première phase du mouvement, le câble exerce sur M une force constante F, parallèle au plan, telle que M, parti sans vitesse initiale d'un point A de la pente,

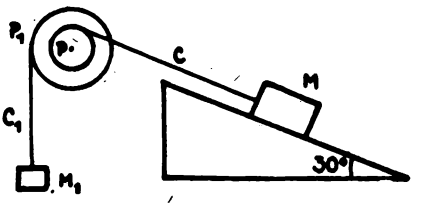
atteigne un point B distant de A de 5m, avec une vitesse de 5 m/s.

2°) A cet instant, la force prend une nouvelle valeur constante, telle que le mouvement de M devienne uniforme sur une longueur BD égale à 25 m.

Calculer dans chacun de ces deux cas la valeur de la force de traction F.

B/ Après ce parcours de 30m, le câble casse. Etudier le mouvement ultérieur de M. Combien de temps après son départ de A le corps repassera-t-il à nouveau en A ?

C/ Pour réaliser ces expériences, on utilise le dispositif suivant :



le câble C s'enroule sur un cylindre P de rayon R=25cm. Sur un 2ème cylindre P_1 , solidaire du premier, de même axe et de rayon R_1 = 50cm, s'enroule un autre câble C_1 , auquel est fixé un corps M_1 se déplaçant verticalement et entraînant le système.

Le moment d'inertie de l'ensemble (P, P_1) est : $J = 1{,}375 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Dans chacune des deux phases du mouvement de M décrit en A/, calculer :

1°) Les distances parcourues par M_1 ,

2°) Les valeurs des tensions T_1 du câble C_1 ,

3°) Les valeurs de la masse m_1 du corps M_1 .

Ecrire les équations horaires du mouvement de M_1 au cours des deux phases.

D/ Déterminer la vitesse angulaire des cylindres à l'instant de la rupture du câble C. Déterminer également la vitesse angulaire des cylindres et la vitesse linéaire du corps M_1 , à l'instant correspondant au passage de M en A. (Dans tout le problème on prendra pour accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m/s}^2$).

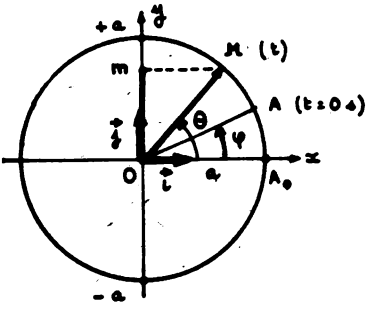
(Baccalauréat).

Chapitre 9

LE MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOIDAL

I - L'ETUDE CINEMATIQUE

1°) Mouvement de la projection d'un point en rotation uniforme



Soit M un point en mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω sur un cercle de rayon a. φ étant son élongation angulaire initiale, son élongation angulaire à l'instant t est : $\theta = \omega t + \varphi$

Soit m la projection orthogonale de M sur l'axe Oy. On a :

$$y = \overline{Om} = a.\sin\theta$$

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi)$$

Le point m est animé d'un mouvement rectiligne sur l'axe Oy, dont l'équation horaire est la fonction sinusoïdale du temps :

$$y = a\ \sin(\omega t + \varphi)$$

Son mouvement est rectiligne sinusoïdal.

2°) Définitions

Un point est en mouvement rectiligne sinusoïdal si sa trajectoire est rectiligne et si son élongation est une fonction sinusoïdale du temps :

$$y = a\ \sin(\omega t + \varphi)$$

- y est l'élongation à l'instant t ;

- a est l'élongation maximale ou amplitude du mouvement. Lorsque $\sin(\omega t + \varphi) = 1$, $y = +a$.
Lorsque $\sin(\omega t + \varphi) = -1$, $y = -a$.

- $\omega t + \varphi$ est la phase à l'instant t. La phase a la dimension d'un angle et s'exprime en radians. (Dimension zéro).

- φ est la phase initiale ;

- ω est la pulsation ; elle a la dimension d'une vitesse angulaire et s'exprime en radians par seconde. ($[\omega] = T^{-1}$).

Cas particulier

Si la phase initiale du mouvement est nulle, l'équation horaire est :

$$y = a \sin \omega t$$

3°) Le mouvement rectiligne sinusoïdal est périodique

Une fonction du temps est périodique et a pour période T si

$$y(t + kT) = y(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

La fonction $y(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$ est périodique. Sa période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$. En effet, si k est un entier :

$$y(t + kT) = a \sin [\omega(t + k\frac{2\pi}{\omega}) + \varphi]$$

$$y(t + kT) = a \sin (\omega t + 2k\pi + \varphi)$$

$$y(t + kT) = a \sin (\omega t + \varphi) = y(t).$$

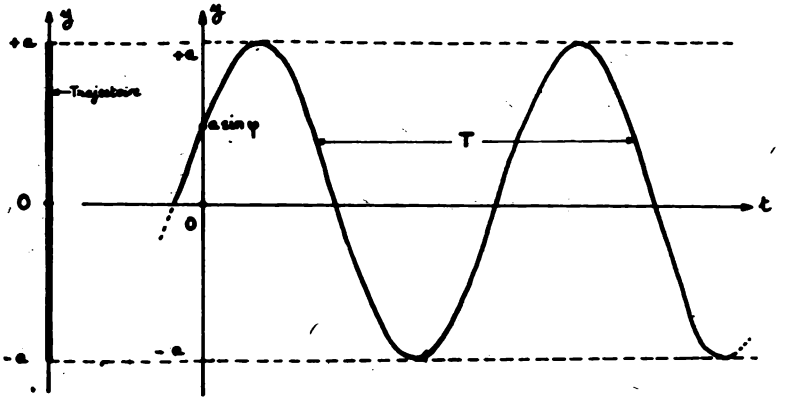
La période et la fréquence du mouvement rectiligne sinusoïdal sont donc :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \quad (s) \quad \text{et} \quad \boxed{N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}} \quad (Hz)$$

On pouvait prévoir ces résultats : le mouvement rectiligne sinusoïdal a même période que le mouvement circulaire uniforme qui a servi à le définir. Quand le point M repasse par le même point de sa trajectoire, le point m repasse par le même point de l'axe Oy et dans le même sens.

4°) Le diagramme des espaces

C'est la courbe $y = f(t)$ donnant les variations de l'élongation en fonction du temps. C'est une sinusoïde.



5°) La vitesse du mobile

C'est la dérivée par rapport au temps du vecteur espace.

$$\vec{Om} = y.\vec{j} = a.\sin(\omega t + \varphi).\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{Om})}{dt} = a.\omega\cos(\omega t + \varphi).\vec{j} = a.\omega\sin(\omega t + \varphi + \frac{\Pi}{2}).\vec{j}$$

En valeurs algébriques :

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = a\omega.\sin(\omega t + \varphi + \frac{\Pi}{2})$$

La vitesse est une fonction sinusoïdale du temps, de même période que celle de l'élongation, en avance de phase de $\Pi/2$ sur l'élongation (la phase de v est supérieure de $\Pi/2$ à celle de y).

On en déduit les propriétés suivantes :

Pour $(\omega t+\varphi) = k\Pi$, on a $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\begin{cases} y = a \sin k\Pi = 0 \\ v = a\omega\sin(k\Pi + \frac{\Pi}{2}) = \pm a\omega \end{cases}$

La vitesse est donc maximale lorsque l'élongation est nulle, c'est-à-dire lorsque le mobile passe au point O, dans un sens ou dans l'autre.

On vérifie de même que la vitesse est nulle lorsque l'élongation est maximale ($v = 0$ pour $y = \pm a$) : le mobile s'arrête aux extrémités de la trajectoire avant de chan-

ger de sens de déplacement.

6°) L'accélération du mobile

C'est la dérivée de la vitesse par rapport au temps et la dérivée seconde du vecteur espace par rapport au temps :

$$\vec{Om} = y.\vec{j} = a.\sin(\omega t + \varphi) \; . \; \vec{j}$$

$$\vec{v} = a\omega.\cos(\omega t + \varphi) \; . \; \vec{j}$$

$$\vec{\gamma} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi). \vec{j} = a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)(-\vec{j})$$

$$\vec{\gamma} = {}^2y \; . \; (-\vec{j}) = - \; {}^2. \; \vec{Om}$$

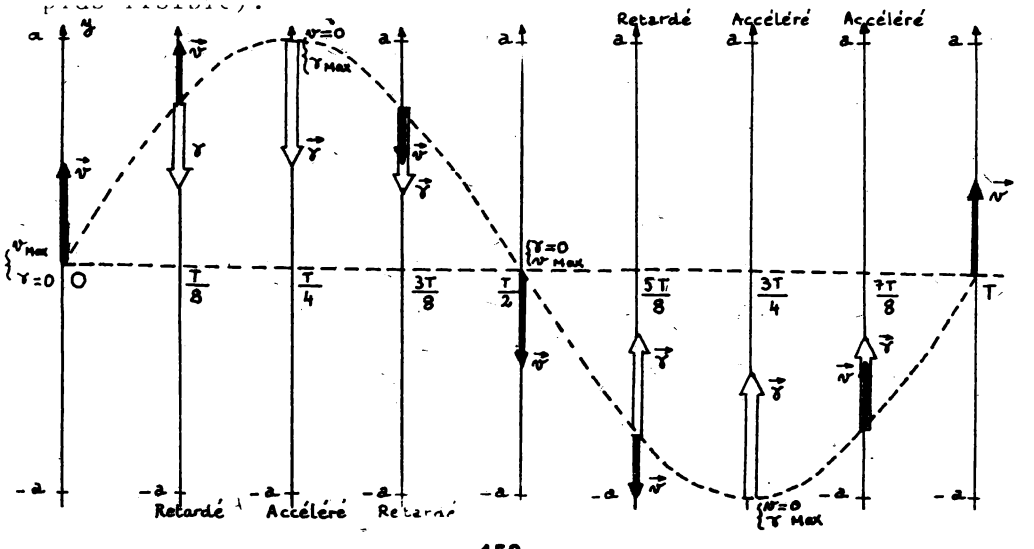
Cette relation montre que le vecteur accélération a toujours le sens contraire de celui du vecteur espace. Par conséquent, il est toujours orienté vers l'origine O, quelle que soit l'élongation du mobile (sauf pour y = 0, l'accélération étant alors nulle).

L'expression précédente s'écrit en valeur algébrique:

$$\boxed{\gamma = -\omega^2 y}$$

L'accélération est proportionnelle à l'élongation et de signe contraire

Sur la figure suivante, nous avons représenté à divers instants la vitesse et l'accélération du mobile pour différentes valeurs de l'élongation (l'axe Oy est redessiné pour chaque valeur de y afin de rendre la figure plus lisible).



7°) L'équation différentielle du mouvement rectiligne sinusoïdal

L'expression $\gamma = -\omega^2 y$ s'écrit aussi : $\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$ ou:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad \omega^2 > 0$$

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Cette équation, qui fait intervenir la variable y et sa dérivée seconde y" est l'équation différentielle du mouvement.

Les équations différentielles sont d'une grande utilité en physique. En effet, dans le cas de la mécanique, par exemple, l'étude des forces agissant sur un dispositif conduit fréquemment à l'équation différentielle de son mouvement. Il s'agit ensuite de trouver par des considérations mathématiques l'équation du mouvement.

Le problème est le suivant : quelle est la fonction y(t) telle que f(y, y', y" ...) = 0 ?

Répondre à cette question, c'est trouver la solution générale de l'équation différentielle.

Dans le cas présent, la solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est $y = a \sin(\omega t + \varphi)$. L'appellation solution générale provient de ce que a et φ sont des constantes indéterminées, pouvant prendre n'importe quelle valeur. On obtient une solution particulière si la connaissance des conditions initiales permet de fixer les valeurs de a et φ. Nous verrons un exemple au cours de l'étude dynamique qui suit.

Retenons que :

L'équation différentielle : $y'' + k \cdot y = 0 \quad (k > 0)$
a pour solution générale : $a \cdot \sin(\sqrt{k}.t + \varphi)$

II- L'ETUDE DYNAMIQUE

1°) Expression de la force

Si un point matériel est en mouvement rectiligne sinusoïdal sur un axe Ox, son accélération est :

$$\gamma = -\omega^2 x$$

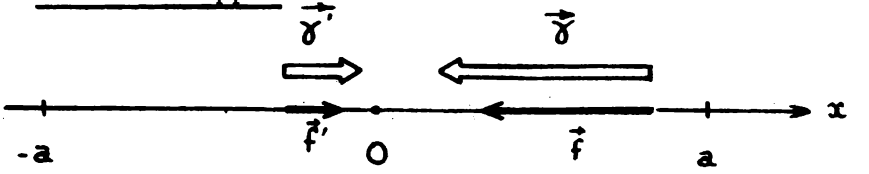
La force responsable de cette accélération est, d'après la relation fondamentale de la dynamique :

$$\boxed{f = m.\gamma = -m\omega^2 x}$$

La force et l'accélération étant constamment proportionnelles, les résultats énoncés pour l'accélération s'appliquent aussi à la force :

- la valeur algébrique de la force est proportionnelle à la valeur algébrique de l'élongation et a le signe contraire ;

- le vecteur espace et le vecteur force ont des sens contraires : la force est orientée vers l'origine. Elle tend à rappeler le point matériel vers l'origine : c'est une force de rappel.



D'une façon générale, une force du type $f = -k \cdot x$ avec $k > 0$ est une force de rappel.

2°) Réciproque

Si un point matériel de masse m, en mouvement sur un axe Ox est soumis à tout instant à une force de rappel $f = -k.x$, il est en mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation horaire :

$$x = a \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right)$$

Démonstration

Connaissant $f = -k.x$, on établit l'équation différentielle du mouvement :

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot \gamma = -k \cdot x \\ m \cdot x'' = -k \cdot x \end{array}\right\} \Longrightarrow x'' + \frac{k}{m} \cdot x = 0 \qquad \text{avec } \frac{k}{m} > 0.$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

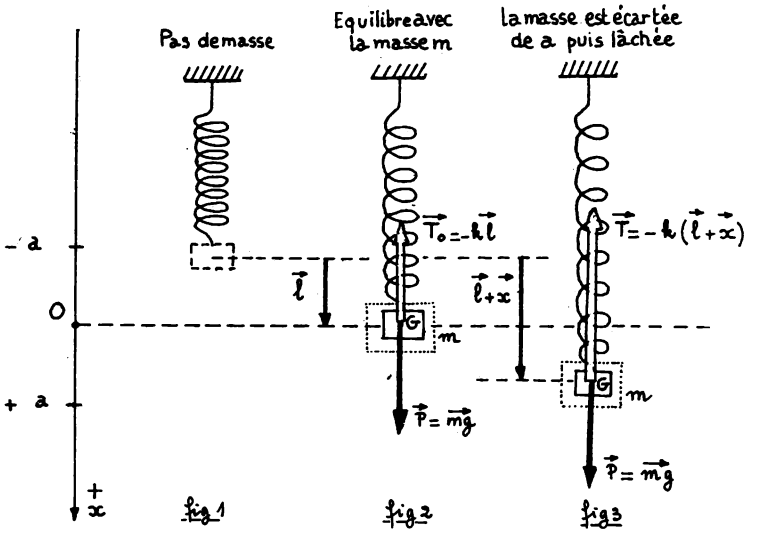
$$x = a \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right).$$

C'est l'équation horaire d'un mouvement rectiligne

sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

II - LE PENDULE ELASTIQUE. UN EXEMPLE DE MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOÏDAL

Le dispositif formé d'une masse m suspendue à l'extrémité inférieure d'un ressort à spires non jointives et de masse négligeable devant m est un pendule élastique. Nous allons étudier le mouvement de la masse m.



- La figure 1 correspond à l'équilibre du ressort non chargé.
- La figure 2 représente la masse m en équilibre à l'extrémité du ressort. La position de son centre de gravité est choisie comme origine des espaces.

- La figure 3 représente la masse m en mouvement. Elle a été écartée de a de sa position d'équilibre puis abandonnée. La figure représente l'état du système pour une valeur quelconque x de l'élongation.

1°) Expression de la résultante des forces extérieures.

A l'équilibre de la figure 2, le ressort est allongé de $\vec{l}$. La masse m est soumise à deux forces extérieures :

- son poids $\vec{p} = m\vec{g}$;

- la tension du ressort : $\vec{T}_o = -k\vec{l}$. k est la raideur du ressort (le signe - est justifié par les sens contrai-

res de $\vec{\ell}$ et $\vec{T}_o$)

La condition d'équilibre de m s'écrit :

$$\vec{mg} + (-k\vec{\ell}) = \vec{0}$$

En projetant sur l'axe Ox orienté, nous obtenons la relation algébrique :

$$mg - k\ell = 0$$

Figure 3 : lorsque l'élongation du centre de gravité de la masse est x, l'allongement du ressort est $\vec{\ell} + \vec{x}$. La masse m est alors soumise à deux forces extérieures :

- son poids $\vec{p} = \vec{mg}$;
- la tension du ressort $\vec{T} = -k(\vec{\ell} + \vec{x})$.

La résultante des forces extérieures est :

$$\vec{F} = \vec{mg} + [-k(\vec{\ell} + \vec{x})]$$

Nous obtenons une relation algébrique en projetant sur l'axe orienté. Le sens de $\vec{F}$ est inconnu a priori. Nous appelons F sa valeur algébrique :

$$F = mg - k(\ell + x) = mg - k\ell - kx$$

Compte tenu de la relation $mg - k\ell = 0$ établie plus haut :

$$\boxed{F = -k \cdot x}$$

2°) Nature du mouvement. Période.

La masse m est soumise à une force de rappel $F = -kx$. Nous avons démontré au § II qu'elle est en mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation horaire :

$$x = a \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi\right)$$

. a est l'amplitude du mouvement imposée par l'expérimentateur ;

. φ , phase initiale, dépend de l'origine des temps choisie (voir exercice 1).

La pulsation du mouvement est $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et sa période $T = \frac{2\Pi}{\omega}$

$$\boxed{T = 2\Pi \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

La période d'un pendule élastique dépend de ses caractéristiques: masse m suspendue et coefficient de raideur k du ressort, mais elle est indépendante de l'amplitude des oscillations.

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 9

I - ETUDE CINEMATIQUE DU MOUVEMENT RECTILIGNE SINUSOÏDAL

1°) Définitions

Un point est en mouvement rectiligne sinusoïdal si sa trajectoire est rectiligne et si son élongation est une fonction sinusoïdale du temps :

$$y = a \sin(\omega t + \varphi)$$

- y : élongation à l'instant t ;
- a : amplitude du mouvement ;
- $\omega t + \varphi$: phase à l'instant t (exprimée en radians)
- φ : phase initiale ;
- ω pulsation (exprimée en radians par seconde).

Le mouvement rectiligne sinusoïdal peut être considéré comme le mouvement de la projection sur un diamètre d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme.

2°) Période et fréquence

Le mouvement rectiligne sinusoïdal est périodique. Sa période et sa fréquence sont :

$$T = \frac{2\Pi}{\omega} \quad (s) \qquad N = \frac{\omega}{2\Pi} \quad (Hz)$$

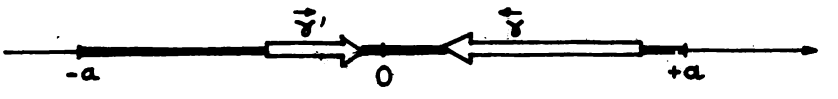
3°) Vitesse et accélération

En dérivant deux fois par rapport au temps l'équation horaire, on obtient successivement :

- la vitesse : $v = a\,\omega \cos(\omega t + \varphi) = a.\,\omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\Pi}{2})$ de même pulsation que l'élongation et en quadrature avance sur elle.

- l'accélération : $\gamma = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

$$\gamma = -\omega^2 y$$



L'accélération est proportionnelle à l'élongation et de signe contraire. Le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ est toujours dirigé vers l'origine O.

4°) L'équation différentielle

$\gamma = -\omega^2 y \quad \Longrightarrow$

$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \omega^2 > 0$

La solution générale est : $y = a \sin(\omega t + \varphi)$

II- ETUDE DYNAMIQUE

1°) La force de rappel

Un mobile en mouvement rectiligne sinusoïdal est soumis à une force de rappel :

$f = -m\omega^2 y$ du type : $f = -k \cdot y \quad y > 0$

La force est proportionnelle à l'élongation. Sa valeur algébrique et celle de l'élongation sont de signes contraires.

La force est toujours dirigés vers l'origine des espaces.

2°) Réciproque

Si un point de masse m, en mouvement sur un axe Oy est soumis à une force de rappel.

$$f = -k \cdot y$$

L'équation différentielle de son mouvement est :

$m\gamma = -k \cdot y$

$my'' = -k \cdot y \quad \Longrightarrow \quad y'' + \frac{k}{m} y = 0 \qquad \frac{k}{m} > 0$

Il est donc en mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation horaire :

$$y = a \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi\right)$$

de pulsation : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

de période : $T = 2\Pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Chapitre 9

EXERCICES

1/ Un pendule élastique est formé d'un ressort de masse négligeable à spires non jointives qui s'allonge de 1,25 cm lorsqu'on suspend une masse de 100 g à son extrémité inférieure.

La masse de 100 g étant à l'équilibre, on l'écarte de sa position d'équilibre de 0,8 cm puis on l'abandonne. Déterminer l'équation de son mouvement dans les cas suivants :

a/ On déclenche le chronomètre à l'instant où l'on abandonne la masse.

b/ On déclenche le chronomètre à l'instant où elle passe pour la première fois par sa position d'équilibre en montant ($v < 0$ si l'axe est orienté vers le bas).

c/ On déclenche le chronomètre lorsque la masse repasse par sa position d'équilibre en descendant ($v > 0$ si l'axe est orienté vers le bas).

2/ En un lieu où $g = 9{,}80$ N/kg, un plateau de masse $m = 100$ g repose horizontalement sur un ressort à boudin vertical. L'extrémité supérieure du ressort est solidaire du plateau tandis que son extrémité inférieure est fixe. Des glissières ne permettent au plateau qu'un mouvement de translation vertical. On négligera les frottements ainsi que la masse du ressort.

1°) En posant sur le plateau une masse de 100 g, on constate que le plateau s'abaisse de 2,5 mm. Etant donné que la hauteur du ressort diminue d'une quantité proportionnelle au poids qu'il supporte, calculer le coefficient de proportionnalité entre la force appliquée au ressort et sa variation de longueur.

2°) On remplace la masse de 100 g par une masse quelconque M. On fait osciller l'ensemble du plateau et de la charge en l'écartant très légèrement de sa position d'équilibre, puis en l'abandonnant. Quelle est alors la période T des oscillations ? Comment varie-t-elle avec M ?

3°) Montrer qu'on ne peut donner au système des oscillations d'amplitude trop grande sans que la charge décolle du plateau. A partir de quelle valeur a de l'amplitude

cela doit-il se produire ? Comment a varie-t-il avec M ?

4°) Le plateau étant en équilibre et portant une masse de 100 g, on tire verticalement sur la face inférieure du plateau avec force f de façon à abaisser le plateau de 20 mm, puis on supprime brusquement f. Déterminer avec quelle vitesse la charge va être lancée et à quelle hauteur elle va s'élever.

Application numérique pour la deuxième et la troisième question : M = 100 g.

(Baccalauréat)

3/ Détermination statique et dynamique de la raideur d'un ressort de masse non négligeable

A/ Détermination statique

On accroche successivement les masses m_1 = 0,2000 kg et m_2 = 0,4000 kg à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical de masse m_o, munie d'un index. L'index s'immobilise successivement devant les graduations x_1 = 45,00 mm ± 0,25 mm et x_2 = 123,50 mm ± 0,25 mm d'une règle verticale.

Sachant que dans le domaine d'utilisation, les variations d'allongement du ressort sont proportionnelles aux variations de la force appliquée à sa partie inférieure, calculer la raideur k du ressort et son incertitude absolue. g = 9,80 N/kg.

B/ Détermination dynamique

Dans les questions 1 et 2 du § B/, on négligera la masse m_o du ressort.

1°) Une masse m est en équilibre à l'extrémité inférieure du ressort .On l'écarte verticalement de sa position d'équilibre et on l'abandonne. Déterminer la nature de ses oscillations et en déduire leur période en fonction de m et k.

2°) On chronomètre la durée de 100 oscillations pour deux valeurs de m :

m_1 = 0,2000 kg	100 T_1 = 58,9s ± 0,1 s
m_2 = 0,4000 kg	100 T_2 = 81,4s ± 0,1 s

Calculer les valeurs numériques k_1 et k_2 de la raideur du ressort, ainsi que leurs incertitudes absolues (les incertitudes relatives sur les masses sont négligeables devant celles sur les durées). Comparer les valeurs de k_1 et de k_2 entre elles et avec k, valeur obtenue au cours de la détermination statique.

3°) Ces résultats montrent qu'on ne peut pas négliger la masse m_o du ressort. En effet, sa spire inférieure oscille avec la même amplitude a que celle de m ; sa spire supérieure est immobile. Les spires intermédiaires oscillent avec des amplitudes comprises entre a et zéro. D'où l'hypothèse : tout se passe comme si une certaine fraction $\alpha\, m_o$ $(0 < \alpha < 1)$ de la masse m_o oscillait avec l'amplitude maximale a. Par suite, le système formé de la masse m suspendue au ressort de masse m_o équivaut à un système formé d'une masse $(m + \alpha\, m_o)$ suspendue à un ressort de masse nulle.

a/ Donner dans cette hypothèse l'expression de T_1 en fonction de $(m_1 + \alpha m_o)$ et de k', raideur du ressort. Exprimer de même T_2 en fonction de $(m_2 + \alpha m_o)$ et de k'. En déduire l'expression de k' en fonction de m_1 , m_2 , T_1 et T_2 . Calculer k' en utilisant les valeurs numériques du tableau ci-dessus et comparer à la valeur de la raideur obtenue par la méthode statique.

b/ La masse du ressort est m_o = 59 g. Vérifier que $\alpha = \frac{1}{3}$

4°) Cette question ne peut être résolue à ce niveau du cours : elle concerne l'énergie mécanique qui sera étudiée ultérieurement.

La masse m_1 = 0,200 kg et le ressort, de raideur k = 25,0N/m et de masse m_o sont enfilés sur une tige horizontale. Le système équivaut à une masse $M = (m_1 + \alpha m_o)$ pouvant osciller sans frottement à l'extrémité d'un ressort de masse nulle, dont l'autre extrémité est fixe. On appelle énergie vibratoire totale, la somme $E = \frac{1}{2} M y^2 + \frac{1}{2} k x^2$ de l'énergie cinétique de M et de l'énergie élastique du ressort.

a/ Partant de l'équation horaire de M, montrer que l'énergie vibratoire totale du système est indépendante de x, donc constante pour une amplitude de vibration a donnée.

b/ Calculer numériquement cette énergie vibratoire totale lorsque l'amplitude des vibrations est $a=1,00.10^{-2}$

4/

1°) On veut déterminer la constante de raideur k d'un ressort à spires non jointives et de masse négligeable. Pou cela, on fixe à un support l'extrémité supérieure du ressort et l'on accroche à l'autre extrémité une masse considérée comme ponctuelle : M = 100 g. Le ressort prend ainsi une longueur ℓ. On communique au ressort un allongement supplémentaire a et on l'abandonne à lui même sans vitesse initiale. On chronomètre la durée de 100 oscillations et l'on trouve 70.0 s.

a/ Quelle est la constante de raideur k du ressort ?

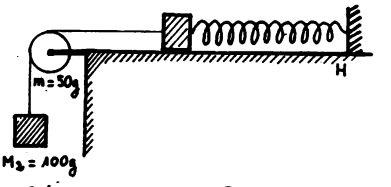
b/ La durée de 100 oscillations étant mesurée à un dixième de seconde près, avec quelle précision connaît-on la valeur de k ?

2°)On fixe l'extrémité supérieure du ressort à un axe vertical animé d'un mouvement de rotation uniforme. La masse M est accrochée à l'extrémité inférieure du ressort. On réalise ainsi un pendule conique. L'axe du ressort fait un angle de 12° avec la verticale.

a/ Quelle est la longueur du ressort, si sa longueur lorsqu'il n'est pas déformé est ℓ_o = 15 cm ?

b/ Quelle est la vitesse angulaire du système ? On prendra g = 9,80 N/kg.

3°)A l'aide du ressort précédent, on réalise le dispositif indiqué par la figure.



La masse M_1 = 100 g peut glisser sans frottement sur le plan horizontal H.

La masse de la poulie est m = 50 g, son rayon est R et son moment d'inertie

$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

La masse M_2 est égale à 100 g.

Le système étant en équilibre, on abaisse la masse M_2

de a puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

Quelle est la période des oscillations du système ? Le fil de liaison (M_1 M_2) est supposé sans masse, inextensible et ne glissant pas sur la poulie. La poulie tourne sans frottement autour de son axe.

(Baccalauréat, partiel).

5/

1°) Un ressort à boudin, de masse négligeable, est suspendu par une de ses extrémités à un support fixe. A l'autre extrémité, on accroche une masse

$$M = 150 \text{ grammes.}$$

On écarte M de sa position d'équilibre, verticalement vers le bas et l'on abandonne le système sans vitesse initiale.

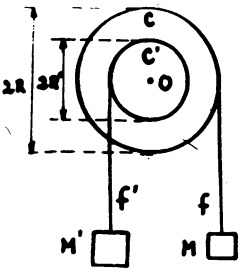
Montrer que M effectue des oscillations de période T. On mesure la durée de 100 oscillations et l'on trouve.

$$t = 100\ T = 62{,}8 \text{ secondes ;}$$

en déduire la constante de raideur k du ressort exprimée en newtons par mètre. Sachant que t a été déterminé à 0,4 s près, avec quelle précision la constante k est-elle connue ? (La masse M est supposée connue avec une incertitude relative négligeable).

2°) Une poulie, formée de deux cylindres solidaires C et C' coaxiaux, de rayons R = 20 cm et R' = 10 cm, peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal O. Le moment d'inertie de la poulie est

$$J = 4{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



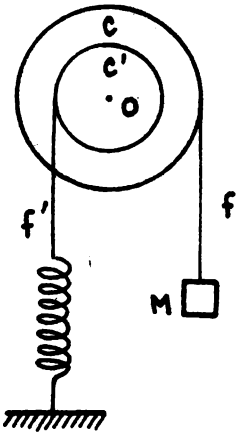
On enroule sur le cylindre C un fil f à l'extrémité duquel est accrochée une masse M = 150 grammes. Sur le cylindre C' on enroule, en sens contraire, un fil f' à l'extrémité duquel est fixée une masse M' = 200 grammes. Les deux fils sont inextensibles et de masse négligeable.

Le système est abandonné sans vitesse initiale. On demande

a/ d'exprimer les tensions T et T' des fils f et f' en fonction de l'accélération angulaire de la poulie ;

b/ de calculer l'accélération angulaire de la poulie. (On donne $g = 10\ m/s^2$).

3°)On remplace la masse M' par le ressort étudié au 1°). Le ressort étant vertical, l'extrémité supérieure est attachée au fil f', l'extrémité inférieure est fixe. Le système étant en équilibre, on écarte la masse M verticalement vers le bas, puis on abandonne le système sans vitesse initiale.



a/ Calculer l'allongement ℓ du ressort à l'équilibre.

b/ Montrer que la masse M est animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.

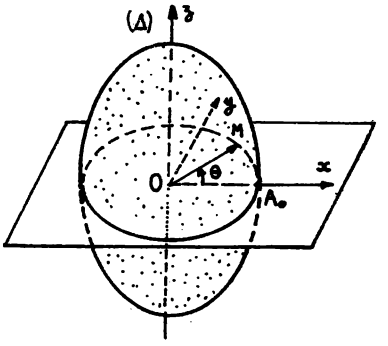
c/ Calculer la période T' de ce mouvement. Avec quelle précision est-elle connue, en supposant que la seule cause d'incertitude provient de la constante de raideur k du ressort ?

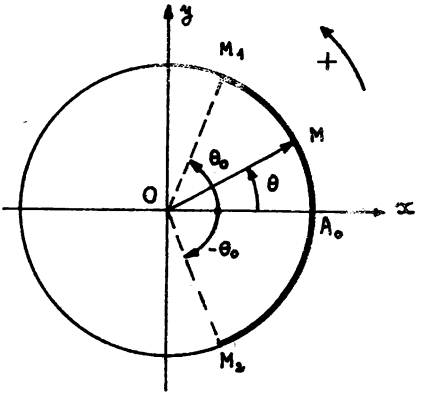
(Baccalauréat, légèrement modifié).

Chapitre 10

LE MOUVEMENT SINUSOIDAL DE ROTATION

I - L'ETUDE CINEMATIQUE





1°) Définitions

Un solide est en mouvement sinusoïdal de rotation autour d'un axe fixe, si l'élongation angulaire de l'un quelconque de ses points est une fonction sinusoïdale du temps :

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

- θ est l'élongation angulaire du point à l'instant t ;

- θ_0 est l'élongation angulaire maximale du point ou amplitude angulaire ; lorsque $\sin(\omega t + \varphi) = 1$, $\theta = +\theta_0$; lorsque $\sin(\omega t + \varphi) = -1$, $\theta = -\theta_0$.

- $\omega t + \varphi$ est la phase à l'instant t. Elle a la dimension d'un angle et s'exprime en radians (dimension zéro).

- φ est la phase initiale ;

- ω est la pulsation ; elle a la dimension d'une vitesse angulaire et s'exprime en radians par seconde. ($[\omega] = T^{-1}$).

Cas particulier

Si la phase initiale du mouvement est nulle, l'équation horaire est :

$$\theta = \theta_0 \sin \omega t.$$

2°) Le mouvement sinusoïdal de rotation est périodique

Sa période est celle de la fonction $\sin(\omega t + \varphi)$. L'étude en a été faite au chapitre précédent.
Nous avons donc :

$$\boxed{T = \frac{2\Pi}{\omega}} \text{ (s)} \quad \text{et} \quad \boxed{N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\Pi}} \text{ (Hz)}$$

3°) La vitesse angulaire

C'est la dérivée par rapport au temps de l'élongation angulaire.

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \theta_o\, \omega \cos(\omega t + \varphi) = \theta_o \omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\Pi}{2})$$

La vitesse angulaire est une fonction sinusoïdale du temps, de même période que l'élongation angulaire, enquadrature avance sur elle. La vitesse angulaire est donc maximale lorsque l'élongation angulaire est nulle et elle est nulle lorsque l'élongation angulaire est maximale ($\theta = \theta_o$).

4°) L'accélération angulaire

C'est la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire. C'est donc la dérivée seconde par rapport au temps de l'élongation angulaire.

$$\theta'' = \frac{d\theta'}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\theta_o\, \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

En remplaçant $\theta_o \sin(\omega t + \varphi)$ par θ :

$$\boxed{\theta'' = -\omega^2 \theta}$$

La valeur algébrique de l'accélération angulaire est proportionnelle à la valeur algébrique de l'élongation angulaire et de signe contraire.

5°) L'équation différentielle du mouvement sinusoïdal de rotation

L'expression précédente donne l'équation différentielle :

$$\boxed{\theta'' + \omega^2 \theta = 0} \qquad \omega^2 > 0$$

Sa solution générale est :

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

II- L'ETUDE DYNAMIQUE

1°) Expression du moment des forces extérieures.

Un solide en mouvement sinusoïdal de rotation autour d'un axe fixe a pour accélération angulaire :

$$\theta'' = -\omega^2 \theta$$

Le moment des forces responsable de cette accélération est, d'après la relation fondamentale de la dynamique de rotation :

$$\boxed{\mathcal{M}_0 = J.\ \theta'' = -J\ .\ \omega^2 \theta}$$

Le moment des forces extérieures agissant sur le solide est proportionnel à l'élongation angulaire et de signe contraire. Il tend donc à rappeler le solide vers sa position d'équilibre : c'est un moment de rappel.

2°) Réciproque

Si un solide de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation est soumis à un moment de rappel $\mathcal{M} = -C.\theta$, il est en mouvement de rotation sinusoïdale d'équation horaire :

$$\theta = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{C}{J}}\, t + \varphi\right)$$

Démonstration

5 Connaissant $\mathcal{M}_0 = -C\ .\theta$, on établit l'équation différentielle du mouvement :

$$J\theta'' = -C\ .\theta \qquad \theta'' + \frac{C}{J}\theta = 0 \qquad \text{avec } \frac{C}{J} > 0$$

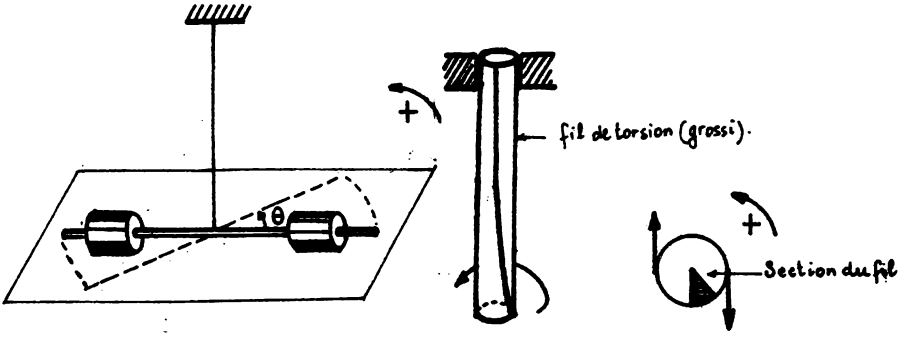
La solution générale de cette équation différentielle est :

$$\theta = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{C}{J}}\, t + \varphi\right)$$

C'est l'équation horaire d'un mouvement sinusoïdal de rotation de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}$

III- LE PENDULE DE TORSION. UN EXEMPLE DE MOUVEMENT SINUSOÏDAL DE ROTATION

Le dispositif est formé d'un fil de torsion métallique fixé à sa partie supérieure et soutenant à sa partie inférieure une tige pesante horizontale. Des surcharges mobiles peuvent êtres ajoutées sur la tige, symétriquement par rapport au fil.



1°) Expression du moment

Une torsion θ du fil dans un sens crée un couple antagoniste. Une étude expérimentale (que l'on peut réaliser en T.P.) montre qu'il s'agit d'un couple de rappel, de moment proportionnel à θ et de signe contraire :

$$\mathcal{M}_{\Delta} = -C \cdot \theta$$

C : constante de torsion du fil, exprimée en m.N/rd.

2°) Nature du mouvement. Période

Le pendule est soumis à un couple de rappel. Nous avons démontré au § II qu'il est en mouvement sinusoïdal de rotation d'équation horaire :

$$\theta = \theta_0 \sin\left(\sqrt{\frac{C}{J}}\, t + \varphi\right)$$

- θ_0 est l'amplitude angulaire du mouvement imposé par l'expérimentateur.
- φ phase initiale, dépend de l'origine des temps choisie (voir exercice 1)

La pulsation du mouvement est $\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}$ et sa période $T = \frac{2\Pi}{\omega}$

$$T = 2\Pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

La période d'un pendule de torsion dépend de ses caractéristiques : moment d'inertie J du dispositif en rotation et constante de torsion C du fil, mais elle est indépendante de l'amplitude angulaire des oscillations.

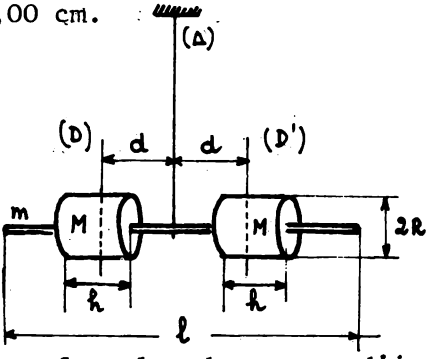
L'ESSENTIEL DES CHAPITRES 9 ET 10

	Mouvement rectiligne sinusoïdal	Mouvement de rotation sinusoïdal
Equation horaire	$x = a \sin(\omega t + \varphi)$	$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$
Période Fréquence	$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad N = \frac{\omega}{2\pi}$	
Vitesse Vitesse angulaire	$v = a\omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$	$\theta' = \theta_0 \omega \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$
	en quadrature avance	
Accélération Accélération angulaire	$\gamma = -\omega^2 x$	$\theta'' = -\omega^2 \theta$
	⬇	⬇
Equation différentielle	$y'' + \omega^2 y = 0$	$\theta'' + \omega^2 \theta = 0$
Force, moment de rappel	$F = -k \cdot x$	$\mathcal{M} = -C \cdot \theta$
Pendule élastique	$m\gamma = -k \cdot x$ ⬇ $x'' + \frac{k}{m} x = 0$ ⬇ $x = a \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \varphi)$ ⬇ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$	$J \cdot \theta'' = -C \cdot \theta$ ⬇ $\theta'' + \frac{C}{J}\theta = 0$ ⬇ $\theta = \theta_0 \sin(\sqrt{\frac{C}{J}}\, t + \varphi)$ ⬇ $\omega = \sqrt{\frac{C}{J}}$ et $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$
Pendule de torsion		
	La période est indépendante pour un pendule donné de l'amplitude (ou de l'amplitude angulaire), des oscillations.	

Chapitre 10

E X E R C I C E S

1/ Le pendule de torsion de la figure suivante comprend: un fil de torsion dont la constante de torsion est $C = 2{,}00.10^{-3}$ m.N/rd ; une tige de longueur $\ell = 30{,}0$cm dont la masse est m = 200 g ; deux cylindres enfilés sur la tige suivant leur axe de révolution, ayant les caractéristiques suivantes : rayon, R = 2,00 cm, hauteur h = 4,00 cm, masse, M = 250 g. La distance de leurs axes de symétrie (D) et (D') à l'axe de rotation (Δ) est d = 4,00 cm.



En utilisant les formules de moment d'inertie du chapitre 8, § III, ainsi que le théorème de Huygens, calculer le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation (Δ).

On écarte le pendule de $\theta_o = 30°$ de sa position d'équilibre puis on l'abandonne. Déterminer numériquement l'équation de son mouvement dans les cas suivants :

a/ On déclenche le chronomètre à l'instant où on abandonne le pendule ;

b/ On déclenche le chronomètre à l'instant où il passe par sa position d'équilibre dans le sens de rotation positif ;

c/ On déclenche le chronomètre à l'instant où il passe par sa position d'équilibre dans le sens de rotation négatif.

2/ Détermination statique et dynamique de la constante de torsion du fil d'un pendule de torsion.

A/ Détermination statique

Le pendule est décrit sur la figure ci-dessous

Quand on suspend les deux masses m et m' identiques, la barre s'écarte, dans le sens de la flèche, de sa position d'équilibre pour occuper la position représentée en pointillé. Pour la ramener dans sa position d'équilibre, il faut imposer une torsion θ en sens inverse à l'extrémité supérieure du fil à l'aide d'un tambour gradué. La barre est alors en équilibre sous l'action de 2 couples antagonistes de modules égaux :

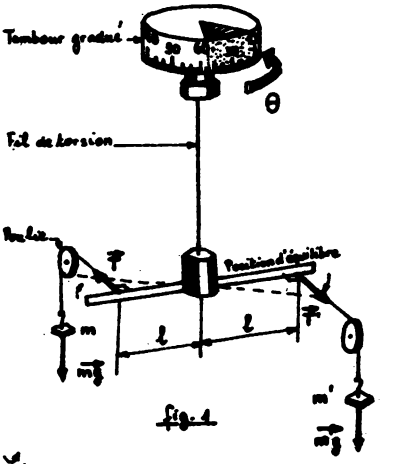


fig. 1

- le moment $\mathcal{M}'$ des tensions des fils :

  $|\mathcal{M}'| = T \cdot 2\ell = mg \cdot 2\ell$

- le moment du couple de rappel du fil :

  $\mathcal{M}$ tel que : $|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}'|$

On donne aux masses m diverses valeurs. On mesure les torsions θ qui ramènent la barre à sa position d'équilibre. Pour g = 9,80 N/kg et 2 ℓ = 16,1 cm, connus avec des incertitudes relatives négligeables on obtient:

m(kg)	$\|\mathcal{M}\| = mg \cdot 2\ell$ (m.N)	$\theta \pm \Delta\theta$ (rd)
0,00	0,00	0,00
$10,0.10^{-3}$	$1,58.10^{-2}$	0,40 ± 0,01
$20,0.10^{-3}$	$3,16.10^{-2}$	0,82 ± 0,02
$30,0.10^{-3}$	$4,74.10^{-2}$	1,22 ± 0,02
$40,0.10^{-3}$	$6,32.10^{-2}$	1,62 ± 0,02

Tracer sur papier millimétré la courbe $|\mathcal{M}| = f(\theta)$. On porte les domaines d'incertitude de θ en abscisse (5cm pour 0,40 rd) et $|\mathcal{M}|$ en ordonnées (5cm pour $2,00.10^{-2}$ m.N)

Peut-on, d'après cette courbe, préciser comment varie $|\vec{M}|$ en fonction de θ ? Calculer, en utilisant la courbe la constante de torsion C du fil et son incertitude absolue.

B/ ETUDE DYNAMIQUE

1°) Les masses m et m' étant supprimées, on donne au pendule une amplitude θ_o et on l'abandonne. On appelle J_o le moment d'inertie du pendule.

a/ Etablir l'équation différentielle de son mouvement

b/ En déduire la nature de ce mouvement et exprimer sa période en fonction de J_o et C.

c/ La durée de 200 périodes est 200 T = 99,2s ± 0,1s. Calculer J_o et ΔJ_o en ne tenant compte que des incertitudes relatives non négligeables. ($4\Pi^2$=39,5)

2°) On fixe sur la barre deux surcharges identiques de masses M = M' = 158,0 g ± 0,5 g. La distance de l'axe de rotation (Δ) aux axes de symétrie (D) et (D') des surcharges est d.

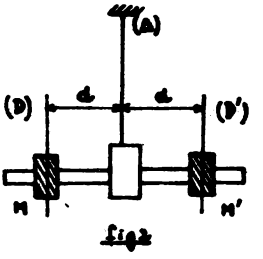


fig2

a/ Etablir l'expression du nouveau moment d'inertie J du pendule en fonction de J_o , J_D , moment d'inertie de chaque surcharge par rapport à leur axe de symétrie, M et d.

b/ Pour d_1 = 10,00 cm ± 0,05 cm, on chronomètre 100 périodes du pendule. On obtient : 100 T_1 = 186,0s ± 0,1s. De même, pour d_2 = 3,00 cm ± 0,05cm, on chronomètre 100 périodes et on obtient: 100 T_2 = 75,8s ± 0,1s.

Donner l'expression de la constante de torsion en fonction de M, d_1 , d_2 , T_1 et T_2 . Calculer C et ΔC.

(On donne $8\Pi^2M$ = 12,5 S.I.). Noter que $\Delta d_1 = \Delta d_2 = \Delta d$ et que les incertitudes relatives sur T_1 , T_2 et M sont négligeables.

c/ Les deux méthodes de détermination de C, statique et dynamique, donnent-elles des résultats concordants ?

C/ DEUXIEME ETUDE DYNAMIQUE

Le dispositif est celui de la figure 2.

1°) Exprimer la période du pendule en fonction de J_o, J_D, M, d^2 et C. Montrer que T^2 peut s'exprimer sous la forme.

$$T^2 = A.d^2 + B$$

2°) On mesure la période des oscillations du pendule pour d variant de 3,00 cm à 9,00 cm avec Δd = 0,05 cm et des incertitudes relatives sur T négligeables.

d(m)	d_m^2 (m^2)	d^2 (m^2)	T(s)	$T^2(s^2)$
$3,00.10^{-2}$			0,758	
$4,00.10^{-2}$			0,894	
$5,00.10^{-2}$			1,039	
$6,00.10^{-2}$			1,192	
$7,00.10^{-2}$			1,352	
$8,00.10^{-2}$			1,518	
$9,00.10^{-2}$			1,683	

Compléter le tableau et tracer sur papier millimétré la courbe $T^2 = f(d^2)$. En abscisses : 2cm pour $1,00.10^{-3} m^2$; en ordonnées : 5 cm pour $1,00. s^2$.

Déduire de cette courbe un troisième encadrement de la constante de torsion C du fil. Ce résultat concorde-t-il avec les précédents ?

3/ Deux cylindres homogènes C_1 et C_2 , de rayons respectifs R et $\frac{R}{2}$ et de masses respectives M et $\frac{M}{2}$ sont accolés par leur base, de façon que leurs axes soient confondus. Une tige t, cylindrique les traverse, selon leur axe commun (Δ) et est liée de façon permanente à ces cylindres. Le moment d'inertie de t par rapport à (Δ) est négligeable. Le système C_1 ,C_2 , t (désigné par S) peut tourner sans frottement autour de l'axe(Δ)

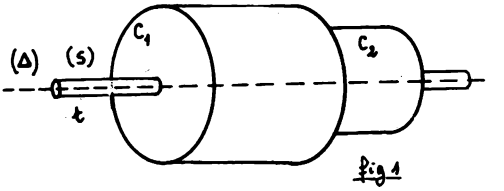


Fig 1

1°) Exprimer, en fonction de M et R, le moment d'inertie de ce système par rapport à l'axe (Δ). (On rappelle que le moment d'inertie d'un cylindre homogène est égal à la moitié du produit des mesures de sa masse et du carré de son rayon).

Application numérique : M = 2,00 kg, R = 0,10 m.

2°) L'axe (Δ) est maintenu horizontal et sans translation par un support non représenté. Un ressort spiral de masse et de moment d'inertie négligeables est fixé par une de ses extrémités à la tige t et par l'autre à un point fixe K. Il impose au système une certaine position d'équilibre. Si l'on fait tourner le système d'un angle θ à partir de cette position d'équilibre, le ressort exerce sur le système un couple de rappel de moment proportionnel à l'angle θ.

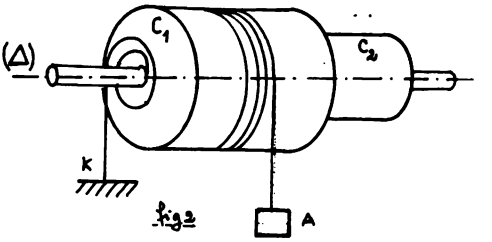


fig 2

On attache à la périphérie de C un fil que l'on enroule à spires non jointives autour du cylindre. Le fil est inextensible sans raideur et de masse négligeable. A son extrémité on attache un solide A de masse m.

a/ Le système prend alors, sous l'action de A et du ressort spiral une nouvelle position d'équilibre faisant avec la précédente un angle θ_o. Exprimer cet angle θ_o.

Application numérique : m = 0,500 kg, constante de torsion du ressort spiral 0,25 m.N/rd, g = 10 m/s^2.

b/ On peut rompre cet équilibre de deux façons :

- en détachant le ressort spiral du point K.
- en brûlant le fil au dessus de A.

Montrer que dans la première hypothèse, le système S prend un mouvement de rotation uniformément varié.

Calculer alors numériquement l'accélération angulaire et la tangente du fil.

Montrer que dans la deuxième hypothèse le système prend un mouvement sinusoïdal de rotation. Etablir la loi horaire de son mouvement, l'origine du temps étant l'instant où le fil se rompt.

c/ Comment seraient modifiés la position d'équilibre du système S et les deux mouvements ci-dessus si le fil était initialement enroulé sur le cylindre C ?

3°)

a/ Le système est à nouveau dans les conditions de la question 2°) a/ , c'est-à-dire en équilibre sous l'action du ressort spiral et de la masse A. On tire alors le corps A verticalement, vers le bas, d'une longueur x_o, et on l'abandonne sans vitesse initiale. Etudier les mouvements pris par le système des cylindres et par le corps A. Ecrire les lois horaires de ces mouvements, en prenant pour origine des temps l'instant où on lâche A et pour sens positif le sens dans lequel s'est effectué le déplacement initial x_o.

Application numérique : $x_o = 0,10$ m, les autres valeurs numériques restant les mêmes qu'aux questions précédentes.

b/ Montrer que le déplacement x_o que l'on donne au corps A avant de l'abandonner, ne peut dépasser une certaine valeur x_1 si l'on veut que le fil reste constamment tendu pendant le mouvement.

c/ Dans le cas où $x_o = x_1$, quelle est la position du corps A pour laquelle la tension du fil est maximale et quelle est alors sa valeur ?

d/ On admet maintenant qu'au moment où le fil n'est plus tendu la masse A se décroche. Après combien de temps la masse A passera-t-elle à nouveau par la position d'équilibre qu'elle occupait au 2°) a/, si l'on a choisi $x_o = 0,70$ m ? (Les dimensions du dispositif sont telles que la masse A ne vient jamais heurter les cylindres).

(Baccalauréat)

Chapitre 11

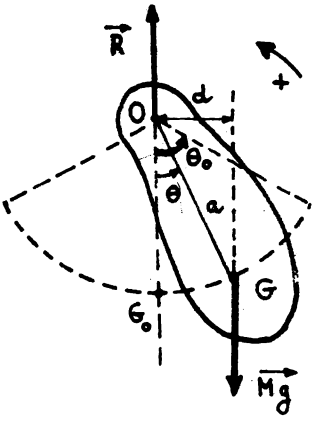
LE PENDULE PESANT

DEFINITION

Un pendule pesant est un solide mobile sans frottement autour d'un axe horizontal (O) ne passant pas par son centre de gravité.

I -L'EQUATION DU MOUVEMENT

1°)Les forces et leur moment



Désignons par :

- M la masse du pendule ;
- J son moment d'inertie par rapport à O;
- G son centre de gravité ;
- $\overline{OG}$ = a, la distance du centre de gravité à l'axe de rotation.

Dans sa position d'équilibre stable, le centre de gravité est en G_o, sur la verticale de O et au-dessous. On écarte le pendule de θ_o par rapport à la verticale et on l'abandonne : il oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre avec une amplitude θ_o.

Les forces extérieures agissant sur le pendule sont :

- son poids $\vec{Mg}$;
- la réaction de l'axe de rotation $\vec{R}$.

La relation fondamentale de la dynamique de rotation s'écrit :

$$\sum \mathcal{M}_o = J \cdot \ddot{\theta}$$

Nous supposons l'axe de rotation parfait de sorte que la réaction $\vec{R}$ est une force verticale passant par l'axe : son moment est nul.

d = a sinθ étant la distance du support de $\vec{Mg}$ à l'axe, le moment de $\vec{Mg}$ est :

$$\mathcal{M}_o = -Mg \cdot d = -Mga \cdot \sin\theta$$

Pour $\theta > 0$, le moment de $\vec{Mg}$ tend à faire tourner le pendule dans le sens négatif de rotation ; pour $\theta < 0$, il tend à la faire tourner dans le sens positif.

Les valeurs algébriques de $\mathcal{M}$ et $\sin\theta$ sont toujours de signes contraires, ce qui explique le signe (-) dans l'expression du moment.

R.F.D. de rotation :

$$-Mga\sin\theta = J.\theta'' \quad (1)$$

2°) L'équation différentielle du mouvement

Partant de l'équation (1), on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$\theta'' + \frac{Mga}{J}\sin\theta = 0$$

Une telle équation différentielle, du type $f(\theta'', \sin\theta) = 0$ n'a pas de solution simple: Le pendule pesant n'est pas animé d'un mouvement sinusoïdal de rotation.

3°) L'équation différentielle du mouvement pour les faibles amplitudes

Si θ_o n'excède pas $6°$, on peut confondre $\sin\theta$ avec θ (rd) avec une erreur relative inférieure à 2 millièmes. L'équation différentielle devient alors :

$$\theta'' + \frac{Mga}{J}\theta = 0 \qquad \text{avec } \frac{Mga}{J} > 0$$

C'est l'équation différentielle d'un mouvement sinusoïdal de rotation d'équation horaire :

$$\theta = \theta_o \sin\left(\sqrt{\frac{Mga}{J}} \cdot t + \varphi\right)$$

II- PROPRIETES DU MOUVEMENT PENDULAIRE

1°) Isochronisme des oscillations de faible amplitude

On chronomètre la période des oscillations d'un pendule pour des valeurs croissantes de son amplitude.

Dans une première série de mesures, la précision est de $\frac{1}{100}$ s et dans une seconde série elle est de $\frac{1}{1000}$ s.

θ_o (°) degrés	T(s) Précision $\frac{1}{100}$ s	T(s) Précision $\frac{1}{1000}$ s
2	1,36	1,360
4	1,36	1,360
6	1,36	1,361
8	1,36	1,362
10	1,36	1,363
15	1,37	1,366
30	1,38	1,383
40	1,40	1,401

Si la période est mesurée avec une précision du $\frac{1}{100}$ s, elle ne semble pas dépendre de l'amplitude θ_o lorsque celle-ci est inférieure à 15°. On dit qu'il y a isochronisme des oscillations pour des amplitudes inférieures à 15°. (isochronisme = même durée).

Pour des mesures au $\frac{1}{1000}$ s, l'isochronisme n'est vérifié que pour des oscillations d'amplitudes inférieures à 6°. Plus les mesures sont précises, plus le domaine d'amplitudes où l'isochronisme est vérifié est restreint.

Ces expériences montrent que la période du pendule est une fonction croissante de son amplitude. Le mouvement pendulaire n'est donc pas un mouvement sinusoïdal comme dans le cas du pendule élastique ou dans celui du pendule de torsion dont les périodes sont indépendantes de l'amplitude des oscillations.

2°) Expressions de la période

a/ Pour des faibles amplitudes

Si l'on peut confondre $\sin\theta$ et θ (rd), l'équation différentielle est :

$$\theta'' + \frac{Mga}{J}\theta = 0 \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{Mga}{J}}\right)$$

ce qui revient à assimiler le mouvement pendulaire à un mouvement sinusoïdal de rotation de période :

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mga}}$$

J en $kg.m^2$
M en kg
a en m
T_o en s

b/ Pour des amplitudes moyennes

Si l'on ne peut pas confondre sin θ et θ (rd), l'équation différentielle est :

$$\theta'' + \frac{Mga}{J}\sin\theta = 0$$

On démontre que la période est une fonction croissante de l'amplitude θ_o :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mga}} \cdot \left(1 + \frac{\theta^2}{16}°\right)$$

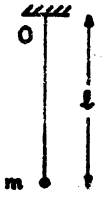
$$T = T_o \cdot \left(1 + \frac{\theta_o^2}{16}\right)$$

θ_o en rd

Dans la seconde expression, T_o est la période pour les faibles amplitudes.

III-LE PENDULE SIMPLE

1°) Définition



Un pendule simple est un dispositif formé d'un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible et sans masse, dont l'autre extrémité est fixe.

Un tel pendule n'existe pas (point matériel, fil sans masse). Dans la pratique, on utilise une petite sphère suspendue à fil de très faible masse.

La longueur du pendule est la distance ℓ du point de suspension au centre de la sphère.

2°) La période pour les faibles amplitudes

L'étude précédente s'applique sans modification au pendule simple. Le moment d'inertie de la masse ponctuelle m est $j = m\ell^2$. La période est :

$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{j}{mg\ell}} = 2\Pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}}$$

$$\boxed{T = 2\Pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

en m
g en m/s^2
T en s

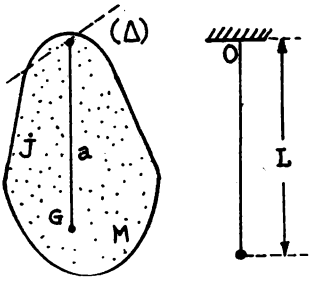
La période est indépendante de la masse de la sphère suspendue. Elle est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule.

Connaissant la longueur et la période d'un pendule on peut calculer une valeur approchée de l'accélération de la pesanteur. On a en effet :

$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \Longrightarrow \quad g = 4\Pi^2\frac{\ell}{T^2}$$

3°) Pendule simple synchrone d'un pendule pesant

Un pendule simple est synchrone d'un pendule pesant si les deux pendules ont même période.



Soit $T_1 = 2\Pi\sqrt{\frac{J}{Mga}}$ la période du pendule pesant.

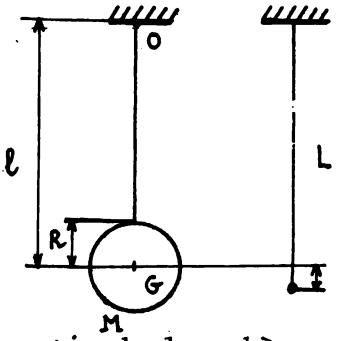
Soit $T_2 = 2\Pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ la période du pendule simple.

On doit avoir $T_1 = T_2$, ce qui permet de calculer la longueur que doit avoir le pendule simple pour être synchrone du pendule pesant :

$$\frac{L}{g} = \frac{J}{Mga} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L = \frac{J}{M.a}}$$

Exemple

Un pendule pesant est formé d'une sphère de rayon R, dont le centre de gravité G est à la distance ℓ de l'axe de rotation. Quelle est la longueur du pendule simple synchrone ?



Le moment d'inertie de la sphère pra rapport à un axe passant par G est :

$$J_G = \frac{2}{5} MR^2$$

D'après le théorème de Huygens, son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est :

$$J = M\left(\frac{2}{5} R^2 + \ell^2\right)$$

Longueur du pendule simple synchrone :

$$L = \frac{M\left(\frac{2}{5} R^2 + \ell^2\right)}{M\ell} \quad \Rightarrow \quad L = \ell + \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell}$$

Si l'on assimile le pendule pesant à un pendule simple de longueur ℓ, on commet une erreur absolue :

$\delta L = \ell - L = -\frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell}$ (négative puisque $\ell < L$).

L'erreur relative :

$$\frac{\delta L}{L} \simeq \frac{\delta L}{\ell} = \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell^2}$$

Application numérique

ℓ = 1m, R = 1cm. L'erreur relative vaut $\simeq 4.10^{-5}$: elle est très faible et on peut assimiler le pendule pesant à un pendule simple.

IV - MESURE D'UNE PERIODE PAR LA METHODE DES COINCIDENCES

Soient deux pendules simples de longueurs ℓ et ℓ'. Nous supposons ℓ légèrement supérieure à ℓ'. Par suite, la période T est légèrement supérieure à T'.

Supposons de plus que la période T est très bien connue. On peut mesurer expérimentalement T' par la méthode des coïncidences illustrée ci-dessous.

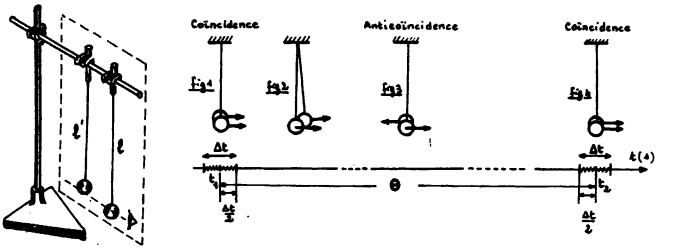


Figure 1 : A l'instant t_1 les pendules passent en même temps par leur position d'équilibre. Il y a coïncidence.

Figure 2 : Mais le pendule (ℓ') pour lequel $T' < T$ oscille plus vite. Il prend de l'avance sur le pendule (ℓ).

Figure 3 : Lorsque le pendule (ℓ') a gagné $\frac{1}{2}$ oscillation, les deux pendules passent en même temps par leur position d'équilibre, mais en sens contraires : il y a anticoïncidence.

Figure 4 : A l'instant t_2 le pendule (ℓ') a gagné une oscillation complète sur le pendule (ℓ). Les deux pendules passent à nouveau ensemble par leur position d'équilibre dans le même sens. Il y a de nouveau coïncidence.

Soit $\theta = t_2 - t_1$ la durée séparant deux coïncidences successives. Pendant cette durée :

- Le pendule (ℓ) a effectué n oscillations de durée T chacune ;
- Le pendule (ℓ') a effectué n+1 oscillations de durée T' chacune.

On a donc :

$\theta = nT$ (1) et $\theta = (n+1)T'$ (2)

Nous déduisons de ces relations deux expressions de n:

D'après (1) : $n = \frac{\theta}{T}$ (3). D'après (2) :

$n+1 = \frac{\theta}{T'} \Longrightarrow n = \frac{\theta}{T'} - 1$ (4). On a (3)=(4) puisque n = n.

Donc : $\frac{\theta}{T} = \frac{\theta}{T'} - 1$. On achève le calcul et l'on trouve l'expression de T' en fonction de T et θ :

$$T' = \frac{T\,\theta}{T + \theta}$$

Il est vivement conseillé de ne pas apprendre cette formule, mais de savoir la redémontrer.

Si le pendule (ℓ') est plus long que le pendule (ℓ) et oscille moins vite que lui, un calcul analogue conduit à :

$$T' = \frac{T\,\theta}{\theta - T}$$

Incertitude absolue sur la durée θ séparant deux coïncidences : les pendules ayant des périodes très voisines, une coïncidence semble durer Δt secondes. On estime alors que la coïncidence s'est produite au milieu du segment Δt. L'instant t_1 de la coïncidence est donc connu avec une incertitude absolue $\frac{1}{2}\Delta t$. De même, l'instant t_2 de la coïncidence suivante est connu avec une incertitude absolue $\frac{1}{2}\Delta t$. L'incertitude absolue sur la durée $\theta = t_2 - t_1$ est donc :

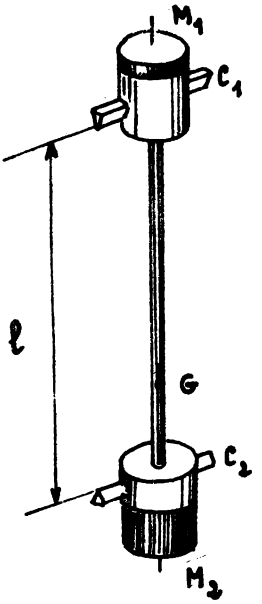
$$\Delta\theta = \tfrac{1}{2}\Delta t + \tfrac{1}{2}\Delta t = \Delta t$$

On améliore la précision sur T' en mesurant la durée θ séparant une première coïncidence d'une pième coïncidence. Désignons par exemple par θ la durée entre une première et une troisième coïncidence. Le pendule le plus rapide a gagné 2 oscillations (une oscillation entre la 1ère et la 2ième coïncidence et une oscillation entre la 2ème et la 3ème coïncidence).

On a donc $\theta = nT$ et $\theta = (n+2)T'$. Par un calcul analogue au précédent on obtient :

$$T' = \frac{T\,\theta}{\theta + 2T}$$

V - PENDULE REVERSIBLE. MESURE PRECISE DE g



D'excellentes mesures de l'accélération de la pesanteur étaient réalisées il y a quelques années encore grâce à certains types de pendules pesants, les pendules réversibles, ainsi nommés car ils ont même période pour deux axes de rotation C_1 et C_2 situés de part et d'autre de leur centre de gravité.

Soit ℓ la distance des deux axes d'oscillation. On démontre que la période du pendule s'exprime par :

$$T = 2\Pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

On en déduit :

$$g = 4\Pi^2 \frac{\ell}{T^2}$$

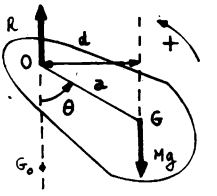
ℓ était mesuré par des méthodes optiques avec une erreur relative de l'ordre du millionième. Quand à la période, elle était mesurée avec une incertitude relative du même ordre par la méthode des coïncidences exposée plus haut. La période de référence était celle du balancier d'une horloge astronomique. On obtenait g avec une précision relative de l'ordre de quelques millionièmes. Ces techniques sont actuellement dépassées. On mesure g avec un gravimètre absolu (voir exercice 5 du chapitre 3).

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 11

Définition

Un pendule pesant est un solide mobile sans frottement autour d'un axe horizontal (O) ne passant pas par son centre de gravité.

I - EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU MOUVEMENT D'UN PENDULE PESANT



Deux forces agissent sur le pendule : $\vec{Mg}$ et $\vec{R}$. Le moment de $\vec{R}$ par rapport à O est nul. La relation fondamentale de la dynamique de rotation $\sum \mathcal{M}_{\vec{G}} = J.\ddot{\theta}$ se réduit à :

$$-Mga \sin\theta = J.\theta''$$

Partant de cette relation, on obtient deux types d'équations différentielles, suivant que l'on confond ou non $\sin\theta$ avec θ exprimé en radians :

$\theta'' + \frac{Mga}{J}\theta = 0$	$\theta'' + \frac{Mga}{J}\sin\theta = 0$
C'est l'équation différentielle d'un mouvement sinusoïdal de rotation de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{Mga}{J}}$ et de période : $T_o = 2\Pi\sqrt{\frac{J}{Mga}}$ Lorsque l'amplitude croît, la période semble constante pour les faibles valeurs de l'amplitude. Il y a isochronisme apparent des oscillations.	Cette équation différentielle n'est pas celle d'un mouvement sinusoïdal de rotation. Elle correspond à un mouvement dont la période : $T = 2\Pi\sqrt{\frac{J}{Mga}}\left(1 + \frac{\theta_o^2}{16}\right)$ est une fonction croissante de l'amplitude θ_o (rd).
En réalité, la période croît avec l'amplitude, mais l'instrument de mesure n'est pas assez précis pour mettre en évidence cette croissance.	

II - LE PENDULE SIMPLE

Il est formé d'un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible et sans masse.

Période :

$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{\Theta_o^2}{16}\right) \simeq T_o = 2\Pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{pour } \Theta_o \text{ petit}$$

Pendule simple synchrone d'un pendule pesant

Soit M la masse d'un pendule pesant, J son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et a = $\overline{OG}$ la distance dù centre de gravité à l'axe de rotation. La longueur L du pendule simple ayant même période est :

$$\boxed{L = \frac{J}{M.a}}$$

Chapitre 11

EXERCICES

1/ Déterminer la longueur du pendule simple synchrone des pendules pesants suivants :

a/ Barre homogène de longueur ℓ , de masse M, oscillant autour d'un axe (Δ) perpendiculaire à sa direction, passant par l'une de ses extrémités.

Réponse : $L = \frac{2}{3}\ \ell$

b/ Cerceau de rayon R et de masse M, oscillant autour d'un axe (Δ) perpendiculaire à son plan en l'un de ses points.

Réponse : $L = 2R$

c/ Même question pour un disque plein homogène suspendu par l'un des points de sa périphérie à une tige horizontale sans frottement.

Réponse : $L = \frac{3}{2}\ R$

2/ La période d'une horloge astronomique est T=2,00000 s. Un pendule réversible dont on veut déterminer la période T', oscille un peu moins vite que le balancier de l'horloge. La durée qui sépare une première coïncidence de la sixième coïncidence est θ = 49 mn 10 s. Chaque coïncidence semble persister pendant 20 secondes.

1°) Exprimer T' en fonction de T et θ . Donner l'expression de l'incertitude relative sur T'. Calculer T' et son incertitude absolue $\Delta T'$.

2°) La distance séparant les deux couteaux du pendule réversible (axes d'oscillation) est ℓ = 99,342cm±0,001cm. Déterminer la valeur de l'intensité du champ de pesanteur au lieu de l'expérience ainsi que son incertitude absolue. On prendra Π = 3,14159, avec une erreur relative négligeable.

Il est conseillé d'effectuer les calculs à l'aide d'une calculatrice électronique ou à défaut à l'aide d'une table de logarithmes.

3/ Un pendule est constitué par une tige métallique OA, de de masse négligeable, mobile autour d'un axe horizontal

perpendiculaire à la tige en son extrémité O, et supportant à l'autre extrémité A une masse M supposée ponctuelle. Ce pendule est assimilable à un pendule simple de longueur OA. Il effectue des oscillations de faible amplitude.

1°) Le pendule battant la seconde à 0°C (T_o = 2s) en un lieu où g = 9,81 S.I., calculer la longueur OA = ℓ_o à cette température.

2°) La température s'élève de 20°C. Quelle variation relative de période en résulte-t-il, sachant que le coefficient de dilatation linéique de la tige qui soutient M est :

$$\lambda = 1{,}85 \cdot 10^{-5} \ ?$$

Ce pendule constitue le balancier d'une horloge dont la marche est exacte à 0°C. Cette horloge avance-t-elle ou retarde-t-elle lorsque la température s'élève de 20°C ? De combien par jour ?

3°) A la température 20°C, la longueur de la tige du pendule est ℓ . On fixe au milieu de la tige (à la distance $\frac{1}{2}\ell$ de l'axe O) une petite masse ponctuelle m. Calculer la période de ce pendule composé, en fonction de ℓ , M et m. Montrer que la présence de m diminue la période.

Quelle doit être la valeur de m pour que le pendule ainsi modifié batte rigoureusement la seconde à 20°C ? (T = 2s)

On donne : M = 0,500 kilogramme.

N.B. On simplifiera les calculs en tenant compte de ce que $\frac{m}{M}$ est petit par rapport à l'unité.

(Baccalauréat)

4/ Détermination expérimentale de g à Sousse

La valeur de l'intensité du champ de pesanteur a été déterminée à Sousse à l'aide d'un pendule constitué d'un fil de nylon très fin que l'on pouvait considérer comme inextensible et de masse négligeable devant celle de la sphère d'acier qu'il soutenait. Les dimensions de la sphère étant très petites devant la longueur du fil, nous assimilerons le pendule à un pendule simple dans tout le problème.

La distance du point de suspension au centre de gravité de la sphère était ℓ = 2,000 m, mesurée au millimètre près.

La durée de 400 oscillations a été chronométrée plusieurs fois, les résultats étant toujours compris entre deux valeurs extrêmes : 18 mn 55,3 s et 18 mn 55,9 s.

1°) Calculer la période T de ce pendule à partir de la valeur médiane de 400 T. Quelle est la précision relative sur cette période ?

2°) L'amplitude des oscillations reste très petite. Montrer que si l'on tient compte de la poussée d'Archimède, la période du pendule peut s'exprimer sous la forme :

$$T_o = 2\Pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\ (1 + \frac{a}{2\rho})$$

a est la masse volumique de l'air et ρ celle de la sphère. (La poussée d'Archimède est une force égale au volume d'air déplacé par la sphère, verticale et dirigée vers le haut).

3°) Montrer que si l'on tient compte de l'amplitude θ_o des oscillations, la période du pendule peut s'écrire sous la forme :

$$T = 2\Pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\ (1 + \frac{a}{2\rho} + \frac{\theta_o^2}{16})$$

On rappelle que l'expression de la période est

$$T = T_o(1 + \frac{\theta_o^2}{16})$$

4°) Donner l'expression théorique de g d'après l'expression précédente de la période.

Application numérique. On donne :

$a = 1{,}3$ kg/m^3 ; $\rho = 8.10^3$ kg/m^3. La valeur moyenne de l'amplitude, compte tenu de l'amortissement est $\theta_o = 5.10^{-2}$ rd. Calculer g. Calculer l'incertitude absolue sur g en ne tenant compte que des incertitudes sur ℓ et sur T, les incertitudes sur les termes correctifs ayant une influence négligeable.

5°) On peut calculer g à Sousse avec une précision relative de 10^{-5} à l'aide de la formule suivante :

$$g = 9{,}7804\ (1 + 0{,}0053 \sin^2 \lambda)\ N/kg$$

où λ est la latitude de Sousse et vaut 35,8° (sin 35,8° = 0,585). 9,7804 N/kg est l'intensité du champ de pesanteur à l'équateur.

Effectuer le calcul précis de l'intensité du champ de pesanteur à Sousse et comparer la valeur trouvée au domaine expérimental de la question 4°).

5/ Ce problème concerne la modification des périodes propres des systèmes oscillants par association de deux éléments analogues.

Les trois parties A, B et C sont indépendantes. On prendra $\Pi^2 = g$.

A-

1°) Soit un ressort R_1 à spires non jointives, de raideur k, de masse négligeable, enfilé sur une tige horizontale OX et fixé à l'extrémité O. L'autre extrémité du ressort est liée à une masse ponctuelle m, coulissant sans frottement sur OX (fig 1). On écarte m de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. Quelle est l'expression de la période T des oscillations de la masse m ?

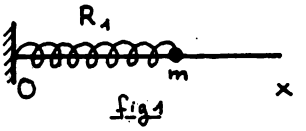


fig 1

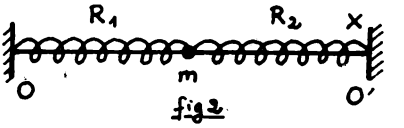


fig 2

Application numérique : m = 300 g, k = 30 N/m.

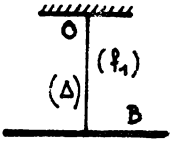
2°) On enfile maintenant sur la tige OX un deuxième ressort R_2 identique au précédent dont une des extrémités est liée à m, l'autre extrémité est fixée au point O' immobile. Au repos chaque ressort a un allongement égal à ℓ. (fig 2).

On écarte m de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale.Quelle est l'expression de la nouvelle période T' des oscillations de m ? Démonstration et application numérique.

B-

1°) Un fil métallique (f_1) vertical de constante de torsion C fixé en O à un support soutient une barre (B) horizontale qui peut prendre seulement un mouvement de rotation autour de l'axe (Δ) matérialisé par le fil (f_1) (fig 3). Le moment d'inertie de la barre par rapport à cet axe est J. Quelle est la nature du mouvement pris par la barre écartée de sa position d'équilibre ? Donner l'ex-

pression de la période T' des oscillations de (B).



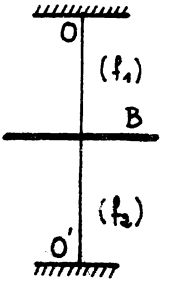


fig 4

Application numérique :

$J = 10^{-3}$ kg.m^2 ; $C = 64.10^{-3}$ m.N/rd.

2°) On fixe à la barre B un deuxième fil métallique identique au précédent fixé en O' de façon que les deux fils soient tendus et verticaux (fig 4). On écarte (B) de la position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. Quelle est la nouvelle valeur T' des oscillations ? Démonstration et application numérique.

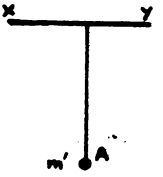


fig 5

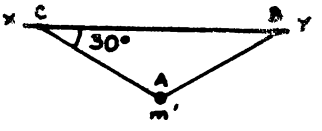


fig 6

C- 1°) Une petite boule supposée ponctuelle A de masse m' = 10g est attachée par un fil inextensible AB de masse négligeable et de longueur ℓ = 25 cm à une barre XY. La barre est horizontale (fig 5); on fait osciller la boule dans le plan perpendiculaire à XY. Les oscillations sont de faible amplitude. Quelle est la période T de ces oscillations ? Application numérique.

2°) On fixe la boule A à un deuxième fil AC identique au précédent, l'extrémité C étant fixée à XY. Le fil AC fait un angle de 30° avec XY (fig 6). On écarte A de sa position d'équilibre d'un petit angle dans le plan perpendiculaire à XY et on l'abandonne sans vitesse initiale. Quelle est la nouvelle période T' des oscillations de A ? Application numérique.

(Baccalauréat, partiel).

6/

A- Le balancier d'un h[illegible] est assimilé à un pendule simple P, de longueur ℓ, [illegible] de 1m. Sa période est alors légèrement supérieure à [illegible], ce qui entraine un retard de l'horloge de 24 secondes par jour.

a/ Dans quel sens et de combien faut-il faire varier la longueur du pendule pour rétablir la marche normale de l'horloge?

b/ Le pendule ainsi corrigé, oscillant avec une amplitude angulaire de 5°, quelle sera sa vitesse angulaire, en radians par seconde au passage par la position d'équilibre?

B- Le pendule simple P, de période 2s, a une masse M = 1kg. Au milieu de la tige de suspension on ajoute une masse ponctuelle m = 10 g.

Exprimer et calculer

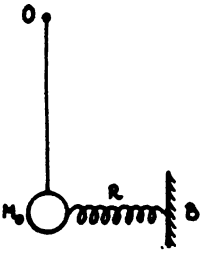
a/ Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe d'oscillation ;

b/ Le moment résultant des forces de rappel vers la position d'équilibre pour de petites amplitudes angulaires ;

c/ La période d'oscillation ;

d/ La variation relative de période entraînée par l'adjonction de la masse m(petite devant M).

C- On reprend le pendule simple P, de période 2s (la masse m de la question B ayant été enlevée). Un ressort horizontal R, à spires non jointives, est fixé comme l'indique la figure, d'une part à un bâti fixe B, d'autre part à la masse M du pendule supposée quasi ponctuelle, de façon que, le pendule étant vertical (position OM_o), le ressort ne soit ni comprimé ni dilaté. On écarte le pendule d'un petit angle à partir de sa position verticale et l'on demande d'exprimer et de calculer:



a/ La force de rappel que le ressort exerce sur la masse M pour l'élongation angulaire θ du pendule (le rapport constant de la tension du ressort à la variation de longueur correspondante est :

k = 0,05 N/m) ;

b/ Le moment résultant, par rapport à l'axe d'oscillation, des forces qui agissent sur le pendule ;

c/ La période d'oscillation du pendule et la variation relative de cette période due à la présence du ressort.

N.B.

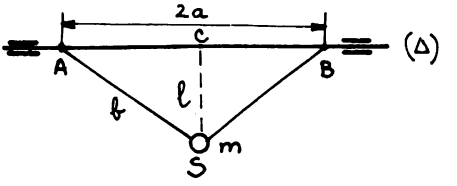
Les trois questions du problème sont indépendantes. On donne $g = 9{,}80\ m/s^2$.

(Baccalauréat)

7/ Une petite sphère, de masse m, supposée ponctuelle est suspendue par deux fils inextensibles à une tige AB. On néglige les masses des fils devant celle de la sphère. On donne :

$AB = 2a = 0{,}48\ m$;
$SA = SB = b = 0{,}30\ m$;
$g = 9{,}80\ m/s^2$.

1°) La tige AB est horizontale et peut tourner sans frottement sur deux paliers fixes. On suppose négligeable le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation (Δ).



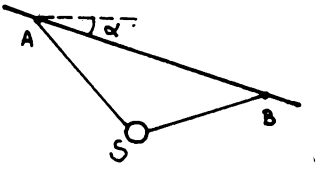
a/ Montrer que le système est équivalent à un pendule simple de longueur ℓ, pouvant osciller autour de l'axe (Δ).

b/ On écarte légèrement la sphère de sa position d'équilibre ; calculer la période des petites oscillations du pendule.

2°) On incline l'axe AB d'un angle α sur l'horizontale.

a/ Quelle est la valeur maximale de l'angle α pour que les deux fils soient tendus ?

b/ Quelle est la nouvelle période du pendule pour $\alpha = 30°$?



Chapitre 12

LE THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

INTRODUCTION: LE PRINCIPE DE CONSERVATION DE L'ENERGIE

L'univers physique est composé de matière etd'énergie.

La matière occupe de l'espace; elle est douée de masse inerte, c'est-à-dire de la propriété qui la maintient dans son état de repos lorsqu'elle est au repos ou grâce à laquelle elle conserve son état de mouvement lorsqu'elle est en mouvement.

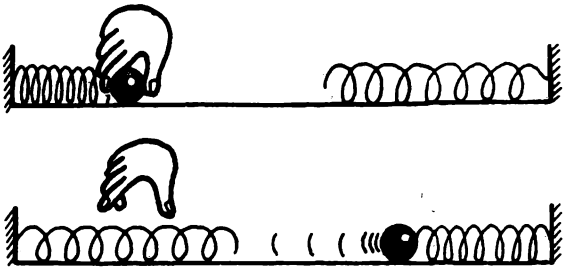
L'énergie existe sous plusieurs formes. Par exemple :

- énergie potentielle de pesanteur,
- énergie potentielle électrostatique,
- énergie chimique,
- énergie cinétique,
- énergie thermique,
- énergie nucléaire,
- énergie rayonnante ...

Cette classification est d'ailleurs plus ou moins arbitraire : on pourrait par exemple regrouper l'énergie thermique, traduisant l'agitation d'un grand nombre de particules (atomes, molécules) avec l'énergie cinétique.

L'énergie n'a pas de forme, pas de couleur, est impalpable. On ne prend conscience de son existence qu'au cours d'une transformation d'une forme d'énergie en une autre. Ainsi, l'énergie potentielle élastique du ressort comprimé (figure ci-dessous) n'est mise en évidence qu'au cours de sa transformation en énergie cinétique de la bille. Cette dernière n'est perceptible que lorsqu'elle disparaît en communiquant une quantité égale d'énergie potentielle élastique au second ressort.

Toutes les transformations d'énergie sont régies par le principe de conservation de l'énergie :



Une forme d'énergie ne peut apparaître à partir de rien ni disparaître sans contrepartie; seules sont possibles les transformations d'une forme d'énergie en une autre forme et toujours en quantités égales.

Le principe peut s'énoncer plus brièvement ainsi : l'énergie de l'univers est constante.

I - TRAVAIL - PUISSANCE

1°) Travail d'une force constante en direction et module

a/ Au cours d'un déplacement rectiligne

Soit $\vec{f}$ une force constante en direction et module, dont le point d'application se déplace sur le segment de droite AB, de A vers B. Par définition, le travail de la force $\vec{f}$ au cours du déplacement $\vec{AB}$ est le produit scalaire :

$$W_A^B = \vec{f} \cdot \vec{AB}$$

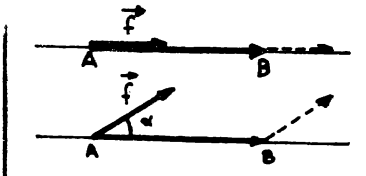
W_A^B signifier travail de la force $\vec{f}$ au cours du déplacement de A à B.

Nous pouvons présenter le produit scalaire $\vec{f} \cdot \vec{AB}$ de deux façons :

Première présentation

$$W_A^B = \vec{f} \cdot \vec{AB} = \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos \alpha \qquad \alpha = (\widehat{\vec{AB}, \vec{f}})$$

W_A^B est la valeur algébrique du travail de $\vec{f}$; son signe est déterminé par le signe de cos α . On peut envisager différents cas suivant la valeur de l'angle α .

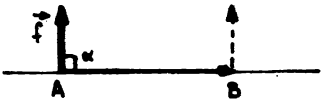


Travail moteur > 0

$\alpha = 0$: $\cos\alpha = 1 \Longrightarrow$

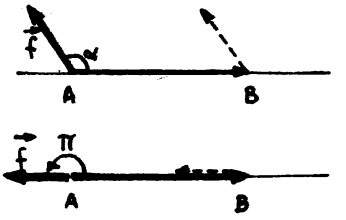
$$W_A^B = \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{AB}\| > 0$$

$0 < \alpha < \frac{\Pi}{2}$: $\cos\alpha > 0 \Rightarrow W_A^B > 0$



$\alpha = \frac{\Pi}{2}$: $\cos\alpha = 0 \Rightarrow W_A^B = 0$:

travail nul.



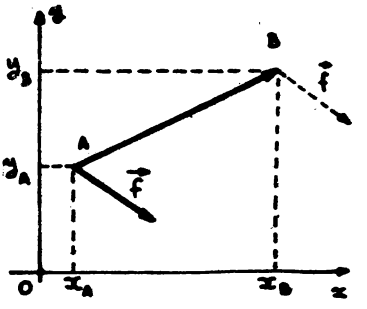
Travail résistant < 0

$\frac{\Pi}{2} < \alpha < \Pi$: $\cos\alpha < 0 \Longrightarrow W_A^B < 0$

$\alpha = \Pi$: $\cos\alpha = -1 \Longrightarrow$

$$W_A^B = - \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{AB}\| < 0$$

Deuxième présentation : expression analytique du produit scalaire.



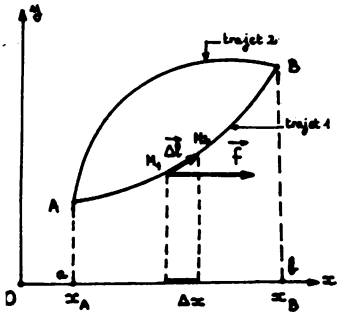
Les composantes de $\vec{f}$ et $\vec{AB}$ sont :

$$\vec{f} \begin{bmatrix} f_x \\ -f_y \end{bmatrix} \qquad \vec{AB} \begin{bmatrix} (x_B - x_A) \\ (y_B - y_A) \end{bmatrix}$$

pour les composantes de la force, nous utilisons la convention adoptée au chapitre 6, § I.

$$W_A^B = \vec{f} \cdot \vec{AB} = f_x(x_B - x_A) + (-f_y)(y_B - y_A)$$

b/ Force constante ; déplacement quelconque



Considérons le cas particulier où $\vec{f}$ est parallèle à Ox. Son point d'application se déplace de A à B sur une trajectoire quelconque.

Soient M_1 et M_2 deux points très voisins, de façon à pouvoir assimiler l'élément de trajectoire (M_1 M_2) à un segment de droite. Le travail de $\vec{f}$ entre M_1 et M_2 est :

$$\Delta W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{f} \cdot \vec{\Delta\ell}$$

avec $\vec{f} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\Delta\ell} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

L'expression analytique du travail est : $\Delta W = f \cdot \Delta x$

Entre A et B, le travail de $\vec{f}$ est la somme de tous les travaux élémentaires :

$$W_A^B = \sum_A^B \Delta W = \sum_A^B f \cdot \Delta x = f \sum_A^B \Delta x = f \cdot \overline{ab}$$

$$\boxed{W_A^B = f \cdot (x_B - x_A)}$$

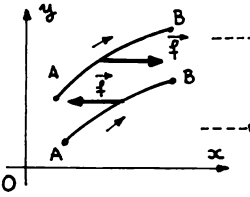
La valeur algébrique du travail d'une force constante parallèle à un axe, au cours d'un déplacement quelconque, est égale au produit de la valeur algébrique de la projection de la force sur cet axe par la valeur algébrique de la projection du déplacement sur l'axe.

Le travail de la force ne dépend pas du trajet suivi pour aller de A(point de départ) en B(point d'arrivée)

La démonstration ci-dessus correspont à une force $\vec{f}$ orientée comme l'axe. Si son sens est contraire à celui de l'axe, la valeur algébrique de sa projection est -f. On a donc :

$\vec{f}$ et Ox de même sens

$\vec{f}$ et Ox de sens contraires



$\longrightarrow W_A^B = f(x_B - x_A)$

$\longrightarrow W_A^B = -f(x_B - x_A)$

2°) Unité de travail - Dimension

L'unité internationale de travail est le joule (J). C'est le travail d'une force de 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force.

Le travail d'une force est homogène au produit d'une force par une longueur :

$$[W] = [F] \cdot L$$

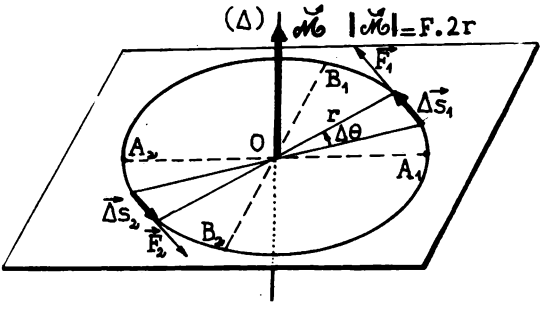
La force est homogène au produit d'une masse par une accélération : $[F] = M\ L\ T^{-2}$. Le travail a donc pour dimension :

$$[W] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

3°) Travail d'un couple de forces au cours d'une rotation

Soit $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ un couple de forces appliquées à un solide en rotation autour d'un axe (Δ), situées dans le plan perpendiculaire à l'axe.

Considérons d'abord le cas où les forces forment un couple moteur. Pour une rotation élémentaire $\Delta\theta$, le trajet élémentaire $\widehat{\Delta s}$ peut être assimilé à un déplacement $\vec{\Delta s}$ de mêmes direction et sens que ceux de la force.



Travail élémentaire de $\vec{F}_1$:

$(\Delta W)_1 = \|\vec{F}_1\| \cdot \|\overrightarrow{\Delta s_1}\| = F_1 \cdot \Delta s_1 = F_1 \, r\Delta\theta$

(r : rayon de la trajectoire)

Travail élémentaire de $\vec{F}_2$:

$(\Delta W)_2 = \|\vec{F}_2\| \, \|\vec{\Delta s}_2\| = F_2 \, \Delta s_2 = F_2 \, r \, \Delta\theta$

Compte tenu de $F = F_1 = F_2$, le travail élémentaire du couple est :

$\Delta W = (\Delta W)_1 + (\Delta W)_2 = 2Fr \cdot \Delta\theta = F(2r)\Delta\theta = F \cdot d.\Delta\theta$

$$\Delta W = \mathcal{M} \cdot \Delta\theta$$

Pour une rotation θ faisant passer $\vec{F}_1$ de A_1 en B_1 et $\vec{F}_2$ de A en B_2 , le travail du couple est :

$$W = \Sigma_\theta \Delta W = \Sigma_\theta \mathcal{M} \Delta\theta = \mathcal{M} \Sigma_\theta \Delta\theta = \mathcal{M}\theta$$

$$\boxed{W = \mathcal{M}\theta}$$

$\mathcal{M}$ en m.N
θ en rd
W en joules

Si le couple de forces est résistant (forces et déplacements élémentaires de sens contraires), le travail élémentaire de $\vec{F}_1$ est :

$(\Delta W)_1 = \|\vec{F}_1\| \cdot \|\overrightarrow{\Delta s_1}\| = - F_1 \cdot \Delta s_1$ etc...

Le travail du couple de forces est : $W = -\mathcal{M}\theta$

Plus généralement, un sens positif de rotation étant choisi:

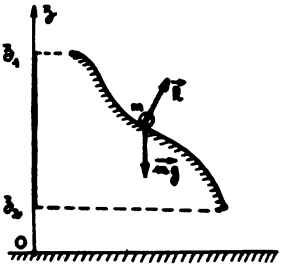
> Le travail d'un couple de forces de moment constant $\mathcal{M}$ appliqué à un solide en rotation autour d'un axe (Δ) est égal au produit de la valeur algébrique du moment par la valeur algébrique de l'angle de rotation.

Nous avons convenu (chapitre 8, § IV) d'appeler valeur algébrique du moment son modulé précédé d'un signe : signe (+) si le moment tend à faire tourner le solide dans le sens positif choisi, signe (-) dans le cas contraire.

Exercices :

1/ Une bille de masse m = 100 g passe de l'altitude

z_1 = 10 m à l'altitude z_2 = 3m le long d'un support sans frottement. Quel est le travail des forces extérieures ? g = 10 m/s^2.



Deux forces agissent sur le bille :

- son poids $\vec{mg}$

- la réaction du support, $\vec{R}$. Cette force est toujours orthogonale au déplacement et son travail est nul.

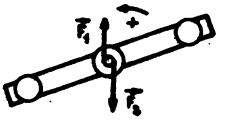
La valeur algébrique de la projection de $\vec{mg}$ sur l'axe Oz est -mg ;

La valeur algébrique de la projection du déplacement sur Oz est $(z_2 - z_1)$. Le travail de $\vec{mg}$ vaut donc :

$$W_{①}^{②} = -mg(z_2 - z_1)$$

Numériquement : $W_{①}^{②} = (-0,100 \times 10).(3 - 10) = 7$ joules.

2/ Un dispositif de T.P. utilisé pour la dynamique de rotation, préalablement lancé à la main, s'arrête en 40 tours sous l'action d'un couple de freinage de moment égal à $1,00.10^{-3}$ m.N. Calculer le travail du couple de freinage.



On trouvera un schéma complet du dispositif à l'exercice 2 du chapitre 8.

Le sens de rotation est choisi pour sens positif. Pour N = 40 tours, la valeur algébrique de l'angle de rotation est :

$$\theta = 2\pi N = 251 \text{ rd}$$

L'ensemble des forces de frottement équivaut à un couple de moment négatif $-\mathcal{M}$. Le travail du couple est :

$W = -\mathcal{M}\theta = -1 . 10^{-3} \times 251 = -0,251$ joule.

4°) Puissance

Par définition, la puissance moyenne P_m d'une force pendant l'intervalle de temps Δt est le quotient du travail W de la force pendant l'intervalle de temps Δt par la valeur de cet intervalle.

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}$$

L'unité internationale de puissance est le watt, qui correspond à un travail d'un joule effectué en une seconde.

La puissance instantanée est le quotient:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

obtenu en faisant tendre Δt vers zéro. Soit $dW = \vec{F}.d\vec{\ell}$ le travail élémentaire pour un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ pendant dt. On a :

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La puissance à l'instant t est égale au produit scalaire de la force par la vitesse de son point d'application. Si la force se déplace dans sa propre direction, on a : $P = F \cdot v$.

5°) Energie et travail

En introduction de ce chapitre nous avons cité diverses formes de l'énergie et énoncé le principe de conservation de l'énergie qui régit leurs transformations mutuelles.

Lorsqu'un système possède de l'énergie, on peut toujours imaginer une succession de transformations qui aboutissent à déplacer de la matière sous l'action d'une force, c'est-à-dire à fournir du travail.

Par exemple, un litre d'essence est un système qui renferme de l'énergie chimique qui, par l'entremise d'un moteur, peut servir à soulever une charge dans le champ de pesanteur.

L'énergie est donc une grandeur physique susceptible

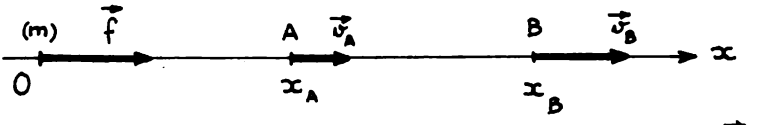
d'être transformée en travail.

En conséquence, l'énergie est homogène au travail et s'exprime avec la même unité, le joule.

II - L'ENERGIE CINETIQUE

1°) Energie cinétique d'un point matériel

Considérons un point matériel de masse m, immobile au point O de l'axe Ox.



On le soumet à une force extérieure constante $\vec{f}$, parallèle à Ox, qui lui communique un mouvement rectiligne uniformément accéléré, d'accélération γ. Le mobile passe au point A avec une vitesse v_A telle que :

$$v_A^2 = 2\gamma x_A \quad (1) \quad \text{(troisième équation)}$$

et au point B avec une vitesse v_B telle que :

$$v_B^2 = 2\gamma x_B \quad (2)$$

Le travail de la force $\vec{f}$ entre les points A et B est:

$$W_A^B = \vec{f} \cdot \vec{AB} = f \cdot \overline{AB} = f(x_B - x_A)$$

$$W_A^B = m\gamma(x_B - x_A) = m\gamma x_B - m\gamma x_A$$

D'après les relations (1) et (2) on a :

$$\gamma x_A = \tfrac{1}{2} v_A^2 \quad \text{et} \quad \gamma x_B = \tfrac{1}{2} v_B^2$$

$$W_A^B = \tfrac{1}{2} mv_B^2 - \tfrac{1}{2} mv_A^2$$

On appelle, par définition, énergie cinétique d'un point matériel le demi produit de sa masse par le carré de sa vitesse :

$$e_c = \tfrac{1}{2} mv^2$$

m en kg
v en m/s
e_c en joules

Entre les points O et A, le travail de la force $\vec{f}$ a communiqué au point matériel une énergie cinétique $e_{cA} = \frac{1}{2} mv_A^2$; entre les points O et B, il lui a communiqué une énergie cinétique $e_{cB} = \frac{1}{2} mv_B^2$

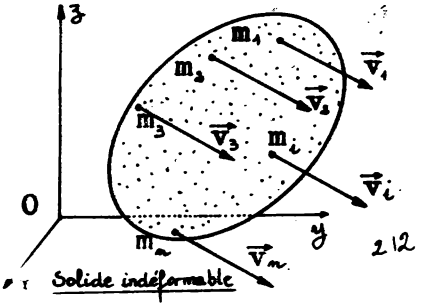
Entre les points A et B, la variation de l'énergie cinétique du point est égale au travail de la force de A à B.

2°) Energie cinétique d'un système de points matériels

L'énergie cinétique d'un système de points matériels est égale à la somme des énergies cinétiques de ses différents points :

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} e_{ci} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

a/ Système en translation indéformable.



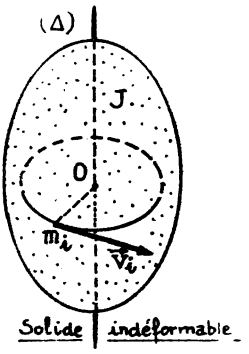
Tous les points du système ont même vitesse v. L'énergie cinétique du système est donc :

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v^2 = v^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i = \frac{1}{2} Mv^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} Mv^2$$

Elle est égale au demi produit de la masse totale du système par sa vitesse de translation.

b/ Système en rotation autour d'un axe fixe



Nous désignons par J le moment d'inertie du solide par rapport à son axe de rotation. Tous les points du système ont même vitesse angulaire ω.

L'énergie cinétique du point de masse m_i situé à la distance r_i de l'axe est:

$$e_{ci} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 . \omega^2$$

Le produit $m_i r_i^2$ est le moment d'inertie j_i du point par rapport à l'axe de rotation. Donc : $e_{ci} = \frac{1}{2} j_i \omega^2$

L'énergie cinétique de tout le système est :

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} e_{ci} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} j_i \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} j_i = \frac{1}{2} J \omega^2$$

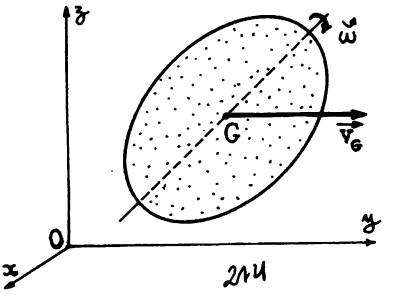
$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} J \omega^2}$$

J en $kg.m^2$
ω en rd/s
E en joules

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe est égale au demi produit de son moment d'inertie par rapport à cet axe par le carré de sa vitesse angulaire.

c/ Translation et rotation combinées

Nous nous limiterons au cas d'un solide en translation et rotation autour d'un axe de direction fixe.



On démontre que l'énergie cinétique du système est la somme de deux termes :

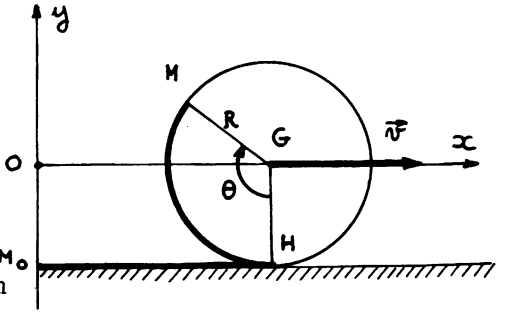
- L'énergie cinétique de son centre de gravité considéré comme un point matériel possédant la masse de tout le système ;

- L'énergie cinétique de rotation du solide autour d'un axe de direction fixe passant par son centre de gravité.

$$E_c = \frac{1}{2} M \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

Exercice

Un disque plein roule sans glisser. Donner l'expression de son énergie cinétique en fonction de sa masse et de la vitesse de son centre de gravité.



- masse du disque : m

- son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation :

$$J = \frac{1}{2} mR^2$$

S'il y a roulement sans glissement : $\overline{M_oH} = \overset{\frown}{HM}$. (1)

Lorsque M est en M_o , G est en O. On a : $\overline{M_oH} = \overline{OG} = x$.

Pour une rotation θ : : $\overset{\frown}{HM} = R\theta$. La relation (1) s'écrit donc : $x = R \cdot \theta$

Dérivons par rapport au temps : $\frac{dx}{dt} = R \cdot \frac{d\theta}{dt}$

$\frac{dx}{dt}$ est la vitesse du centre de gravité et $\frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire.

On obtient : $v = R \cdot \theta' = R\omega \iff \omega = \frac{v}{R}$

L'énergie cinétique totale du disque est :

$E_c = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$

avec $\frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{mv^2}{4}$. Finalement :

$$E_c = \frac{3}{4} m.v^2$$

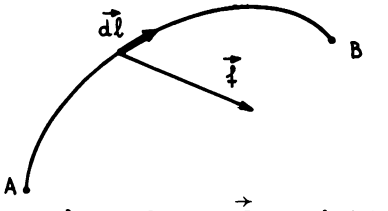
A titre d'exercice, démontrer que les énergies cinétiques totales d'un cerceau et d'une bille roulant sans glisser sont respectivement :

cerceau : $E_c = mv^2$ bille : $E_c = \frac{7}{10} mv^2$

III- LE THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

1°) Le cas d'un point matériel soumis à une force quelconque

La démonstration qui suit est hors programme. Elle peut être passée sans inconvénient.



Sous l'action d'une force $\vec{f}$ variable, un point matériel se déplace du point A où il passe à l'instant t_A jusqu'au point B qu'il atteint à l'instant t_B.

Nous allons établir une relation entre les énergies cinétiques du mobile, $\frac{1}{2} mv_A^2$ au point A, $\frac{1}{2} mv_B^2$ au point B et le travail de la force entre les instants t_A et t_B.

Pour un déplacement élémentaire très petit, $d\vec{\ell}$, la force reste pratiquement constante ; son travail élémentaire est :

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{avec} \quad \vec{f} = m\vec{\gamma} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dW = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{\ell} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} \cdot dt$$

$$= m \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dt = \vec{mv} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dt$$

Or, $\vec{mv} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$ est la dérivée par rapport au temps de $\frac{1}{2} m(\vec{v} \cdot \vec{v})$ que l'on peut aussi écrire $\frac{1}{2} mv^2$. Donc :

$$dW = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \cdot dt$$

Le travail entre les instants t_A et t_B est la somme des travaux élémentaires :

$$W_A^B = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \cdot dt \ .$$

D'où $W_A^B = \frac{1}{2} mv^2(t_B) - \frac{1}{2} mv^2(t_A)$. (1)

$\frac{1}{2} mv^2(t_A)$ est l'énergie cinétique à l'instant t_A. Nous la notons $\frac{1}{2} mv_A^2$.

$\frac{1}{2} mv^2(t_B)$ est l'énergie cinétique à l'instant t_B. Nous la notons $\frac{1}{2} mv_B^2$.

La relation (1) s'écrit donc :

$$\frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = W_A^B$$

D'où le théorème :

> La variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à une force quelconque pendant une certaine durée est égale au travail de cette force pendant cette durée.

2°) Théorème de l'énergie cinétique pour un système quelconque

Nous généraliserons sans démonstration le théorème précédent :

> La variation de l'énergie cinétique d'un système matériel, déformable ou non entre les instants t_1 et t_2 est égale au travail de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures appliquées au système pendant la durée $t_2 - t_1$.
>
> $$Ec_2 - Ec_1 = W_{①}^{②}$$

Dans l'expression précédente, E_c représente l'énergie cinétique totale du système, c'est-à-dire énergie cinétique de translation seule ou de rotation seule ou de translation et rotation simultanément.

On peut donc envisager les trois cas :

Translation seule : $\frac{1}{2} Mv_2^2 - \frac{1}{2} Mv_1^2 = W_{①}^{②}$

Rotation seule : $\frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2 = W_{①}^{②}$

Translation et rotation combinées :

$$(\tfrac{1}{2} Mv_2^2 + \tfrac{1}{2} J\omega_2^2) - (\tfrac{1}{2} Mv_1^2 + \tfrac{1}{2} J\omega_1^2) = W_{①}^{②}$$

M: Masse du système : v : vitesse de son centre de gravité

J: Moment d'inertie du système (supposé indéformable) par rapport à son axe de rotation.

ω: vitesse angulaire autour de l'axe passant par le centre de gravité.

IV - EXEMPLES D'APPLICATIONS DU THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

De nombreux problèmes peuvent être résolus par deux méthodes :

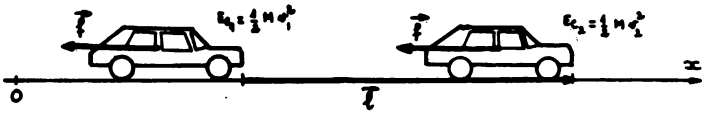
- soit en utilisant les équations du mouvement et la relation fondamentale de la dynamique ;

- soit par l'emploi du théorème de l'énergie cinétique. Cette seconde méthode est généralement plus rapide.

Voici quelques exemples :

1°) Freinage d'un véhicule

Calculer la résultante des forces de frottement, supposée constante permettant à une automobile de 800 kg de passer de la vitesse v_1 = 72 km/h (20m/s) à la vitesse v_2 = 36 km/h (10 m/s) en 40 m.



D'après le théorème de l'énergie cinétique : variation de E_c = travail de la force $\vec{f}$:

$$\tfrac{1}{2} Mv_2^2 - \tfrac{1}{2} Mv_1^2 = \vec{f}.\vec{\ell} = -f.\ell \quad (f: \text{module de la force})$$

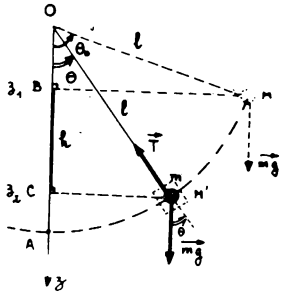
$$\text{D'où : } f = -\frac{M(v_2^2 - v_1^2)}{2\ell} = -\frac{8.10^2(-3.10^2)}{8.10^1} = 3 \ . \ 10^3 N$$

$$\underline{f = 3000\ N}$$

Par la technique classique, on commence par calculer l'accélération par application de la troisième équation des mouvements uniformément variés puis on utilise la relation fondamentale de la dynamique.

2°) Vitesse de la masse suspendue au pendule simple

L'amplitude angulaire d'un pendule simple est θ_o . Quelle est la vitesse de la sphère suspendue à son extrémité lorsque l'élongation est égale à θ ?
Quelle est la [illegible] ?



Soit v_o la vitesse lorsque l'élongation angulaire est maximale et v la vitesse lorsque l'élongation angulaire est θ.

La tension $\vec{T}$, toujours perpendiculaire à la trajec-

toire ne fournit aucun travail. Seul le poids $\vec{mg}$ travaille pendant le mouvement de la masse m. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = mg(z_2 - z_1) = mg(\overline{OC} - \overline{OB})$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg(\ell \cdot \cos\theta - \ell \cos\theta_o)$$

D'où l'expression de la vitesse :

$$\boxed{v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_o)}}$$

Cas particuliers

Lorsque la masse m passe par sa position d'équilibre A, on a $\cos\theta = 1$ et

$$v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_o)}$$

Si de plus l'amplitude θ_o est faible, on peut faire l'approximation :

$$\cos\theta_o \simeq 1 - \frac{\theta_o^2}{2}.$$

l'expression de v devient :

$$v = \theta_o\sqrt{\ell g}$$

Expression de la tension

Appliquons à la masse m la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{mg} + \vec{T} = \vec{m\gamma}$$

projetons sur l'axe normal à la trajectoire, orienté comme $\vec{T}$:

$$-mg\cos\theta + T = m\gamma_N = m\frac{v^2}{\ell}$$

d'où :

$$T = m\left(\frac{v^2}{\ell} + g\cos\theta\right)$$

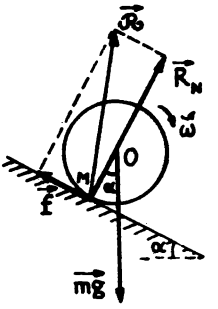
avec $\frac{v^2}{\ell} = 2g(\cos\theta - \cos\theta_o)$ d'après le calcul précédent. On obtient :

$$\boxed{T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_o)}$$

3°) Bille sur un plan incliné

Une bille roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. On demande de dé-

termi[illegible]lération de son centre de gravité.



La bille est soumise à trois forces : son poids $\vec{mg}$, la réaction normale du support $\vec{R}_N$ et une force de frottement qui qui permet le roulement : $\vec{f}$.

En l'abscence de cette dernière force, il y aurait glissement sans roulement.

[illegible]n totale du plan est $\vec{\mathcal{R}} = \vec{R}_N + \vec{f}$. Le point d'application M de cette réaction est un centre de rotation instantané de la bille, ce qui signifie qu'elle pivote autour du point M qui reste immobile à l'instant où

de la bille immédiatement voisin qui devient centre de rotation instantané. [illegible]e la réaction $\vec{\mathcal{R}}$ est constamment appliquée à un point immobile et que son travail est nul au cours du déplacement de la bille.

La seule force effectuant un travail est donc le poids mg.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant du départ de la bille et l'instant où son centre de gravité atteint la vitesse v après un parcours x. Son énergie cinétique est alors :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} mR^2 \frac{v^2}{R^2} = \frac{7}{10} mv^2$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{7}{10} mv^2 - 0 = \vec{mg} \cdot \vec{x} = mg \cdot x \sin \alpha .$$

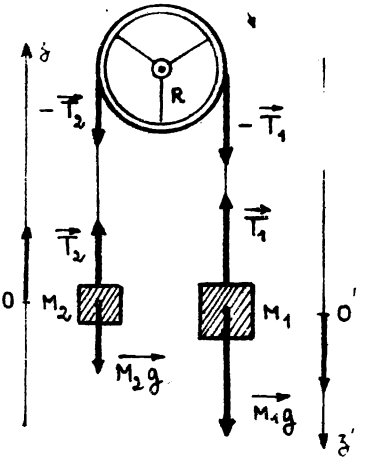
Dérivons cette relation par rapport au temps. La dérivée de v^2 est $2vv' = 2v\gamma$. La dérivée de x est $x' = v$. On a donc :

$$\frac{7}{5} m \cdot v\gamma = mg \cdot v \sin\alpha$$

d'où :

$$\boxed{\gamma = \frac{5}{7} g \sin\alpha}$$

4°) Machine d'Atwood



Reprenons la machine d'Atwood décrite au chapitre 8, § IV. On se propose de déterminer l'accélération de l'une des masses.

Le théorème de l'énergie cinétique s'appliquant aux systèmes déformables ou non, il est inutile de décomposer le dispositif en parties indéformables .

Les tensions $\vec{T}_1$ et $-\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ et $-\vec{T}_2$ sont des forces intérieures opposées deux à deux :
la somme algébrique de leurs travaux est nulle. Seuls les poids $\overrightarrow{M_1 g}$ et $\overrightarrow{M_2 g}$ travaillent.

Pour un déplacement z, $\overrightarrow{M_1 g}$ effectue le travail moteur $M_1 gz$ et $\overrightarrow{M_2 g}$ le travail résistant $-M_2 gz$.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique lorsque les masses M_1 et M_2 ont atteint la vitesse v et la poulie la vitesse angulaire ω :

$$\left(\tfrac{1}{2} M_1 v^2 + \tfrac{1}{2} M_2 v^2 + \tfrac{1}{2} J \omega^2\right) - 0 = M_1 gz - M_2 gz$$

avec $\tfrac{1}{2} J \omega^2 = \tfrac{1}{2} mR^2 \dfrac{v^2}{R^2} = \tfrac{1}{2} mv^2$.

$$\tfrac{1}{2}(M_1 + M_2 + m)v^2 = (M_1 - M_2)gz.$$

Dérivons par rapport au temps, comme pour l'exercice précédent :

$$\tfrac{1}{2}(M_1 + M_2 + m)2\, v\gamma = (M_1 - M_2)\, g\, v \qquad \text{soit :}$$

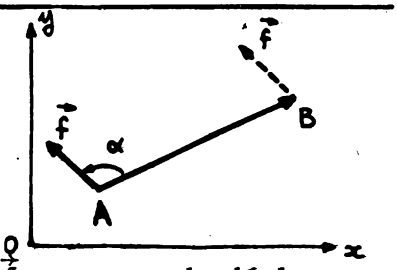
$$\boxed{\gamma = \frac{(M_1 - M_2)\, g}{M_1 + M_2 + m}}$$

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 12

I - TRAVAIL - PUISSANCE

1°) Force constante en direction et module

a/ Translation



Le travail de $\vec{f}$ au cours du déplacement $\vec{AB}$, est le produit scalaire :

$$W_A^B = \vec{f} \cdot \vec{AB}$$

Première expression de ce produit scalaire :

$$W_A^B = \| \vec{f} \| \cdot \| \vec{AB} \| \cos \alpha$$

positif (moteur), nul ou négatif (résistant) suivant les valeurs de l'angle α .

Deuxième expression

$$\vec{f} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad \vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

X et Y sont les composantes de $\vec{f}$.

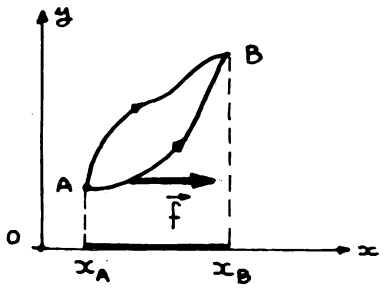
$$W_A^B = \vec{f} \cdot \vec{AB} = X(x_B - x_A) + Y(y_B - y_A)$$

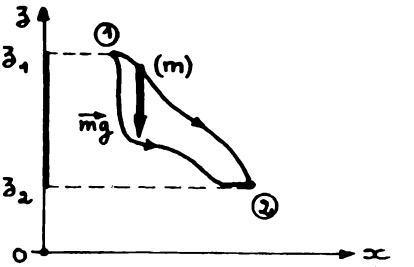
f_x et f_y étant les modules des projections de $\vec{f}$ sur les axes, on a dans le cas de la figure ci-dessus :

$$X = -f_x \quad \text{et} \quad Y = +f_y$$

$$W_A^B = (-f_x)(x_B - x_A) + f_y(y_B - y_A)$$

b/ Force constante parallèle à un axe
Déplacement quelconque





$W_A^B = f \cdot (x_B - x_A)$ $\qquad$ $W_{①}^{②} = -mg \cdot (z_2 - z_1)$

La valeur algébrique du travail d'une force constante, parallèle à un axe, au cours d'un déplacement quelconque, est égale au produit de la valeur algébrique de la projection de la force sur cet axe par la valeur algébrique de la projection du déplacement sur l'axe.

Le travail est indépendant du trajet suivi entre les points de départ et d'arrivée.

2°) Travail d'un moment de force constant au cours d'une rotation.

$\mathcal{M}$ étant le module du moment de force et Θ la valeur algébrique de l'angle de rotation, on a :

$W = +\mathcal{M}\Theta$ si le moment tend à faire tourner dans le sens positif choisi.

$W = -\mathcal{M}\Theta$ dans le cas contraire.

3°) Puissance

Puissance moyenne pendant Δt $\boxed{P_m = \frac{W}{\Delta t}}$ Puissance instantanée $\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

II - L'ENERGIE CINETIQUE

1°) Point matériel $e_c = \frac{1}{2} mv^2$

2°) Système en translation $E_c = \frac{1}{2} Mv^2$

3°) Rotation autour d'un axe fixe $\frac{1}{2} E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$

4°) Translation et rotation combinées :

$$E_c = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

- M : masse du système ;
- v : vitesse de son centre de gravité ;
- ω : vitesse angulaire autour de l'axe de rotation passant par le centre de gravité.
- J : moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

III- LE THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

1°) Pour un point matériel

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à une force quelconque pendant une certaine durée est égale au travail de cette force pendant cette durée.

2°) Pour un système quelconque, en mouvement quelconque

****

La variation d'énergie cinétique d'un système matériel, déformable ou non entre les instants t_1 et t_2 est égale au travail de toutes les forces tant intérieures qu'extérieures appliquées au système pendant la durée $t_2 - t_1$

$$E_{c_2} - E_{c_1} = W_{\Phi}^{\Phi}$$

Remarques :

Compte tenu de ses nombreuses applications et de la simplification qu'il apporte à la résolution de certains exercices, ce théorème est l'un des plus importants du cours. Il faut donc le connaître "par coeur" en se souvenant de son domaine d'application :

- il s'applique aux systèmes indéformables, mais aussi, globalement aux systèmes déformables, sans qu'il soit besoin de les décomposer en parties indéformables.

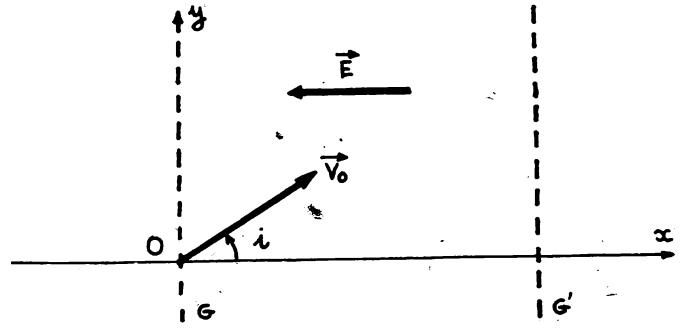
- les forces concernées sont aussi bien intérieures qu'extérieures.

On appelle variation d'une fonction la différence entre sa valeur finale et sa valeur initiale.

Chapitre 12

E X E R C I C E S

1/ On considère la région d'espace R, comprise entre deux grilles de fil fin métallique, planes et parallèles G et G', distantes de a = 5cm. Ces grilles sont supposées de longueur très grande par rapport à la distance qui les sépare. Il existe dans la région R un champ électrique uniforme $\vec{E}$ perpendiculaire à G et G' et dirigé de G' vers G. En introduisant le système d'axes de coordonnées cartésiennes indiqué sur la figure, on peut écrire les composantes de $\vec{E}$ sous la forme (-E, 0). On suppose que le champ électrique est nul à l'extérieur de la région R.



Une particule ponctuelle, de masse m et de charge q positive, arrive en O à l'instant t = 0, et entre dans la région R. Sa vitesse au temps t = 0, se trouve dans le plan xOy, a pour module V_0 et fait un angle i avec l'axe Ox.

La seule force à laquelle est soumise la particule est la force électrostatique $\vec{F}$. On admettra que la particule rencontre toujours les grilles à l'emplacement d'un orifice et que sa vitesse reste faible devant celle de la lumière.

A/- On étudie le mouvement de la particule dans la région R.

1°) Donner l'expression de la force électrostatique $\vec{F}$ qui s'exerce sur la particule entre les deux grilles. En déduire les composantes γx et γy de l'accélération qu'elle prend. Déterminer les composantes Vx et Vy de la vitesse en fonction du temps t. Quelle remarque vous suggère l'expression de Vy ? Donner l'expression des coordonnées x(t) et y(t) de la particule. Quelle est la nature de la trajectoire dans la région R ?

2°) Ecrire l'équation de la trajectoire si :

$i = 30°$; $m = 1{,}67.10^{-27}$ kg ; $q = 1{,}6 . 10^{-19}$ coulomb ;

$V_o = 5 . 10^6$ m/s ; $E = 1{,}6 . 10^6$ V/m.

Dessiner l'allure approximative de cette trajectoire.

3°) Exprimer en fonction de x le travail de la force $\vec{F}$ lorsque l'abscisse de la particule passe de 0 à x ($0 < x < a$)

4°) En appliquant le théorème de la variation de l'énergie cinétique, déterminer le module de la vitesse V acquise dans la région R, en fonction de x. En déduire l'expression de la composante Vx de cette vitesse.

B/- On étudie la manière dont la particule ressort de la région R.

1°) Déterminer les composantes Vx et Vy de la vitesse de la particule à l'instant où elle atteint la grille G'. En déduire la condition pour que Vx ne s'annule pas dans la région R : la particule ressort alors par la grille G'.

2°) La condition précédente étant supposée remplie, exprimer le module V de la vitesse au moment où la particule traverse le plan de la grille G', au point d'impact O'. Quelle est la trajectoire ultérieure de la particule ?

3°) En appelant r l'angle que fait avec Ox le vecteur vitesse en O', montrer qu'il existe une relation du type : $\sin i = n \sin r$. Déterminer n en fonction de a, q, m, V_o et E et calculer sa valeur numérique .

C/- On étudie enfin le cas où la condition d'émergence de la particule à travers la grille G' n'est pas satisfaite. Montrer que si le module E du champ électrique est supérieur à une valeur critique que l'on déterminera, la particule rebrousse chemin avant d'atteindre la grille G' et ressort par la grille G. Préciser alors la grandeur et la direction de son vecteur vitesse lorsqu'elle quitte la région R en franchissant la grille G.

(Baccalauréat tunisien, juin 1976)

2/
A/-

1°) Une sphère pleine S, homogène, de masse m et de rayon r roule sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale. En supposant que cette sphère roule sans glisser, déterminer la nature du mouvement de la sphère abandonnée s sans vitesse initiale à la partie supérieure du plan.

On rappelle que le moment d'inertie d'une sphère pleine et homogène de masse m et de rayon r par rapport à un axe fixe passant par son centre de masse est :

$$J = \frac{2}{5} m r^2$$

2°) Un dispositif expérimental convenable permet de mesurer la durée t d'un parcours ℓ = 0,610 mètre le long d'une ligne de plus grande pente du plan pour diverses valeurs de l'inclinaison . On obtient les résultats suivants :

sin α	0,150	0,225	0,325	0,425
$t^2(s^2)$	1,22	0,81	0,55	0,42
$\gamma(m/s^2)$				

sin α	0,500	0,575	0,650	0,675
$t^2(s^2)$	0,36	0,29	0,24	0,22
$\gamma(m/s^2)$				

Compléter le tableau précédent et tracer le graphe donnant les variations de l'accélération γ du centre de masse de la sphère, en fonction du sin α .

Echelle : 2cm représentent 0,1 sur l'axe des abscisses

5cm représentent 1m/s^2 sur l'axe des ordonnées

Ce graphe comporte deux parties.

Dans laquelle de ces deux parties les résultats expérimentaux sont-ils en accord avec l'étude théorique du

paragraphe précédent ?

B/- On place la sphère S à la partie supérieure du plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ sur l'horizontale et on l'abandonne sans vitesse initiale. Après un parcours de $\ell' = 0{,}835$ mètre, elle quitte le plan et tombe en chute libre.

En supposant que la sphère roule sans glisser.

1°) Calculer la vitesse du centre de masse G de la sphère lorsqu'elle quitte le plan incliné. L'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}80\ m/s^2$.

2°) Etablir dans un référentiel que l'on précisera, l'équation de la trajectoire de G. Quelle est la nature de cette trajectoire ?

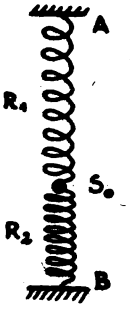
3°) Calculer l'intensité du vecteur vitesse avec laquelle le centre de masse G de la sphère passe par le plan horizontal situé à un mètre de l'extrémité inférieure du plan incliné.

Déterminer l'angle que fait la direction de cette vitesse avec la verticale.

C/- L'extrémité supérieure d'un ressort à boudin R_1 d'axe vertical et de masse négligeable, de longueur à vide $\ell_o = 0{,}15$ mètre, de raideur k, est fixée en un point A.

A l'extrémité inférieure, on suspend la sphère S de masse $m = 0{,}1$ kg que l'on supposera maintenant ponctuelle. A la sphère S, on suspend un ressort R_2 identique à R_1 et on fixe l'extrémité libre de R_2 en un point B situé à une distance $d = 0{,}40$ mètre de A sur la verticale passant par A. Les deux ressorts sont alors tendus.

1°) Etablir en fonction de m, g, k et d les expressions littérales respectives des longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des deux ressorts lorsque la sphère S est en équilibre au point S_o.



2°) On écarte la sphère S de la position d'équilibre précédente d'une distance a, verticalement vers le bas et on abandonne le système à lui-même.

Montrer que la sphère S est animée d'un mouvement sinusoïdal de translation.

La période de ce mouvement étant T = 0,2s , en déduire la raideur k des ressorts R_1 et R_2 .

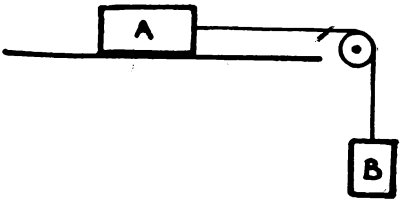
N.B.

La partie C est indépendante du reste du problème.

(Baccalauréat tunisien, juin 1977)

3/

A/- Sur une table horizontale repose un corps A de masse M_1 ayant la forme d'un parallélépipède. A est relié

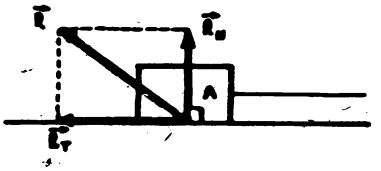


à un corps B de masse M_2 pouvant se déplacer verticalement, par l'intermédiaire d'un fil horizontal qui passe ensuite sur la gorge d'une poulie légère pouvant tourner sans frottement appréciable autour de son axe horizontal (fig. 1).

1°) Le frottement entre A et la table étant négligé, ainsi que le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe, calculer l'accélération du système abandonné à lui-même en fonction de M_1 , M_2 et g(accélération de la pesanteur).

2°) Si le fil venait à casser, quelle serait la nature du mouvement ultérieur du corps A ?
Qu'observe-t-on en réalité ?

B/- En fait, il y a frottement entre le corps A et la table, c'est-à-dire que la force de contact que la table exerce sur A au cours du mouvement peut se résoudre en deux composantes : l'une R_N , perpendiculaire à la table, l'autre, R_T, horizontale et opposée à la vitesse de A (fig. 2).



Dans la suite du problème, on envisage le cas où, en dépit des frottements, le mouvement se produit. La composante R_T sera supposée constante au cours du mouvement.

1°) On néglige d'abord le moment d'inertie de la poulie.

a/ Calculer l'accélération γ_1 de A en fonction de M_1 , M_2 , g et R_T.

b/ Le système part sans vitesse initiale. Calculer,, en fonction des variables précédentes et de la distance h parcourue par le corps A, l'énergie cinétique E_1 du corps A.

2°) En réalité, la poulie a un moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation et le rayon de sa gorge est r.

a/ Calculer, dans ces conditions, la nouvelle accélération γ_2 du système en fonction de M_1 , M_2 , J, r, g et R_T .

b/ Le système part sans vitesse initiale. Calculer (en fonction des variables précédentes et de h) l'énergie cinétique E_2 du corps A.

3°)

a/ Quelle erreur relative commet-on sur la valeur de l'énergie cinétique en négligeant le moment d'inertie de la poulie ?

Application numérique :

$M_1 = M_2 = 0{,}700$ kg; $J = 4.10^{-6}$ kg.m^2 ; r = 2,0 cm.

b/ Compte tenu de la valeur numérique de cette erreur relative et de la précision des données, vous semble-t-il raisonnable de négliger le moment d'inertie de la poulie ?

C/- Dans cette partie, le moment d'inertie de la poulie est négligé et l'on se propose de déterminer le coefficient de frottement dynamique, f, défini par $f = \frac{R_T}{R_N}$

Pour cela, on place le corps B à la distance h du sol de sorte que, lorsque B touche le sol, tout se passe pour A comme si le fil était coupé.

1°) Montrer que A finit par s'arrêter (la table et le fil sont assez longs pour que l'arrêt ait lieu avant le choc sur la poulie).

2°) Entre l'instant où B touche le sol et l'instant où A s'arrête, le corps A parcourt la distance d. Exprimer d en fonction de M_1 ,M_2 , g, h et R_T(on se servira de l'expression de l'énergie cinétique E_1 trouvée précé-

demment). En déduire l'expression de R_T en fonction de M_1 , M_2 , g, h et d.

3°) Quelle est la valeur de R_N ? Justifier la réponse. En déduire le coefficient de frottement dynamique f.

4°) Dans une expérience, on trouve d = 27,5 cm pour h = 60 cm et pour $M_1 = M_2 = 0{,}700$ kg. En déduire la valeur numérique de f.

N.B.

La question C est indépendante des questions B, 2°) et B, 3°).

(Baccalauréat)

4/ Un cerceau, solide assimilable à une circonférence filiforme de centre O, de diamètre D, a une masse m uniformément répartie sur sa circonférence.

Ce cerceau peut se mouvoir sans frottement autour d'un axe fixe horizontal AX, perpendiculaire au plan du cerceau et rencontrant sa circonférence en un point A.

1°) L'expérience montre que le pendule simple synchrone du cerceau, accomplissant des petites oscillations autour de l'axe AX, a une longueur égale au diamètre D. En déduire le moment d'inertie J du cerceau par rapport à son axe d'oscillation.

Application numérique : D = 80,0 cm ; m = 150,0 g.

2°) On écarte le cerceau d'un angle α_0 avec la verticale) et on l'abandonne sans vitesse initiale.

Quelle est l'expression de l'énergie cinétique du cerceau lorsque sa vitesse angulaire, dans son mouvement de rotation autour de AX est ω ? Déduire du théorème de l'énergie cinétique la vitesse angulaire maximale ω_M du cerceau.

Application numérique : $\alpha_0 = 45°$; $g = 9{,}80$ m/s^2. Calculer ω_M en radians par seconde.

3°) On écarte encore le cerceau de l'angle α_0 à partir de sa position d'équilibre, mais on communique à AO une vitesse angulaire initiale ω_0. Le cerceau oscille alors avec une amplitude α_1 .

En déduire ω_0.

Application numérique : $\alpha_o = 45°$ et $\alpha_1 = 60°$.

4°) En un point B de sa circonférence tel que $\widehat{AOB} = 90°$, on fixe au cerceau un corps de très petite dimension et de masse m égale à celle du cerceau.

a/ Figurer le système dans sa position d'équilibre.

b/ Calculer en millisecondes la période T des oscillations du système accomplissant autour de AX les oscillations de petite amplitude.

N.B.

On donnera des résultats sous forme littérale, en fonction des données avant de faire des calculs numériques. Il sera tenu le plus grand compte des résultats numériques, dont la précision est celle de la règle à calcul.

(Baccalauréat)

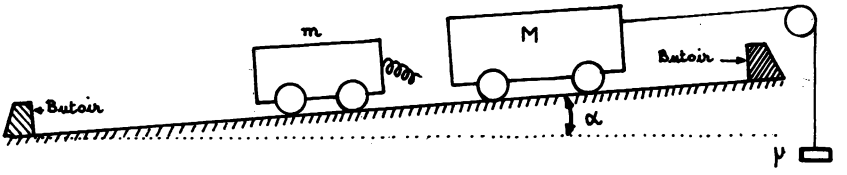
Chapitre 13

QUANTITE DE MOUVEMENT

IMPULSION

I - INTRODUCTION EXPERIMENTALE

Le dispositif expérimental schématisé ci-dessous se compose de deux chariots reposant sur des rails en pente très légère.



La pente est choisie de façon que le chariot de gauche, tout en restant immobile soit juste à la limite du démarrage. De la sorte, la résultante des forces extérieures agissant sur lui est nulle :

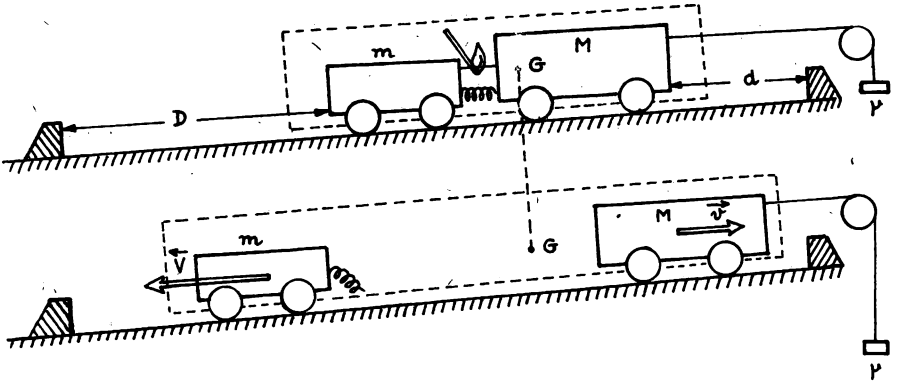
- la réaction normale du support est équilibrée par la composante normale du poids ;

- la force de frottement, parallèle au plan de roulement et dirigée vers la montée, est équilibrée par la composante tangentielle du poids.

Le chariot de droite est relié à une masse p par l'intermédiaire d'une poulie très légère et d'un fil de masse négligeable. La masse p est choisie de sorte que le chariot soit juste à la limite du démarrage vers le haut. L'ensemble des forces extérieures agissant sur lui a ainsi une résultante nulle (poids, réaction du support, force de frottement dirigée vers la descente et tension du fil).

Le lecteur reproduira la figure en y faisant figurer l'ensemble des forces extérieures qui maintiennent les chariots en équilibre.

Les deux chariots sont réunis et compriment entre eux un ressort. Un fil les maintient immobiles.



On brûle le fil. Sous l'action des tensions du ressort (qui sont des forces intérieures au système formé par les deux chariots), les chariots sont propulsés dans des sens opposés.

Le chariot situé à droite sur la figure a une masse double de celle de l'autre chariot (M = 2m). La distance que devra parcourir le chariot le plus léger pour atteindre son butoir est double de celle que devra parcourir le chariot le plus lourd (D = 2d).

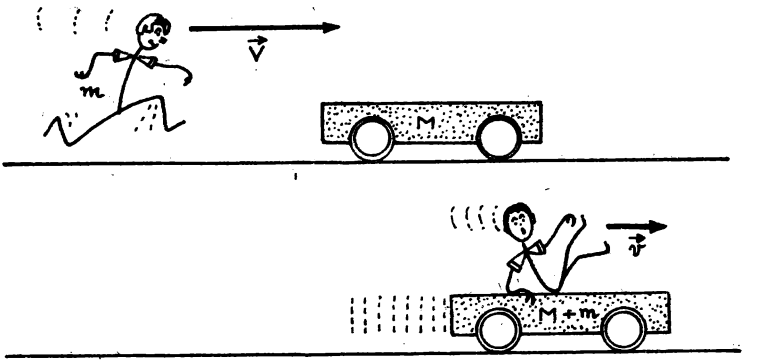
Les chariots se déplacent à vitesse constante puisqu'ils sont soumis chacun à un ensemble de forces de résultante nulle. Ils atteignent leurs butoirs au même instant, ce qui montre, compte tenu des distances qu'ils ont parcourues, que le chariot qui a la masse moitié avait une vitesse double :

- Le chariot de masse m avait la vitesse V
- Le chariot de masse M = 2m avait la vitesse $v = \frac{1}{2} V$.

Par conséquent, le produit (masse x vitesse) était le même pour les deux chariots.

Cette expérience montre l'intérêt d'introduire la grandeur vectorielle $\overrightarrow{m.v}$ obtenue en multipliant la masse du mobile par sa vitesse.

C'est cette grandeur, appelée quantité de mouvement, qui permettra de résoudre le problème suivant :

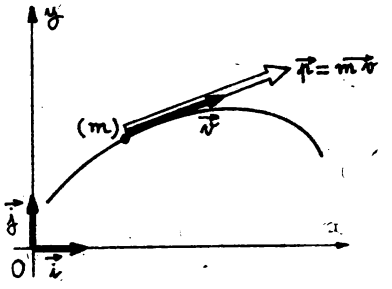


Les masses m, M et la vitesse $\vec{V}$ étant connues, que vaut la vitesse v ?

II- LA QUANTITE DE MOUVEMENT - ETUDE THEORIQUE

1°) Définition pour un point matériel

La quantité de mouvement d'un point matériel de masse m animé de la vitesse $\vec{v}$ est la grandeur vectorielle $\vec{p} = m\vec{v}$



$\vec{p} = m\vec{v}$

La vitesse et la quantité de mouvement du mobile ont même direction et sens. Elles sont tangentes à la trajectoire.

L'unité internationale de quantité de mouvement se déduit des unités de masse et de vitesse. C'est le kilogramme.mètre par seconde (kg.m/s)

La dimension de la quantité de mouvement est :

$$[P] = M.L.T^{-1}$$

2°) La relation fondamentale de la dynamique

Soit $\vec{f}$ la force agissant sur une particule et soit $\vec{\gamma}$ son accélération dans un référentiel fixe. On a :

$$\vec{m\gamma} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{mv})}{dt} \quad \text{(car m est constant)}. \quad \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La relation fondamentale de la dynamique s'exprime de deux façons équivalentes :

$$\boxed{\vec{f} = \vec{m\gamma}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

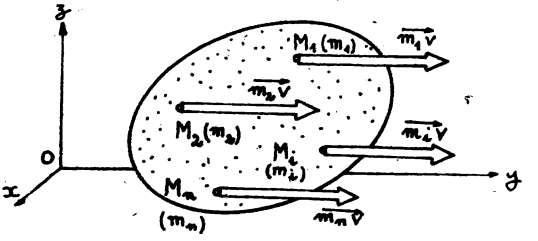
La force agissant sur un point matériel est égale à la dérivée par rapport au temps de sa quantité de mouvement.

3°) Quantité de mouvement d'un système matériel

La quantité de mouvement d'un système matériel est la somme vectorielle des quantités de mouvement de ses différents points :

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{m_i . v_i}}$$

a/ Cas [illegible]



Tous les points du système [illegible] vitesse $\vec{v}$; sa quantité de mouvement est :

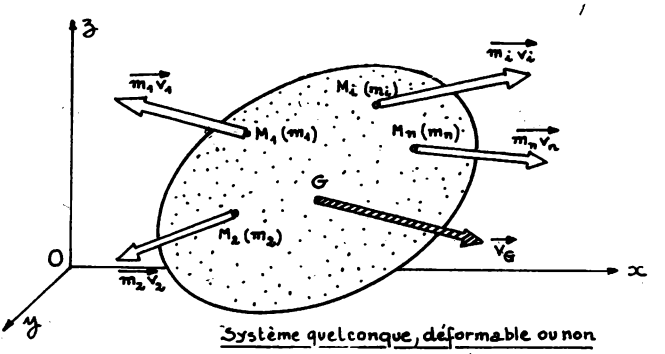
$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{m_i . v} = \vec{v}\sum_{i=1}^{n} m_i = M.\vec{v}$$

[illegible]ystème en mouvement quelconque (déformable ou non)

Soit M la masse totale du système. Son centre de gravité G est défini par :

$$M . \vec{OG} = \sum_{i=1} m_i . \vec{OM_i} \qquad (1)$$

Dérivons cette relation par rapport au temps :



Système quelconque, déformable ou non

$$M \cdot \frac{d\vec{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} i \qquad (2)$$

$\frac{d\vec{OG}}{dt}$ est la vitesse du centre de gravité et $\frac{d\vec{OM}}{dt}i$ celle du point M_i de masse m_i.

La relation (2) s'écrit donc : $M.\vec{v}_G = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{m_i . v_i}$

Par définition, $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{m_i . v_i}$ est la quantité de mouvement totale du système. D'où le théorème :

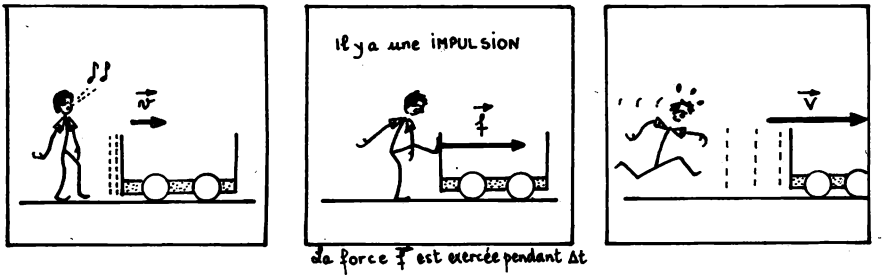
> La quantité de mouvement d'un système matériel en mouvement quelconque est le même que celle de son centre de gravité considéré comme un point matériel où l'on aurait concentré toute la masse du système.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{m_i . v_i} = M.\vec{v}_G$$

III-L'IMPULSION - THEOREME DE LA VARIATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

1°) Introduction expérimentale

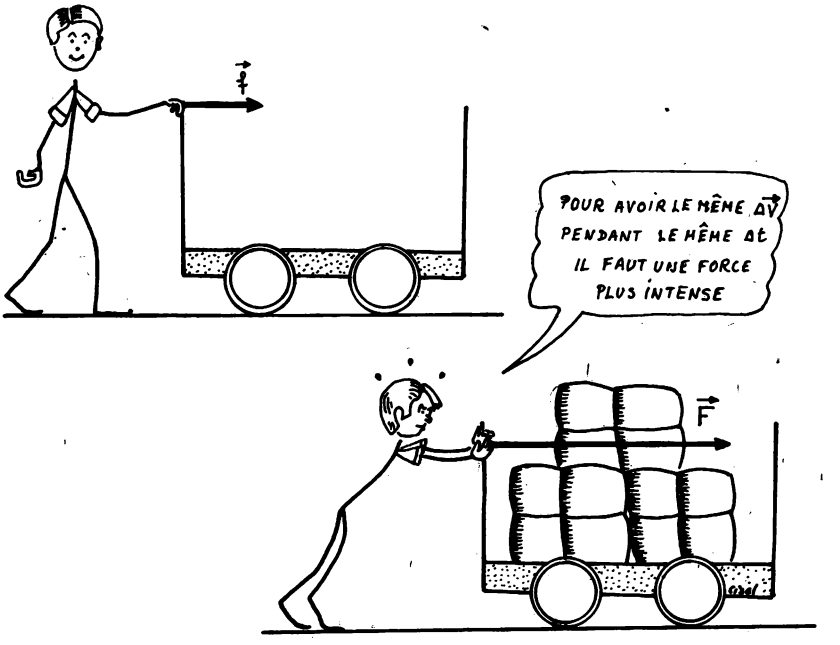
Imaginons un chariot se déplaçant à vitesse constante sur une route parfaitement lisse (si la route n'est pas lisse, elle est légèrement en pente, de façon que les forces de frottement soient exactement compensées par la composante tangentielle du poids).



Le petit personnage qui suivait le chariot lui imprime une force $\vec{f}$ pendant une durée Δ t. A l'issue de cette "impulsion", la vitesse du chariot a augmenté. Elle est passée de $\vec{v}$ à $\vec{V}$.

L'augmentation de la vitesse est d'autant plus importante que la durée Δt de l'impulsion est plus grande.

Supposons maintenant que l'expérience soit répétée avec un chariot vide puis avec un chariot plein. Pour obtenir le même accroissement de vitesse pendant la même durée Δt, il faudra exercer une force plus grande.



Ces considérations montrent l'intérêt d'introduire une nouvelle grandeur physique, liée à la fois à la force $\vec{F}$ et à sa durée d'action Δt : c'est l'impulsion définie par :

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

2°) Définition

Lorsqu'une force constante $\vec{F}$ agit pendant la durée Δt sur un point matériel, il est soumis à une impulsion dont l'expression est la grandeur vectorielle :

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

L'unité d'impulsion est le newton.seconde (N.s) et sa dimension : $M.L.T^{-2} \times T = M.L.T^{-1}$

L'impulsion a même dimension que la quantité de mouvement.

3°) Relation entre impulsion et quantité de mouvement

Dans l'expression de l'impulsion, remplaçons $\vec{F}$ par $m \cdot \vec{\gamma}$:

$$\vec{I} = m \cdot \vec{\gamma} \cdot \Delta t$$

Puisque la force $\vec{F}$ est constante, l'accélération $\vec{\gamma}$ est constante. L'accélération moyenne pendant la durée Δt est égale à l'accélération instantanée :

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$$

Portons l'expression de $\vec{\gamma}$ dans celle de $\vec{I}$:

$$\vec{I} = m \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{\Delta v} = \Delta(\vec{mv})$$

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta(\vec{mv})$$

Soit $\vec{mv_1}$ la quantité de mouvement du point matériel au début de la durée Δt et $\vec{mv_2}$ sa quantité de mouvement à la fin. On a :

$$\Delta(\vec{mv}) = \vec{mv_2} - \vec{mv_1}$$

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \vec{mv_2} - \vec{mv_1}$$

Théorème

La variation de la quantité de mouvement d'un point matériel pendant une certaine durée est égale à l'impul- reçue par le point pendant cette durée.

4°) as d'un solide indéformable. Théorème de la variation de la quantité de mouvement

Soit $\sum \vec{F}$ la résultante de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures agissant sur un solide pendant la durée Δt :

$$\sum \vec{F} = \underbrace{\sum \vec{F}_{int}}_{\vec{0}} + \sum \vec{F}_{ext}$$

Les forces intérieures étant opposées deux à deux, l'impulsion totale des forces intérieures est nulle. L'impulsion totale est égale à l'impulsion des forces extérieures :

$$(\sum \vec{F}) \cdot \Delta t = (\sum \vec{F}_{ext}) \cdot \Delta t$$

L'expression du paragraphe précédent s'écrit :

$$(\sum \vec{F}_{ext}) \quad \Delta t = \vec{Mv}_2 - \vec{Mv}_1$$

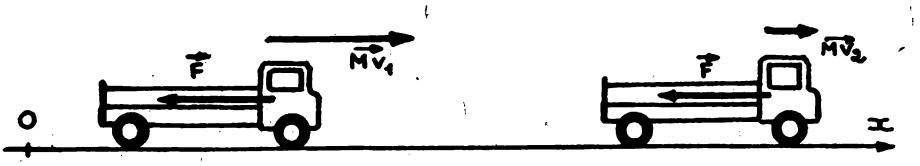
M étant la masse du système, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vitesses de son centre de gravité au début et à la fin de l'impulsion.

Théorème de la variation de la quantité de mouvement

> La variation de la quantité de mouvement d'un solide pendant une certaine durée est égale à l'impulsion totale des forces extérieures agissant sur ce solide pendant cette durée.
>
> $$(\sum \vec{F}_{ext}) \Delta t = \vec{Mv}_2 - \vec{Mv}_1$$

Exemple d'application du théorème de la variation de la quantité de mouvement :

Un camion de masse $M = 2{,}00.10^3$ kg est soumis à une force de freinage constante de module $F = 2{,}00.10^3$ N. En quelle durée passe-t-il de 108 km/h (30m/s) à 36 km/h (10m/s) ?



D'après le théorème de la variation de la quantité de mouvement :

$$\vec{F} \cdot \Delta t = (\vec{Mv_2}) - (\vec{Mv_1})$$

Projetons cette relation sur l'axe orienté en conservant la convention habituelle pour la force $\vec{F}$: la valeur algébrique de sa projection est son module précédé d'un signe.

Dans tous les exercices faisant intervenir la quantité de mouvement, nous adoptons la même convention que pour les grandeurs cinématiques : Mv est une valeur algébrique, positive, négative ou nulle.

$$-F \cdot \Delta t = (Mv_2) - (Mv_1)$$

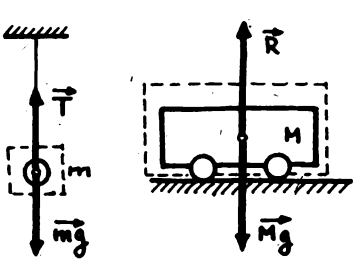
$$\Delta t = \frac{M(v_2 - v_1)}{-F} = \frac{2.10^3(10 - 30)}{-2.10^3} = 20 \text{ s.}$$

On peut évidemment résoudre l'exercice plus classiquement, en commençant par calculer l'accélération du véhicule, puis en utilisant les équations de son mouvement.

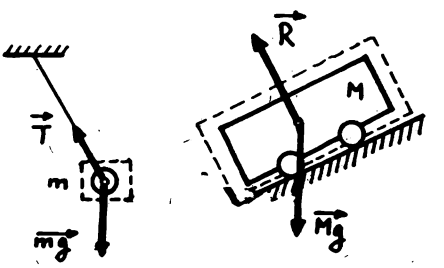
IV- CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT D'UN SYSTEME ISOLE

1°) Système mécaniquement isolé

Un système est mécaniquement isolé si la résultante des forces extérieures agissant sur lui est nulle.



Systèmes isolés mécaniquement

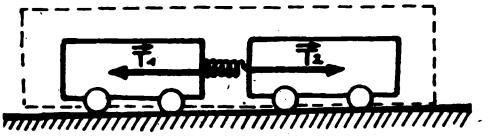


Systèmes non isolés mécaniquement

La masse m et le chariot sont mécaniquement isolés sur les figures de gauche car la résultante des forces extérieures auxquelles ils ont soumis est nulle. Ils ne sont pas isolés sur les figures de droite parce que la résultante des forces extérieures n'est pas nulle.

2°) Déformation d'un système isolé

Bien que les forces intérieures soient opposées deux à deux et que leur résultante soit nulle, elles peuvent provoquer la déformation d'un système.



Système isolé mécaniquement

Ce système, formé de deux chariots sur un plan horizontal comprimant entre eux un ressort est mécaniquement isolé.

Les tensions $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ sont deux forces intérieures :

$$\sum \vec{F}_{int} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

Pourtant, si après avoir comprimé le ressort, on l'abandonne, les forces intérieures $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ provoquant de petites oscillations des deux chariots autour d'ue position moyenne.

3°) Théorème de la conservation de la quantité de mouvement d'un système mécaniquement isolé

Considérons un système mécaniquement isolé, formé des points de masses m_1 , m_2 , ... m_i ... m_n

L'impulsion totale des forces extérieures est nulle. L'impulsion totale des forces intérieures est également nulle, mais nous supposerons qu'elle peut provoquer des déformations du système.

Soit $(\overrightarrow{F_{int}})_i \Delta t$ l'impulsion reçue par le point de masse m_i pendant la durée Δt.

$(\vec{v}_i)_I$ et $(\vec{v}_i)_F$ étant les vitesses initiale et finale de ce point, on a d'après le théorème de la variation de la quantité de mouvement :

$$(\overrightarrow{F_{int}})_i \Delta t = m_i(\vec{v}_i)_F - m_i(\vec{v}_i)_I$$

- Pour l'ensemble du système :

$$\sum \underbrace{(\vec{F}_{int})_i \Delta t}_{\vec{0}} = \sum [m_i(\vec{v}_i)_F - m_i(\vec{v}_i)_I] = \vec{0}$$

Développons la somme des termes entre crochets et regroupons les termes correspondants aux quantités de mouvement initiales et finales :

$$[m_1(\vec{v}_1)_F - m_1(\vec{v}_1)_I] + [m_2(\vec{v}_2)_F - m_2(\vec{v}_2)_I] + \text{etc.} = \vec{0}$$

$$[m_1(\vec{v}_1)_F + m_2(\vec{v}_2)_F + \text{etc} \ldots]$$

$$-[m_1(v_1)_I + m_2(v_2)_I + \ldots] = \vec{0}$$

$$\sum m_i(\vec{v}_i)_F - \sum m_i(\vec{v}_i)_I = \vec{0}$$

$$\boxed{\sum m_i(\vec{v}_i)_F = \sum m_i(\vec{v}_i)_I}$$

Théorème

Dans un système mécaniquement isolé, la somme des quantités de mouvement des diverses parties reste constante quelles que soient les modifications du système provoquées par les forces intérieures.

Corollaire

Nous avons démontré au § II,3° a/- que $\sum \overline{m_i v_i} = M\vec{v}_G$ (M, masse totale du système et $\vec{v}_G$, vitesse de son centre de gravité).

On a donc : $M(\vec{v}_G)_F = M(\vec{v}_G)_I$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\vec{v}_G)_F = (\vec{v}_G)_I}$$

Lorsqu'un système se déforme sous l'action de forces intérieures, la vitesse de son centre de gravité n'est pas modifiée.

Vérification expérimentale

Revenons à l'expérience du début de ce chapitre. L'ensemble des deux chariots comprimant entre eux un ressort constitue un système mécaniquement isolé, puisque pour chacun d'eux la résultante des forces extérieures est nulle. Les tensions du ressort sont des forces intérieures au système.

Dans l'état initial du système, les deux chariots sont immobiles et la quantité de mouvement initiale est nulle :

$$\vec{P}_i = \vec{0}$$

Compte tenu des renseignements suivants :

- $M = 2m$;
- $D = 2d$;
- Les deux chariots atteignent en même temps leur butoir, montrer, sans utiliser le théorème de conservation, que la quantité de mouvement finale est nulle. (4)

— • —

On peut montrer théoriquement, que le centre de gravité du système reste immobile tout au long de l'expérience: lorsque le ressort est détendu (état final), le chariot de masse M se déplace à la vitesse v et le chariot de masse m se déplace à la vitesse V. La quantité de mouvement finale est :

$$\vec{P}_f = M\vec{v} + m\vec{V}$$

D'après le théorème de conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{P}_f = \vec{P}_i = M\vec{v} + m\vec{V} = \vec{0}$$

La quantité de mouvement totale est égale au produit de la masse totale du système par la vitesse de son centre de gravité :

$$M\vec{v} + m\vec{V} = (M + m)\,\vec{v}_G = \vec{0}$$

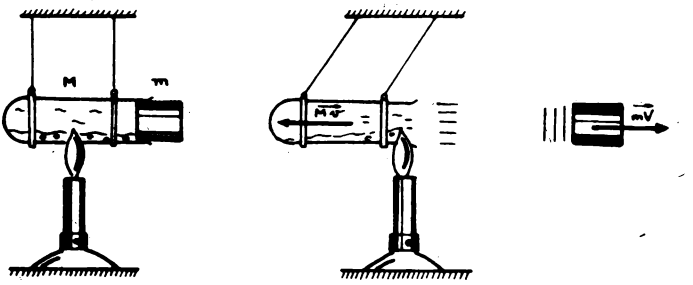
$$\vec{v}_G = \vec{0}$$

Le centre de gravité était un point immobile dans l'état initial, il demeure immobile dans l'état final bien que les deux parties du système se déplacent l'une par rapport à l'autre.

(4). On montre d'abord que $\vec{V} = -2\vec{v}$. Soit $\vec{P}_f = m\vec{V} + M\vec{v} = m(-2\vec{v}) + 2m\vec{v} = \vec{0}$. $\vec{P}_f = \vec{0}$

V - APPLICATIONS DU THEOREME DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT

1°) Le phénomène de recul



Nous versons un peu d'eau dans une éprouvette, nous l'obturons avec un bouchon et à l'aide de deux fils, suspendons-la dans une position horizontale. L'ensemble constitue un système mécaniquement isolé, car le poids est équilibré par les tensions des fils. Plaçons un bec bunsen sous l'éprouvette. L'eau commence à bouillir. Après une demi-minute environ, le bouchon part avec bruit d'un côté, tandis que l'éprouvette s'écarte de l'autre côté. Mais le bouchon, plus léger que l'éprouvette, prend la vitesse la plus grande.

L'ensemble éprouvette + bouchon forme un système isolé à l'instant du départ (ensuite, cela n'est plus vrai, car le bouchon est soumis uniquement à son poids: il n'est plus isolé; de même, l'éprouvette se met à osciller sous l'action de son poids et des tensions, trois forces dont la résultante n'est pas nulle).

$\vec{v}$ étant la vitesse horizontale de l'éprouvette à l'instant du départ et $\vec{V}$, celle du bouchon, nous avons :

- Quantité de mouvement initiale : $\vec{P}_i = \vec{0}$
- Quantité de mouvement finale : $\vec{P}_f = M\vec{v} + m\vec{V}$

Théorème de conservation : $\vec{P}_f = \vec{P}_i \quad M\vec{v} + m\vec{V} = \vec{0}$

On en déduit la vitesse de recul de l'éprouvette en fonction de la vitesse du bouchon :

$$\vec{v} = -\frac{m}{M}\vec{V}$$

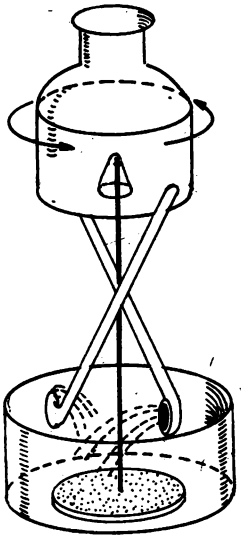
Remarque

L'expérience des deux chariots répond exactement à la même théorie. On peut exprimer la vitesse de l'un des cha-

riots en fonction de l'autre. Le raisonnement s'applique sans modification pour le calcul de la vitesse de recul d'une arme à feu.

2°) Le mouvement à réaction

L'homme se déplace en prenant appui sur le sol, le train sur les rails, l'automobile sur la route ... Cependant, prendre appui pour se repousser n'est pas la condition indispensable de tout mouvement. En effet, le phénomène de recul permet aussi de créer un mouvement.



Cette figure représente un tourniquet hydraulique. En s'échappant par les tuyaux coudés, l'eau les repousse en sens inverse et le dispositif se met à tourner. Il s'agit là d'un type de mouvement à réaction.

Le moteur à réaction est une machine qui éjecte à grande vitesse les gaz formés par la combustion d'un carburant. L'avion ou la fusée se déplace en sens inverse à celui du jet de gaz.

Nous nous proposons de déterminer à quoi est égale la poussée d'une fusée, c'est-à-dire la force qui la projette dans l'espace.

Nous nous placerons dans les conditions suivantes : les forces de gravitations sont nulles (ou négligeables devant la force de propulsion); il n'y a pas de forces de frottement. La fusée constitue ainsi un système mécaniquement isolé.

Débit des gaz

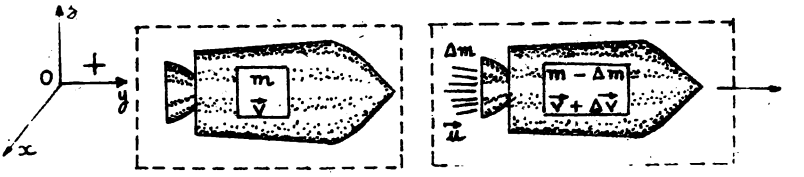
C'est la masse de gaz éjectée par unité de temps. Nous l'appelons μ (kg/s). Le débit est constant.

Vitesse d'éjection des gaz

On fournit toujours la vitesse d'éjection $\vec{u}$ des gaz par rapport à la fusée. Elle est constante. Mais si la vitesse de la fusée est $\vec{v}$ par rapport à un référentiel fixe, la vitesse des gaz par rapport à ce référentiel est:

$$\vec{v} + \vec{u}$$

(C'est la somme de la vitesse $\vec{u}$ des gaz par rapport à la fusée et de la vitesse d'entrainement $\vec{v}$ de la fusée).



Instant t

La masse totale de la fusée, y compris son carburant est m. Sa vitesse par rapport à un référentiel fixe est $\vec{v}$. La quantité de mouvement du système est :

$$\vec{P}_i = \vec{mv}$$

Pendant l'intervalle de temps Δt, une masse Δm de gaz est éjectée. La masse de la fusée diminue de Δm, mais sa vitesse augmente de $\Delta\vec{v}$.

Instant t + Δt

La quantité de mouvement totale est la somme des quantités de mouvement de la fusée et des gaz :

fusée : $(m - \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v})$

gaz : $\Delta m(\vec{v} + \Delta\vec{v} + \vec{u})$

$$\vec{P_F} = (m - \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m(\vec{v} + \Delta\vec{v} + \vec{u})$$

Le système étant mécaniquement isolé, on peut appliquer le théorème de conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{P}_F = \vec{P}_i$$

$$(m - \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m(\vec{v} + \Delta v + \vec{u}) = \vec{mv}$$

Projetons cette relation sur l'axe orienté, en tenant compte du fait que la vitesse d'éjection $\vec{u}$ des gaz a le sens négatif.

$$(m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v + \Delta v - u) = mv$$

Après simplification, on obtient :

$$m\Delta v = \Delta m.u$$

Divisons par Δt : $m\,\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}u$. $\frac{\Delta m}{\Delta t}$, masse de

gaz éjectée par unité de temps, est par définition le débit μ .

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \mu u.$$

Si nous faisons tendre Δt vers zéro, le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ tend vers l'accélération instantanée γ de la fusée.

$$m\gamma = \mu u$$

Dans cette relation, $m\gamma$ est une force : c'est la poussée exercée par les gaz sur la fusée :

$$\boxed{F = \mu u}$$

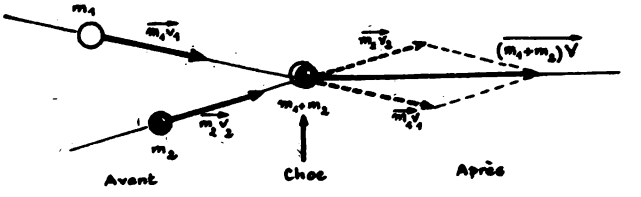
Elle est égale au produit du débit des gaz par leur vitesse d'éjection par rapport à la fusée. Elle est constante puisque ces grandeurs sont constantes. La poussée est constante, mais la masse de la fusée décroît constamment, au fur et à mesure que les gaz sont éjectés. Il en résulte que l'accélération de la fusée croît continuellement.

Les fusées géantes qui placent les satellites habités en orbite autour de la Terre ou envoient des sondes vers les planètes du système solaire utilisent la réaction de combustion entre l'hydrogène et l'oxygène. Dans la phase de lancement, les gaz sont éjectés avec une vitesse voisine de 4 000 m/s à raison de plusieurs tonnes par seconde. (15 tonnes par seconde pour les fusées Saturne V).

3°) Les chocs parfaitement mous

Au cours d'un choc parfaitement mou entre deux mobiles, les deux mobiles s'associent et poursuivent leur mouvement ensemble.

Soient deux billes animées de mouvements rectilignes uniformes sur un plan horizontal sans frottement. Si les deux billes se rencontrent, il y a choc. Le choc est parfaitement mou si elles restent collées (elles sont par exemple en argile molle). m_1 et m_2 étant les masses respectives et $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vitesses, déterminons la vitesse commune après le choc, $\vec{V}$.



Avant le choc, la quantité de mouvement du système est : $\vec{P} = \overrightarrow{m_1 v_1} + \overrightarrow{m_2 v_2}$

Après le choc, la masse des deux billes collées est $m_1 + m_2$ et leur vitesse commune $\vec{V}$. La quantité de mouvement du système est :

$$\vec{P}_f = (m_1 + m_2)\,\vec{V} \quad .$$

Le système étant mécaniquement isolé, appliquons le théorème de conservation de la quantité de mouvement :

$$(m_1 + m_2)\,\vec{V} = \overrightarrow{m_1 v_1} + \overrightarrow{m_2 v_2}$$

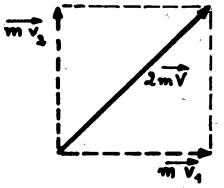
La vitesse des billes après le choc est :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{m_1 v_1} + \overrightarrow{m_2 v_2}}{m_1 + m_2}$$

A titre d'exemple, considérons le cas où les masses des deux billes sont égales et où leurs vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ont même module v et sont orthogonales.

Déterminons la vitesse après le choc et les énergies cinétiques avant et après le choc.

Avant le choc: $\vec{P}_i = \vec{mv}_1 + \vec{mv}_2$



$$P_i = \sqrt{(mv)^2 + (mv)^2} = mv\sqrt{2}$$

Après le choc: $P_f = 2m \,.\, V$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$2m.V = mv\sqrt{2} \qquad V = v\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Energie cinétique avant le choc :

$$Ec_i = \tfrac{1}{2}\, mv^2 + \tfrac{1}{2}\, mv^2 = mv^2$$

Energie cinétique après le choc :

$$Ec_f = \tfrac{1}{2}\,(2m)\,\left(v\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\, mv^2$$

Dans ce cas particulier, la moitié de l'énergie cinétique a disparu au cours du choc.

Cette perte d'énergie cinétique est générale au cours d'un choc mou. En contrepartie, il apparaît une quantité égale d'énergie thermique.

En résumé

Au cours d'un choc mou entre deux parties d'un systè-

me mécaniquement isolé :

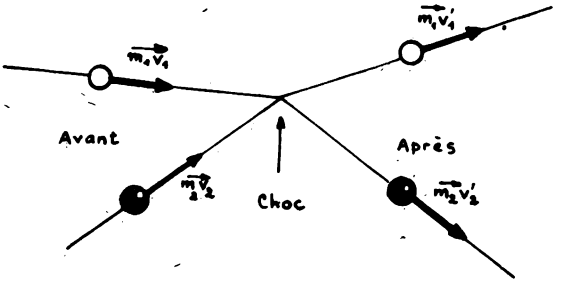
- Il y a conservation de la quantité de mouvement totale du système ;
- Le choc s'accompagne d'un échauffement du système et il y a diminution de l'énergie cinétique totale du système.

4°) Les chocs parfaitement élastiques

a/ Définition

Un choc entre deux parties d'un système mécaniquement isolé est parfaitement élastique :

- S'il y a conservation de la quantité de mouvement totale du système ;
- S'il y a conservation de son énergie cinétique totale

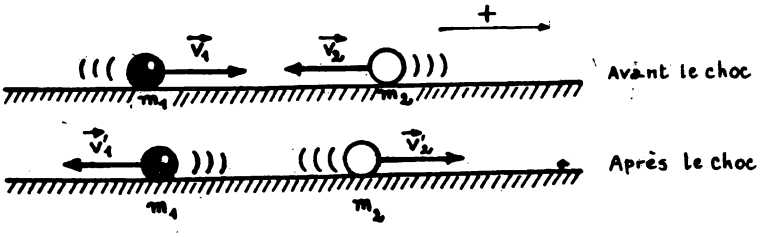


$$\overrightarrow{m_1 v_1} + \overrightarrow{m_2 v_2} = \overrightarrow{m_1 v'_1} + \overrightarrow{m_2 v'_2}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad \frac{1}{2} m_1 v_2 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

b/ Chocs sans changement de direction (Choc de "plein fouet")

Nous n'étudierons que le cas de deux billes dont les vitesses ont même direction et qui se heurtent de front. Après le choc, les vitesses ont encore même direction.



Connaissant les vitesses $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ avant le choc, on cherche les vitesses $\vec{v_1'}$ et $\vec{v_2'}$ après le choc.

Conservation de la quantité de mouvement

$$\overrightarrow{m_1 v_1} + \overrightarrow{m_2 v_2} = \overrightarrow{m_1 v_1'} + \overrightarrow{m_2 v_2'}$$

algébriquement : $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad (1)$

v_1 , v_2 , v_1' , et v_2' sont des valeurs algébriques, positives, négatives ou nulles.

La figure représente $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ de sens contraires ($v_1 > 0$ et $v_2 < 0$ d'après le sens positif choisi). Mais on peut imaginer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ont même sens. Si $\|\vec{v_1}\| > \|\vec{v_2}\|$, il y aura un choc entre les deux billes.

La seule relation (1) ne permet pas de calculer v_1' et v_2' . Une seconde relation est fournie par la conservation de l'énergie cinétique totale. Nous résoudrons donc le système :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad (1)$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \qquad (2)$$

Regroupons les termes en m_1 et m_2 :

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \qquad (3)$$

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \qquad (4)$$

Effectuons le rapport (4)/(3)

$$\frac{v_1^2 - v_1'^2}{v_1 - v_1'} = \frac{v_2'^2 - v_2^2}{v_2' - v_2}$$

ou $$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \qquad (5)$$

A l'aide des relations (1) et (5), nous formons le système de deux équations à deux inconnues :

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$v_1' \quad v_2' = -v_1 + v_2$$

dont les solutions sont :

$$\boxed{v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2} \quad \text{et} \quad \boxed{v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2}$$

Cas particuliers

1/ La bille de masse m_2 est immobile avant le choc. On obtient les vitesses après le choc en remplaçant v_2 par zéro dans les expressions précédentes :

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad \text{et} \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Le lecteur pourra très utilement retrouver directement ces expressions à partir des deux équations de conservation :

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

Applications numériques :

- $m_1 = 200g$, $m_2 = 100g$, $v_1 = + 1{,}00$ m/s

  on obtient : $v_1' = + 0{,}33$ m/s

  $v_2' = + 1{,}33$ m/s

Après le choc, la première bille poursuit son mouvement dans le même sens, mais avec une vitesse plus faible.

- $m_1 = 100g$, $m_2 = 200g$, $v_1 = + 1{,}00$ m/s

  on obtient : $v_1' = - 0{,}33$ m/s

  $v_2' = + 0{,}67$ m/s

Après le choc, la première bille rebrousse chemin.

2/ Les deux billes sont identiques ($m_1 = m_2$) et l'une est immobile avant le choc :

Avant le choc : v_1 ; $v_2 = 0$

Après le choc : $v_1' = 0$; $v_2' = v_1$

Après le choc, la première bille est immobile et la seconde a pris la vitesse de la première : les billes ont échangé leurs vitesses.

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 13

$$\vec{p} = \vec{mv}$$

1°) Pour un point matériel

C'est une grandeur vectorielle, égale au produit de la masse du point par sa vitesse. Elle a même direction et sens que la vitesse. Son unité est le kilogramme mètre par seconde (kg.m/s).

2°) Deux expressions équivalentes de la relation fondamentale de la dynamique

$$\vec{f} = m\vec{\gamma} \iff \vec{f} = \frac{d(\vec{mv})}{dt}$$

3°) Système matériel

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v_i}$$

En dérivant par rapport au temps l'expression de définition du centre de gravité d'un système matériel :

$$M.\vec{OG} = m_i . \vec{OM_i}$$

on démontre que :

$$\vec{p} = \sum \overrightarrow{m_i v_i} = M \vec{v_G}$$

La quantité de mouvement d'un système matériel est la même que celle de son centre de gravité considéré comme un point matériel ayant toute la masse du système.

II - L'IMPULSION. THEORÈME DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT.

L'impulsion d'une force constante $\vec{F}$, agissant pendant la durée Δt sur point matériel est la grandeur vectorielle

$$\overrightarrow{I} = \overrightarrow{F}. \Delta t$$

Exprimée en newton. seconde, grandeur homogène à une quatité de mouvement.
Téorème de la variation de la quantité de mouvement (important).

La variation de la quantité de mouvement d'un solide pendant une certaine durée est égale à l'impulsion totale des forces extérieures agissant sur ce solide pendant cette durée.

$$(\sum \overrightarrow{F_{ext}})\,\Delta t = \vec{M}v_2 - \vec{M}v_1$$

$\vec{v}_2$ est la vitesse du centre de gravité au début de l'impulsion et $\vec{v}_1$ sa vitesse à la fin de l'impulsion.

III CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT D'UN SYSTEME MECANIQUEMENT ISOLE.

Un système est mécaniquement isolé si la résultante des forces extérieures agissant sur lui est nulle.

Théorème (important)

Dans un système mécaniquement isolé, la somme des quantités de mouvement des diverses parties reste constante quelles que soient les modifications du système provoquées par les forces intérieures.

$$\sum m_i \overrightarrow{(v_i)}_F = \sum m_i \overrightarrow{(v_i)}_I$$

$$\vec{P}_F = \vec{P}_I$$

IV APPLICATIONS DU THEOREME DE CONSERVATION DE LA QUANTITE DE MOUVEMENT.

1°) Poussée d'une fusée

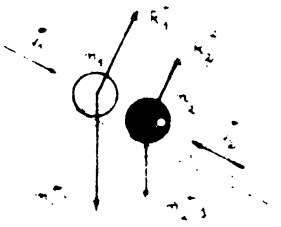
$$\vec{F} = \mu \vec{u}$$

Il faut savoir démontrer l'expression ci-dessus.
μ : débit des gaz (kg/s) ; u : vitesse d'éjection (m/s)

2°) Les chocs.

Nous avons établi les formules du cours pour des systèmes mécaniquement isolés ($\sum \vec{F}_{ext} = 0$), ce qui permettait d'appliquer le téorème de conservation de la quantité de mouvement.

Pratiquement, on peut utiliser ces formules même si le système n'est pas mécaniquement isolé. Par exemple, au cours du choc entre deux pendules en mouvement ou entre deux billes sur un plan incliné, dans ce dernier cas, la somme du po[illegible] la [illegible] nulle. Mais la durée Δt du choc est extrêmement brève.



L'impulsion des forces extérieures est donc négligeable et la variation de la quantité de mouvement, qui lui est égale (§ III) est négligeable.

Nous dirons donc, dans tous les cas, que le système est mécaniquement isolé pendant le choc. Mais s'il n'est pas isolé avant et après le choc, on prendra soin de parler de "vitesse juste avant et juste après le choc".

a - Chocs mous

Au cours d'un choc parfaitement mou :
- les deux mobiles deviennent solidaires ;
- il y a conservation de la quantité de mouvement totale :
- le système s'échauffe et perd une partie de son énergie cinétique.

b - Chocs parfaitement élastiques :

Au cours d'un choc parfaitement élastique, il y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique totales.

Le lecteur doit savoir démontrer les expressions donnant les vitesses après un choc de plein fouet. Il remarquera la propriété intéressante :

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \quad \text{(somme algébrique)}$$

EXERCICES

1 - Un homme de 60 kg court à la vitesse de 20 km/h. Il saute par l'arrière dans un chariot initialement immobile dont la masse est 20 kg. Quelle vitesse le chariot ainsi chargé prend-il (on suppose qu'il se trouve sur un plan horizontal parfaitement lisse)?

Debout à l'arrière du même chariot immobile, l'homme, lance avec une vitesse initiale horizontale une masse de 5 kg. A l'instant du départ, la masse est située à 2 m au dessus du sol. Elle tombe 8 mètres plus loin. Avec quelle vitesse le chariot recule-t-il ?

2 - Deux pendules simples de même longueur ℓ = 1,00 m sont suspendus en deux points très voisons O_1 et O_2 . Les masses de leurs sphères sont respectivement m_1 = 100 g et m_2 = 200 g. On les écarte de leur position d'équilibre de $\theta_0 = 6^0$ de part et d'autre de la verticale et on les abandonne sans vitesse initiale.

1°) Calculer les valeurs algébriques v_1 et v_2 de leur vitesse juste avant le choc. Le sens positif est celui de v_1 . g = 9,80 SI.

2°) Quelles seront les valeurs algébriques v_1' et v_2' des vitesses juste après le choc supposé parfaitement élastique ?

3°) Quelles seront les amplitudes θ_1 et θ_2 des masses m_1 et m_2 après le choc ?

4°) Donner sans calcul, mais en justifiant la réponse, les valeurs algébriques des vitesses V_1 et V_2 juste avant le second choc.

5°) Calculer les valeurs algébriques des vitesses V_1' et V_2' juste après le second choc. Comparer à v_1 et v_2 Peut-on prévoir les amplitudes atteintes au cours des rebonds qui suivront ?

3 - 1°) Un pendule simple est formé d'une sphère métallique suspendue à un fil supposé inextensible et de masse négligeable. La masse de la sphère est m_1 = 100 g. La longueur du pendule simple est ℓ = 0,882 m ± 0,001 m. Pour une valeur très faible de l'amplitude, la durée de 100 oscillations est 3 mn 8,4 s ± 0,2 s.

Donner la valeur de l'intensité g du champ de pesanteur au lieu de l'expérience, ainsi que son incertitude absolue.

2°) Etablir l'expression donnant la vitesse de la sphère à son passage par la position d'équilibre pour une amplitude θ_o des oscillations quelconques.

3°) Etablir l'expression donnant la tension du fil soutenant la sphère lorsque celle-ci passe par sa position d'équilibre.

Applications numériques pour les deux questions précédentes : calculer la vitesse de la sphère et la tension du fil pour une amplitude des oscillations

$$\theta_o = \frac{1}{10} \text{ rd.}$$

4°) On donne au pendule une amplitude telle que la vitesse linéaire de la sphère lorsqu'elle passe par sa position d'équilibre est $v_1 = 2{,}00$ m/s. On place alors une bille de petite dimension de masse $m_2 = 50{,}0$ g sur le trajet de la sphère, de sorte que cette dernière la heurte quand le pendule passe à sa position d'équilibre.

a/ Le choc étant parfaitement mou, la bille m_2 s'est collée à la sphère. Calculer la vitesse V des deux masses réunies juste après le choc.

b/ Calculer l'énergie thermique apparue au cours du choc.

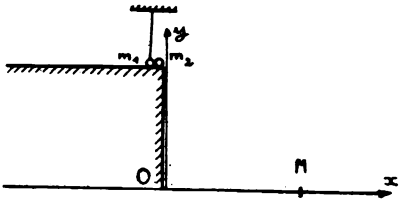
c/ Quelle sera, à partir du choc l'amplitude du mouvement du pendule ?

5°) Le choc est supposé parfaitement élastique. Il s'effectue lorsque la sphère de masse m_1 passe par sa position d'équilibre avec la vitesse $\vec{v}_1 = 2{,}00$ m/s.

a/ Quelles sont les valeurs algébriques v_1' et v_2' des vitesses de la sphère et de la bille juste après le choc ? Le sens positif est celui de la vitesse $\vec{v}_1$.

b/ Quelle sera, à partir du choc l'amplitude du mouvement du pendule ?

c/ La bille étant initialement au bord d'une table horizontale, en est chassée au moment du choc. La hauteur de la table est H = 0,80 m. Quelle est la trajectoire de la bille ? A quelle distance OM tombe-t-elle ? Respecter le choix des axes imposés sur la figure.



4 - N.B. Les parties A, B et C de ce problème sont indépendantes.

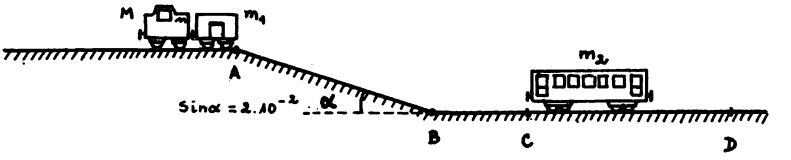
A/- La puissance maximale du moteur d'un locotracteur de masse M est P = 125 Kilowatts. Lorsqu'il se déplace sur une voie horizontale, la résultante des forces de frottement qui s'exercent sur lui est une force f = $1{,}00.10^4$ N, de sens contraire à celui du déplacement et indépendante de la vitesse.

1°) Le locotracteur démarre à l'instant t = 0 s au point d'abscisse x = 0 m en utilisant la puissance maximale de son moteur. Donner l'expression de sa vitesse en fonction de P, M, t et x.

2°) Donner l'expression de son accélération et calculer la vitesse limite atteinte.

B - Dans la suite du problème, on négligera les forces de frottement.

Le profil de la voie est représenté sur la figure ci-dessous :



La partie AB est en pente et la dénivellation entre les points A et B est 2,50 m.

Le locotracteur pousse un wagon de masse m_1 égale à 5,00 tonnes et l'abandonne au point A avec une vitesse initiale négligeable. Un second wagon de masse m_2 égale à 20,0 tonnes est immobile au point C.

1°) Quelle est la vitesse v_1 du premier wagon au moment où il heurte le second ? (employer le théorème de l'énergie cinétique). On donne : g = 9,80 N/kg.

2°) Quelles sont les vitesses u_1 et u_2 des deux wagons après le choc, supposé parfaitement élastique. préciser leurs sens.

3°) Un second choc aura lieu entre les deux wagons après une certaine durée. Expliquer pourquoi sans calcul. Quelle distance CD le second Wagon aura-t-il parcourue au moment de ce second choc ? On donne

$$\sin\alpha = 2.10^{-2} \quad \text{et} \quad BC = 50 \text{ m}.$$

4°) Quelles seront les vitesses V_1 et V_2 des wagons après le second choc, supposé parfaitement élastique? En préciser les sens.

C - Le locotracteur pousse à nouveau le premier wagon et l'abandonne au point A sans vitesse initiale. Le second wagon se déplace à la vitesse $\|\vec{v_2}\| = 1,00$ m/s de C vers B. Les deux wagons posédant un système "d'attelage automatique", un accrochage se produit entre B et C, équivalent à un choc parfaitement mou.

1°) Quelle est la vitesse V des deux wagons ainsi accrochés ?

2°) L'énergie cinétique totale du système formé par les deux wagons s'est-elle conservée au cours du choc ? Une nouvelle forme d'énergie est apparue au cours du choc. Laquelle ? En calculer la valeur.

5 - La masse des fusées saturne V qui conduisaient les cosmonautes américains sur la Lune était de $3,00.10^3$ tonnes au moment du départ.

1°) Quel devait être le débit minimal des gaz éjectés à $4,0.10^3$m/s pour que ces fusées puissent décoller ? Dans cette question on prendra g = 10,0 m/s^2.

Principe de résolution de cette question :

- Considérer que la fusée, de masse M vient tout juste de décoller. Sa vitesse initiale ainsi que sa quantité de mouvement son nulles.

- A l'instant Δt, elle a éjecté ΔM kg de gaz et sa vitesse est Δv. Exprimer la quantité de mouvement totale du système fusée + gaz.

- La fusée n'est pas un système mécaniquement isolé, puisqu'elle est soumise à une force extérieure : son poids (Les forces exercées par la fusée sur les gaz et par les gaz sur la fusée sont des forces intérieures au système fusée + gaz).

- On utilise le théorème de la variation de la quantité de mouvement. On en déduit l'accélération γ de la fusée au moment du décollage. La condition pour que ce décollage soit possible est $\gamma > 0$.

2°) A 80 km d'altitude, le premier étage de la fusée est largué. Le reste de la fusée (deuxième et troisième étages, cabine spatiale et module lunaire) a une masse égale

à $\frac{1}{2}$ M. La vitesse d'éjection des gaz du second étage et leur débit sont les mêmes que ceux du premier étage. Exprimer, en prenant g pour unité, l'intensité du champ de pesanteur local des cosmonautes. On suppose que la trajectoire de la fusée est encore verticale et que l'intensité du champs de pesanteur à 80 km d'altitude est sensiblement égale à l'intensité du champ de pesanteur au niveau du sol.

3°) Avant que le module lunaire ne se pose sur la Lune, la cabine spatiale était satellisée sur une orbite circulaire à 20 kilomètres du sol lunaire. Sa vitesse linéaire était de $1,68.10^3$ m/s. Le rayon de la Lune sera pris égal à $1,74.10^3$ Km. Calculer la période de révolution de la cabine autour de la Lune et l'intensité du champ de pesanteur lunéaire à l'altitude de 20 km.

4°) L'appareillage de bord utilisait une puissance électrique moyenne de 10 KW. L'énergie était fournie par une "pile à conbustible " transformant directement l'énergie chimique en énergie électrique, avec un rendement que l'on supposera égal à l'unité. Ce genre de pile consomme de l'oxygène et de l'hydrogène et donne de l'eau suivant la réaction globale :

$$H_2 + \frac{1}{2} O_2 \longrightarrow H_2O + \text{Energie électrique.}$$

Calculer les masses d'oxygène et d'hydrogène nécessaires pour une expédition d'une semaine. L'énergie libérée au cours de la formation d'une molécule d'eau à partir de ses éléments est 286 kJ.

On rappelle que H = 1g et O = 16 g.

6 - Deux corps, A de masse m et B, de masse 3 m, sont considérés comme ponctuels. A et B peuvent coulisser sur une barre métallique rectiligne, de masse négligeable, mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire à la barre en O.

1°)On place A et B de part et d'autre de O de sorte que OB = 3 OA

a - Quelle valeur d faut-il donner à OA pour que la période du pendule ainsi constitué soit T : 2,00 s en un lieu où g = 9,80 m/s^2 ?

b - Le réglage ayant été fait à 0^0 C et le métal de la tige ayant un coefficient de dilatation linéaire $\lambda = 1,85.10^5$, quelle variation relative de période une élévation de température de 20°C entraine-t-elle ?

c - On lâche le pendule après l'avoir écarté de 60 degrés de sa position d'équilibre ; quelle vitesse angulaire maximale atteint-il ?

2°) A ayant été enlevé de la tige, on place B à un mètre de O, à l'extrémité de la tige.

a - Ce pendule ayant été écarté de 90 degrés de sa position d' équilibre, puis abandonné à lui même, avec quelle vitesse le point B passe-t-il par la verticale ?

b - A ce moment, B frappe A placé sur une table horizontale. Sous le choc, supposé parfaitement élastique, A se met en mouvement et glisse jusqu'à l'extrémité C de la table.

A quelle distance du pied de la verticale passant par C la masse A frappe-t-elle le sol, situé à un mètre en dessous de la table, les frottements étant négligés ?

(Baccalauréat).

CHAPITRE 14

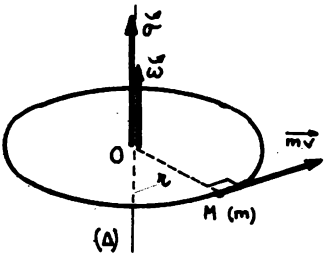
MOMENT CINETIQUE

IMPULSION ANGULAIRE

I - Le moment cinétique

1°) Définition pour un point matériel

Le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe est le moment par rapport à cet axe de la quatité de mouvement du point.



Soit un point M de masse m, décrivant la circonférence de rayon r, et soit $\vec{v}$ sa vitesse instantanée. Le moment cinétique du point est le moment de $\vec{mv}$ par rapport à O. C'est le vecteur $\vec{\sigma}$ de module :

$$\sigma = mv.r$$

avec $v = \omega r$:

$$\sigma = mr^2\omega$$

mr^2 est le moment d'inertie j du point par rapport à l'axe (Δ).

$$\sigma = j.\omega$$

vectoriellement

$$\vec{\sigma} = j.\vec{\omega}$$

L'unité internationale de moment cinétique est le kg. m^2 rd/s et sa dimension :

$$[\sigma] = M.L^2.T^{-1}$$

2°) Relation fondamentale de la dynamique de rotation.

Soit $\vec{\mathcal{M}}$ le moment de la force agissant sur le point et soit $\vec{\theta}''$ son accélération angulaire. On a :

$$\vec{\mathcal{M}} = j.\vec{\theta}'' = j.\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(j\vec{\omega})}{dt} \quad \text{ou} \quad \vec{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}$$

La relation fondamentale de la dynamique de rotation s'exprime de deux façons équivalentes :

$$\vec{\mathcal{M}} = j.\vec{\theta}'' \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}$$

Le moment de la force agissant sur un point matériel en rotation autour d'un axe fixe est égal à la dérivée par rapport au temps de son moment cinétique par rapport à l'axe.

3°) Moment cinétique d'un système matériel.

Le moment cinétique d'un système matériel par rapport à un axe est la somme vectorielle des moments cinétiques de tous ses points.

$$\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} j_i \cdot \vec{\omega}_i$$

Si le système matériel est un solide indéformable, tous ses points ont même vitesse angulaire $\vec{\omega}$:

$$\vec{\sigma} = \sum j_i \vec{\omega} = \vec{\omega} \sum j_i = J.\vec{\omega}$$

J est le moment d'inertie du solide par rapport à son axe de rotation.

$$\vec{\sigma} = J. \vec{\omega}$$

$$\sigma = J. \omega$$

Le moment cinétique d'un solide par rapport à son axe de rotation est égal au produit de son moment d'inertie par rapport à cet axe par sa vitesse angulaire.

II - L'IMPULSION ANGULAIRE. THEOREME DE LA VARIATION DU MOMENT CINETIQUE.

1°) Définition.

Lorsqu'un moment de force constant $\vec{\mathcal{M}}$ agit pendant la durée Δt sur un solide en rotation autour d'un axe fixe, il est soumis à une impulsion angulaire dont l'expression est :

$$I_{ang}^{\vec{}} = \vec{\mathcal{M}} \Delta t$$

$$I_{ang} = \mathcal{M} \Delta t$$

L'unité d'impulsion angulaire est le mètre.newton. seconde et sa dimension :

$$L.ML.T^{-2}.T = M.L.T^{-1}$$

2°) Relation entre impulsion angulaire et moment cinétique

a/ Solide indéformable.

Dans l'expression de l'impulsion angulaire, remplaçons $\vec{\mathcal{M}}$ par $J.\vec{\theta}''$:

$$\vec{I}_{ang} = J.\vec{\theta}''.\Delta t$$

Puisque le moment de force $\vec{\mathcal{M}}$ est constant, l'accélération angulaire $\vec{\theta}''$ est constante. Pendant la durée Δt, sa valeur moyenne est égale à sa valeur instantanée :

$$\vec{\theta}'' = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

Portons l'expression de $\vec{\theta}''$ dans celle de $\vec{I}_{ang}$:

$$\vec{I}_{ang} = J.\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}\Delta t = J.\Delta\vec{\omega} = \Delta(J\vec{\omega})$$

Soient $\vec{\omega}_i$ et $\vec{\omega}_f$ les vitesses angulaires initiale et finale :

$$\vec{\mathcal{M}}\Delta t = \Delta(J\vec{\omega}) = J\vec{\omega}_f - J\vec{\omega}_i$$

b/ Système déformable.

Nous admettrons le résultat suivant :

$$\vec{\mathcal{M}}\Delta t = \sum_{i=1}^{n}(j_i\vec{\omega}_i)_F - \sum_{i=1}^{n}(j_i\vec{\omega}_i)_I$$

$$\vec{\mathcal{M}}\Delta t = \vec{\sigma}_F - \vec{\sigma}_I$$

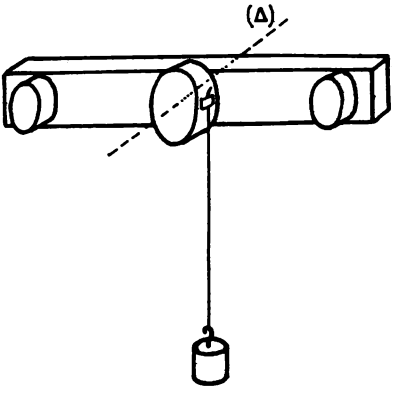
Théorème de la variation du moment cinétique :

La variation du moment cinétique d'un système matériel quelconque en rotation autour d'un axe fixe pendant une certaine durée est égale à l'impulsion angulaire reçue par le système pendant cette durée.

$$\vec{\mathcal{M}}\Delta t = \vec{\sigma}_F - \vec{\sigma}_I$$

Exemple d'application du théorème de la variation du moment cinétique.

Au treuil d'un dispositif utilisé en T.P. pour l'étude de la dynamique de rotation, on fixe, à l'aide d'un morceau de ruban adhésif, un fil chargé d'une masse de 100 g, puis on l'enroule de 2,5 tours sur le treuil.



Le dispositif est abandonné sans vitesse initiale. Après une rotation de 2,5 tours, dont la durée est : $t_1 = 6,7$ s, le fil se décroche et le système continue à tourner en ralentissant pendant une durée $t_2 = 2$ minutes et 6 secondes avant de s'immobiliser. Calculer le moment du couple de freinage, supposé constant, qui a provoqué l'arrêt du système. Son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation est $J = 2,70 \cdot 10^{-2}$ kg . m^2 .

Le premier mouvement du dispositif est une rotation uniformément accélérée, car il est soumis au moment constant de la tension du fil. Son accélération est θ_1''. On a :

$\theta = \frac{1}{2}\theta_1'' \ t^2 \Longleftrightarrow \theta_1'' = \frac{2\theta}{t^2}$. A l'instant t_1, $\theta = \theta_1 = 5\pi$

Pour $2\theta_1 = 10\pi$ rd et $t_1 = 6,7$ s, on calcule :

$\theta_1'' = 0,70$ rd/s^2

La vitesse angulaire atteinte à l'instant t_1 est :

$\omega_1 = \theta_1'' \ t_1 = 0,70 \times 6,7 = 4,69$ rd/s

Pour le deuxième mouvement, appliquons le théorème de la variation du moment cinétique :

$$\mathcal{M} \ t_2 = J\omega_f - J\omega_i$$

avec $\omega_f = 0$, $\omega_i = 4,69$ rd/s et $t_2 = 126$ s :

$$\mathcal{M} = \frac{-J\omega_i}{t_2} = -\frac{2,70.10 \times 4,69}{1,26.10^2} = -1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m . N}$$

III-CONSERVATION DU MOMENT CINETIQUE D'UN SYSTEME ISOLE

1°) Système en rotation isolé

Un système en rotation autour d'un axe fixe est mécaniquement isolé si la somme des moments des forces extérieures par rapport à son axe de rotation est nulle.

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{ext} \cdot \Delta t = \vec{0}$$

2°) Théorème

Dans un système en rotation mécaniquement isolé, l'impulsion angulaire des moments des forces extérieures est nulle. L'impulsion angulaire des moments des forces intérieures est également nulle, mais elle peut provoquer des déformations du système.

$\vec{\mathcal{M}}_{int} \Delta t = \vec{0}$, mais déforme le système.

Appliquons le théorème de la variation du moment cinétique :

$$\vec{\mathcal{M}}_{int} \Delta t = \vec{\sigma}_F - \vec{\sigma}_i = \vec{0}$$

ou

$$\vec{\sigma}_F = \vec{\sigma}_i$$

$$\sum (j_i \vec{\omega}_i)_F = \sum (j_i \cdot \vec{\omega}_i)_i$$

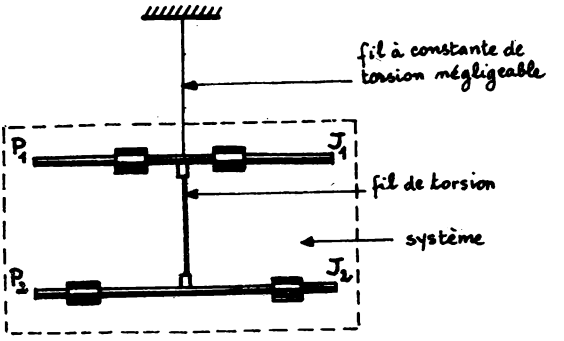
Dans un système en rotation autour d'un axe fixe, mécaniquement isolé, la somme des moments cinétiques des diverses parties reste constante quelles que soient les modifications du système provoquées par les moments des forces intérieures.

3°) Exemples d'applications du théorème de conservation du moment cinétique

Nous n'appliquerons ce théorème que dans des cas particuliers très simples.

a/ Premier exemple

Le système est formé de deux pendules de torsion reliés par un fil de torsion. Leurs moments d'inertie respectifs sont J_1 et J_2 .



L'ensemble est suspendu à un fil de constante de torsion négligeable. Le système est mécaniquement isolé. En effet :

. Son poids est équilibré par la tension du fil et le moment total de ces forces est nul.

. On néglige le moment de rappel du fil de suspension dont la constante de torsion est très faible.

On donne une certaine torsion au fil reliant les deux pendules en faisant tourner l'un d'eux et en l'abandonnant sans vitesse angulaire initiale. On constate que les pendules P_1 et P_2 sont animés de mouvements sinusoidaux de rotation, de sens contraires. Ces mouvements sont des déformations du système sous l'action de deux moments intérieurs de somme algébrique nulle : les moments de rappel du fil de torsion.

On se propose de comparer les vitesses angulaires $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ des deux pendules à un instant quelconque.

A l'instant initial, les vitesses angulaires sont $(\vec{\omega}_1)_o = \vec{0}$ et $(\vec{\omega}_2)_o = \vec{0}$. Le moment cinétique initial est :

$$\vec{\sigma}_i = J_1(\vec{\omega}_1)_o + J_2(\vec{\omega}_2)_o = \vec{0}$$

A un instant t quelconque, les vitesses angulaires sont $\vec{\omega}_1$ et $\vec{\omega}_2$ et le moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_f = J_1\vec{\omega}_1 + J_2\vec{\omega}_2$$

Le système étant mécaniquement isolé, appliquons le théorème de conservation du moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_F = \underbrace{\vec{\sigma}_i}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

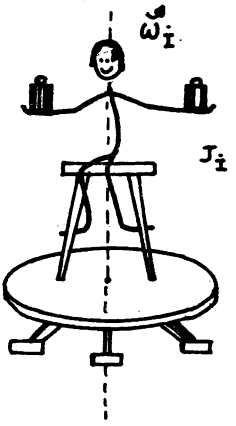
$$J_1 \vec{\omega}_1 + J_2 \vec{\omega}_2 = \vec{0}$$

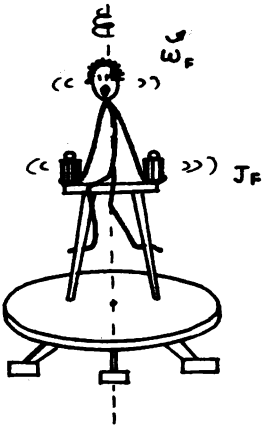
$$\vec{\omega}_2 = -\frac{J_1}{J_2} \vec{\omega}_1$$

A tout instant les pendules tournent en sens contraires. Le pendule qui a le plus grand moment d'inertie tourne le moins vite.

b/ Deuxième exemple

Le système est formé d'un plateau tournant, d'un tabouret et d'un expérimentateur volontaire tenant dans chaque main une masse de 5 kg.





L'expérimentateur écarte les bras. Le moment d'inertie initial du système est alors J_i . On le fait tourner avec une vitesse angulaire ω_i. Le moment cinétique initial est :

$$\vec{\sigma}_i = J_i \vec{\omega}_i$$

La fatigue aidant, l'expérimentateur baisse les bras, ce qui contribue à diminuer le moment d'inertie du système puisqu'une partie du système se rapproche de l'axe de rotation. Le moment d'inertie devient $J_F < J_i$. Aussitôt, le système tourne plus vite. En effet, soit :

$\vec{\omega}_F$ la vitesse angulaire et $\vec{\sigma}_F = J_F \vec{\omega}_F$ le moment cinétique. Le système étant isolé, il y a conservation du moment cinétique :

$$J_F \vec{\omega}_F = J_i \vec{\omega}_i \qquad \text{et} \qquad \vec{\omega}_F = \frac{J_i}{J_F} > \vec{\omega}_i$$

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 14

I - LE MOMENT CINETIQUE

1°) Pour un point matériel

Le moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe fixe est le moment de sa quantité de mouvement par rapport à cet axe.

Il est égal au produit de son moment d'inertie par rapport à l'axe par sa vitesse angulaire.

$$\vec{\sigma} = j \cdot \vec{\omega} \qquad \text{en kg . m}^2 \text{ rd/s}$$

2°) Deux expressions équivalentes de la relation fondamentale de la dynamique de rotation

$$\vec{\mathcal{M}} \quad j \quad \vec{\theta}'' \iff \vec{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}$$

3°) Pour un système matériel

Le moment cinétique d'un système matériel est égal à la somme des moments cinétiques de ses différents points.

$$\vec{\sigma} = \sum_{i=}^{n} j_i \quad \vec{\omega}_i$$

Pour un solide indéformable : $\vec{\sigma} = J \cdot \vec{\omega}$

II- L'IMPULSION ANGULAIRE - THEOREME DE LA VARIATION DU MOMENT CINETIQUE

L'impulsion angulaire d'un moment de force constant agissant pendant la durée Δt sur un solide en rotation autour d'un axe fixe est la grandeur vectorielle :

$$\vec{I}_{ang} = \vec{\mathcal{M}} \Delta t \qquad \text{en m.N.s}$$

Théorème (important)

La variation du moment cinétique d'un système matériel quelconque en rotation autour d'un axe fixe pendant une certaine durée est égale à l'impulsion angulaire reçue par le système pendant cette durée.

$$\vec{\mathcal{M}}\,\Delta t = \vec{\sigma}_F - \vec{\sigma}_I$$

$$\vec{\mathcal{M}}\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} j_i \vec{\omega}_i)_F - \sum_{i=1}^{n} j_i \vec{\omega}_i)_I$$

III- CONSERVATION DU MOMENT CINETIQUE D'UN SYSTEME ISOLE

Théorème (important)

Dans un système mécaniquement isolé en rotation autour d'un axe fixe, la somme des moments cinétiques des diverses parties reste constante quelles que soient les modifications du système provoquées par les moments des forces intérieures.

$$\vec{\sigma}_F = \vec{\sigma}_I$$

$$\sum_{i=1}^{n} j_i \vec{\omega}_i)_F = \sum_{i=1}^{n} j_i \vec{\omega}_i)_I$$

Chapitre 14

EXERCICES

1/ N.B. - On appelle que :

- le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque Δ' est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe Δ , parallèle à Δ' et passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance des deux axes (théorème de Huygens);

- le moment d'inertie d'une sphère par rapport à l'un de ses diamètres est :

$J = \frac{2}{5} m R^2$ (m étant sa masse, R son rayon) ;

- le volume de la sphère est $\frac{4}{3} \Pi R^3$

- $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

- $\Pi^2 = 10$.

1°)On considère une sphère pleine de rayon R = 5cm faite d'un métal dont la masse volumique est $\ell = 9550 \text{ kg . m}^{-3}$

Calculer le moment d'inertie de cette sphère par rapport à l'un de ses diamètres.

2°)On suspend cette sphère à un fil de 4,95 m de long (la distance de l'axe au centre de gravité est donc ℓ =5m)

a/ Quelle est la période T_o des oscillations de faible amplitude de ce pendule considéré comme simple ?

b/ En fait, il s'agit d'un pendule composé ; donner l'expression littérale de la période T des petites oscillations, exprimée en fonction de R, g, ℓ . En déduire l'incertitude relative que l'on fait sur T en considérant le pendule comme simple. Que conclure ? (on négligera l'incertitude commise sur Π).

3°)La sphère, étant détachée du fil précédent, tourne à présent autour d'un axe passant par son centre, à raison de N = 25 tours par seconde) on la freine en exerçant sur sa surface une force tangentielle orthogonale à l'axe de rotation. Sachant que cette force est constante et vaut 50 newtons, calculer le nombre de tours que fait la sphère avant de s'arrêter.

4°)On soude, aux extrémités d'un diamètre de la sphère deux tourillons cylindriques de rayon r = 1cm, dont on

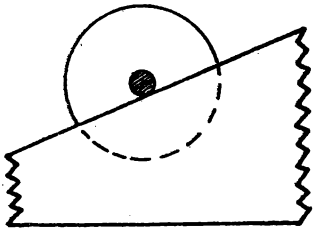


fig 1

négligera la masse devant celle de la sphère, et qui se comporte comme un arbre de roulement coaxial de rayon r. On dispose les tourillons sur une gouttière formée par deux rails parallèles dont le plan fait un angle de 30° avec le plan horizontal, de sorte que le système roule sans glisser sur les rails (fig 1).

a/ Calculer l'accélération γ du mouvement du centre de gravité du système abandonné sans vitesse initiale en haut de la gouttière.

b/ Calculer la vitesse linéaire V du centre de gravité et la vitesse angulaire Θ' après un parcours de 10 m sur les rails.

5°) Deux sphères identiques à la précédente sont enfilées sur une tige fine, rigide, robuste AB de longueur 2L = 40 cm. L'ensemble est monté sur un bâti représenté par la figure, qui peut tourner autour de l'axe vertical Z'Z. Les deux sphères sont maintenues en contact par une soudure (Fig 2)

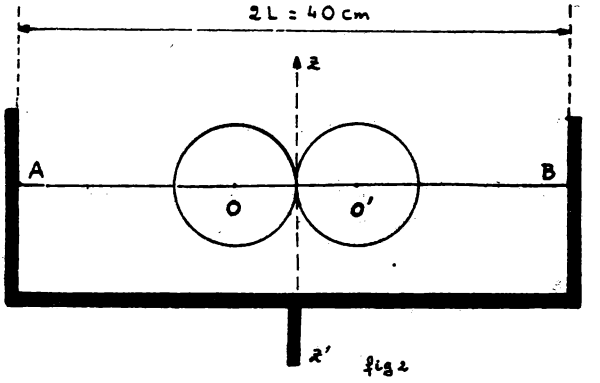


fig 2

a/ Le système tourne librement à raison de 10 tours par seconde autour de l'axe Z'Z. Calculer l'énergie cinétique et le moment cinétique de l'ensemble des deux sphères.

b/ A un moment donné, pendant la rotation à 10 tours par seconde, il y a rupture de la soudure et les deux sphères viennent au contact du bâti respectivement en A et B où un dispositif spécial maintient ce contact. Quelle est la nouvelle vitesse de rotation du système ? Les frottements étant rendus négligeables, quelle est la nouvelle énergie cinétique des deux sphères ? Conclure.

(Baccalauréat tunisien, session de contrôle, juin 1977).

Remarque de l'auteur

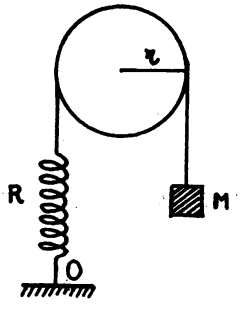
le moment d'inertie du bâti n'étant pas fourni dans l'énoncé, on ne peut répondre à la question 5°), b/ que si l'on suppose négligeable la masse du bâti.

2/ Un ressort à boudin R, de masse négligeable, subit des allongements ℓ proportionnels aux forces F qui agissent sur lui (on pose $F = -k\ell$). Le ressort R est attaché en un point fixe O et supporte une masse M pratiquement ponctuelle. On donne k = 22,5 N/m, M = 100 grammes. On prendra $g = 10\ m/s^2$.

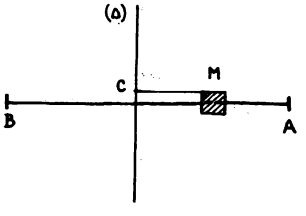
a/ Quel est l'allongement ℓ du ressort lorsque la masse M est en équilibre ?

b/ On écarte la masse M de sa position d'équilibre en tirant verticalement sur le ressort et on l'abandonne à l'instant t = 0 sans vitesse initiale. La masse M oscille alors sur une droite verticale. Etablir l'expression qui donne en fonction du temps la distance x de M à sa position d'équilibre. Quelle est la période T du mouvement? Quelle est l'énergie cinétique maximale de la masse M si l'amplitude a des oscillations a pour valeur 2cm ?

2°) La masse M est maintenant suspendue à un fil inextensible et de masse négligeable, qui passe sur une poulie mobile sans frottement autour d'un axe horizontal ; l'autre extrémité du fil est reliée à un point fixe O par l'intermédiaire du ressort R précédent. La masse de la poulie est m = 50 grammes; son rayon est r. Son moment d'inertie par rapport à son axe est $\frac{mr^2}{2}$. Quelle est la nouvelle valeur T' de la période des oscillations verticales de la masse M ?



3°) La masse M peut glisser maintenant sans frottement sur une barre horizontale AB, solidaire d'un axe vertical (Δ), qui passe par le milieu C de AB. Elle est attachée en C par un fil inextensible, tendu, de masse négligeable, de longueur CM = L = 16cm. L'ensemble peut tourner sans frottement autour de (Δ). On donne à ce système une vitesse angulaire Ω = 5 radians par seconde autour de (Δ) et on l'abandonne à lui-même.



a/ Quelle est la tension F du fil ?

b/ Le fil casse. La masse M vient buter en A, sans rebondir, à la distance CA = L' = 32 cm de C. Quelle est la nouvelle vitesse angulaire Ω' du système ? On indique que le moment d'inertie de la barre AB par rapport à (Δ) est $J = 10^{-2}$ kg . m^2.

c/ Quelle est la perte d'énergie cinétique du système ?

N.B.La question 3°) est indépendante des deux premières.

(Baccalauréat)

3/ Un tige rigide de masse négligeable, de longueur 60 cm, peut tourner librement autour d'un axe horizontal passant par son milieu O. Sur cette tige peuvent s se déplacer deux masses ponctuelles M et M' identiques, de valeur m = 2g. On appellera ℓ la distance de M au point O et ℓ' la distance de M' au point O. Dans tout le problème sauf indication contraire, on négligera les frottements. On prendra

$$g = 9{,}80 \text{ m/s}^2$$

A/-

1°) La masse M seule est placée sur la tige à une distance ℓ = 30cm. Calculer la période T_o du pendule simple ainsi constitué.

2°) La masse M conservant la position précédente (ℓ = 30 cm), on place sur la tige la masse M'. Calculer la période T des oscillations de faible amplitude du système autour de sa position d'équilibre, pour une position donnée de M'. On donnera l'expression de T en fonction de T_o et du rapport $x = \frac{\ell'}{\ell}$ (ℓ' peut être positif ou négatif). Représenter graphiquement T en fonction de x, en limitant la courbe au déplacement possible de M' sur la tige. Quelle est la période minimale du pendule ?

B/-

1°) La masse M est toujours à 30 cm de O; la masse M' est placée à 15 cm de O sur l'autre moitié de la tige. La tige, d'abord dans une position horizontale, est abandonnée sans vitesse initiale. Calculer la vitesse angulaire du pendule lorsqu'il passe par sa position d'équilibre.

2°) La masse M est toujours à 30 cm de O, la masse M' est amenée également à 30 cm de O à l'autre extrémité de la tige. Le système tourne à la vitesse constante de 2 tours par seconde.

a/ Calculer son moment cinétique.

b/ Par un dispositif convenable, de masse négligeable, entrainé dans le mouvement de rotation précédent, on peut, à un certain moment, rapprocher simultanément M et M' à 10 cm de O. Calculer la nouvelle vitesse de rotation du système (en tours par seconde).

3°) Les frottements ne sont plus négligeables, les masses M et M' sont fixées à chaque extrémité de la tige à 30cm de O et ne se déplacent pas sur la tige pendant le mouvement. Le système tournant initialement à raison de 2 tours par seconde, ralentit progressivement. On constate que l'arrêt se produit au bout de 20 secondes. Calculer le moment (supposé constant) des forces de frottement par rapport à l'axe. Quelle est l'énergie qui apparait sous forme de chaleur ?

N.B.
Les parties A et B sont indépendantes.

(Baccalauréat)

4/

1°) On attache un barreau homogène à un fil dont la constante de torsion est C. L'axe du fil passe par le centre de gravité O' du barreau (fig 1). On supposera, dans tout le problème, que les vitesses de rotation sont suffisamment faibles pour négliger la résistance de l'air.

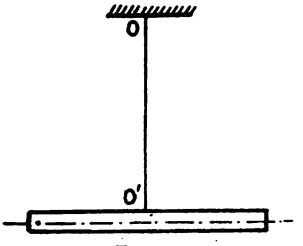


Fig. 1.

a/ Le barreau étant initialement au repos, on le fait tourner autour de l'axe OO' d'un angle θ_o en le maintenant horizontal. A l'instant t = 0, le barreau est lâché sans vitesse initiale. Quel est le mouvement du barreau ? Ecrire son équation horaire.

Données numériques : Moment d'inertie du barreau par rapport à l'axe OO' : $J_o = 4{,}0 \cdot 10^{-4}$ kg . m^2

$C = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ m . N/rad , $\theta_o = 45°$

b/ A quels instants le module de la vitesse angulaire du

bareau est-il maximal ? Calculer l'instant pour lequel ce module est maximal pour la première fois.

2°) On utilise le dispositif précédent auquel on ajoute 2 masses cylindriques et homogènes de valeur M dont on peut faire varier la position sur le barreau d'une manière symétrique par rapport à l'axe OO' et l'axe Δ d'une des masses (fig 2).

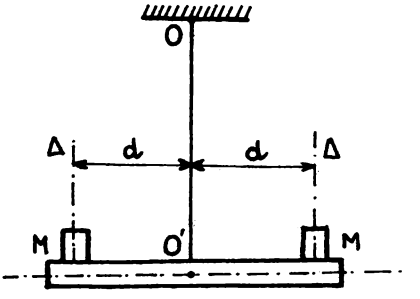
Etablir la relation $T^2 = f(d^2)$, T étant la période du mouvement.

Remarque : On rappelle que, d'après le théorème de Huygens, le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque (Δ') est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) parallèle à (Δ') et passant par son centre de gravité, augmenté du produit de la masse M du solide par le carré de la distance d des axes :

$$J_{\Delta'} = J_{\Delta} + Md^2.$$

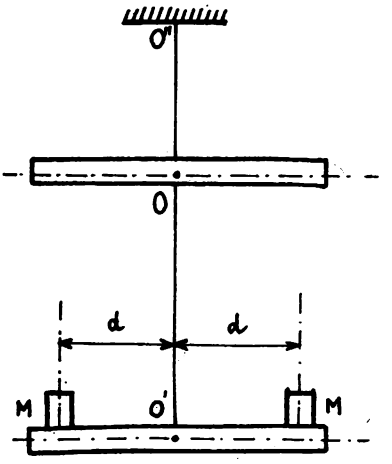
Construire, à l'échelle, le graphe de la relation $T^2 = f(d^2)$, d variant de 0 à 0,10 m.

On prendra $J_{\Delta} = 8{,}0.10^{-5}$ kg.m^2 , M = 0,35 kg, $\Pi^2 = 10$.



3°) Le fil de torsion est fixé en O au barreau utilisé dans la première question et en O' au système (barreau + masses) utilisé dans la deuxième question. L'ensemble est suspendu à un fil sans torsion O"O (fig3)

a/ Montrer que, pour des rotations autour de l'axe O"O O' , le système des barres O et O' est isolé.



b/ On maintient le premier barreau immobile et l'on fait tourner le système (barreau + masses) d'un angle Θ_2 puis on le lâche sans vitesse angulaire initiale. Quelle est la relation numérique qui lie les vitesses angulaires ω_1 du barreau et ω_2 du système (barreau + masses) à un instant quelconque ? On prendra d = 5 cm.

(Baccalauréat).

Chapitre 15

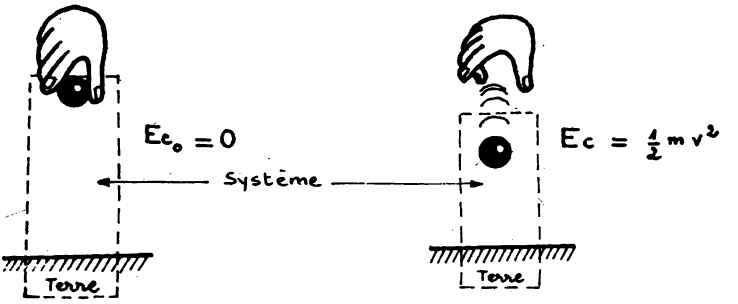
L'ENERGIE POTENTIELLE

L'ENERGIE MECANIQUE TOTALE.

I - SYSTEMES POSSEDANT DE L'ENERGIE POTENTIELLE.

1°) Deux exemples.

a/ L'énergie potentielle de pesanteur :



Considérons le système formé par la Terre et une bille de masse m. La bille est maintenue immobile au dessus du sol. L'énergie cinétique du système est nulle :

$$Ec_0 = 0$$

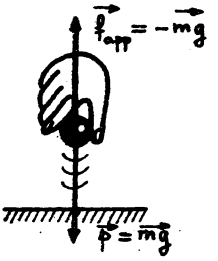
On lâche la bille : elle tombe avec une vitesse croissante et le système acquiert une énergie cinétique croissante.

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2 \quad \text{avec} \quad v = g.t$$

égale à l'énergie cinétique de la bille seule, car la Terre reste immobile.

Or le système (Terre + bille) est mécaniquement isolé et, en accord avec le principe de conservation de l'energie, une forme d'énergie ne peut apparaître que si une autre forme d'énergie disparaît en quantité égale. De quelle forme d'énergie s'agit-il ?

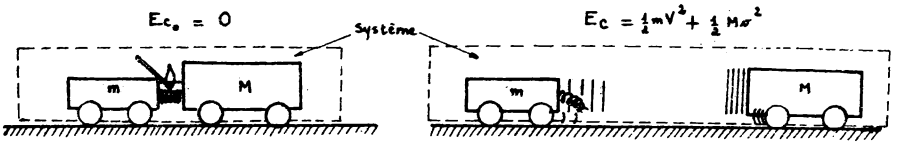
La bille tombe parcequ'elle a été préalablement soulevée par l'expérimentateur qui lui a appliqué une force opposée à son poids. Le travail de la force appliquée a été emmagasiné par le système sous forme d'une énergie qui par la suite peut se transformer en énergie cinétique



C'est l'énergie potentielle de pesanteur du système (Terre + bille).

b/ L'énergie potentielle élastique.

Reprenons l'expérience des deux chariots décrite au chapitre 13, §I. (On suppose qu'il n'y a pas de frottement).



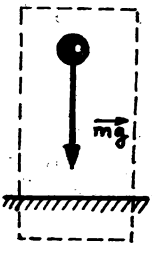
Les deux chariots compriment entre eux un ressort et sont maintenus immobiles par un fil. Lorsque le fil est brûlé, les chariots sont propulsés en sens contraires. L'énergie cinétique [illegible]

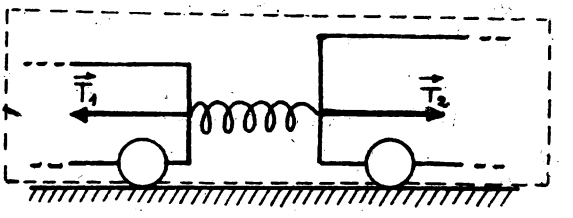
$$Ec = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} Mv^2$$

On peut se demander quelle forme d'énergie a disparu pour que puisse apparaître dans ce système mécaniquement isolé de l'énergie cinétique.

Pour comprimer le ressort, un expérimentateur a dû appliquer aux chariots des forces opposées aux tensions du ressort. Le travail de ces forces a été emmagasiné par le système sous forme d'une énergie qui par la suite peut se transformer en énergie cinétique : c'est l'énergie potentielle élastique du ressort.

2°) Le [illegible] forces intérieures.





La chute de la bille est une déformation du système (Terre + bille) due à la force intérieure $\vec{p} = \vec{mg}$ (la seconde force intérieure, exercée par la bille sur la Terre n'a pas d'effet mesurable sur le système). Au cours de la chute, la force intérieure $\vec{mg}$ travaille, de l'énergie cinétique apparaît et simultanément disparaît une quantité égale d'énergie potentielle de pesanteur.

La séparation des chariots lors de la détente du ressort est une déformation du système (chariots + ressort), due aux forces intérieures $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$. Ces forces intérieures travaillent, de l'énergie cinétique apparaît et simultanément disparaît une quantité égale d'énergie potentielle élastique du ressort.

A partir de ces deux exemples nous énoncerons un critère d'existence d'énergie potentielle d'un système :

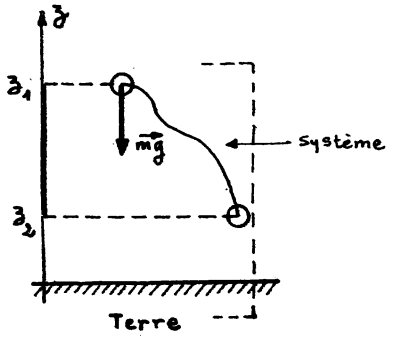
> Un système posséde de l'énergie potentielle si des forces intérieures peuvent le déformer en fournissant du travail. La disparition de l'énergie potentielle est compensée par l'apparition d'une quantité égale d'énergie cinétique.

Remarque : on suppose qu'il n'y a aucun frottement.

II - L'énergie potentielle de pesanteur.

1°) Travail du poids

Une masse m passe de l'altitude z_1 à l'altitude z_2 au cours d'un déplacement quelconque, dans une région où l'on peut considérer g comme constant. Le travail du poids $\vec{p}$ au cours de ce déplacement vaut (chapitre 12, § I)



$$W_{(1)}^{(2)} = -mg\,(z_2 - z_1)$$

$$W_{(1)}^{(2)} = mgz_1 - mgz_2$$

L'expression du travail de $\vec{mg}$ est la même quel que soit le chemin suivi par la masse m d'un point quelconque du plan d'altitude z_1 vers un point quelconque du plan d'altitude z_2 .

2°) Expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

Le travail du poids $\vec{p}$ dépend uniquement des valeurs extrêmes prises par la fonction mgz appelée énergie potentielle du système (Terre + masse m) lorsque la masse est à l'altitude z.

$$\boxed{Ep = mgz}$$

m en kg
g en N/kg
z en mètres

Ep en joules.

Le travail du poids $\vec{p}$ peut donc s'exprimer ainsi :

$$\boxed{W_{①}^{②} = Ep_1 - Ep_2}$$

Le travail du poids d'une masse m au cours d'un déplacement quelconque est égal à la diminution de l'énergie potentielle de pesanteur du système (Terre + masse) au cours de ce déplacement.

Remarques

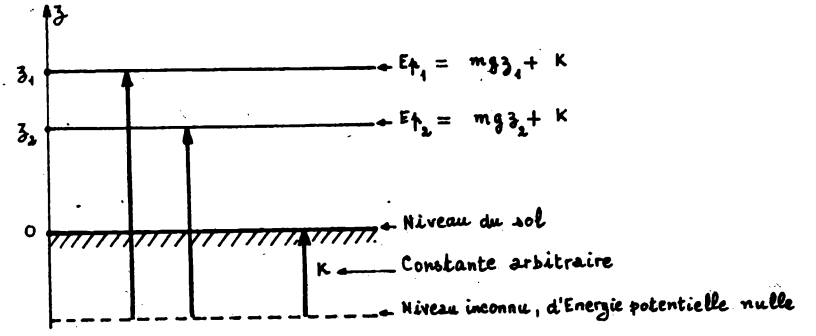
1/ La diminution d'une fonction est la différence entre sa valeur initiale et sa valeur finale alors que la variation est égale à la différence entre la valeur finale et la valeur initiale.

2/ L'expression de l'énergie potentielle de pesanteur Ep = mgz suppose que l'énergie potentielle est nulle au niveau du sol. En fait, le niveau d'énergie potentielle nulle n'est pas déterminé car on peut toujours imaginer un niveau inférieur (en creusant un trou si nécessaire). L'énergie potentielle n'est donc connue qu'à une constante arbitraire K près. Son expression est donc:

$$Ep = mgz + K$$

Mais on ne s'occupe généralement que de la diminution de l'énergie potentielle de sorte que la constante K disparaît. On peut donc la prendre arbitrairement égale à zéro.

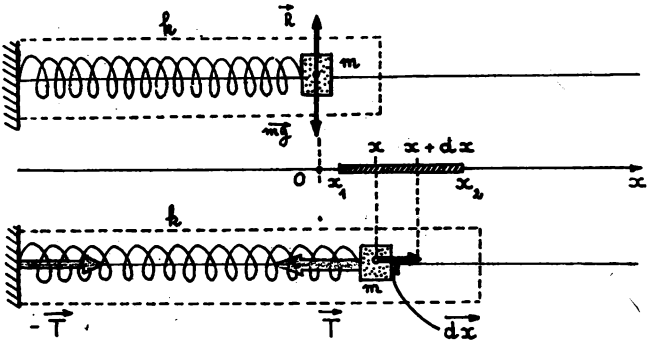
3°) Les surfaces équipotentielles.



Une surface équipotentielle du système (Terre + masse m) est l'ensemble des points où le système possède la même énergie potentielle. Les surfaces équipotentielles sont donc l'ensemble des plans horizontaux.

III - L'énergie potentielle élastique.

1°) Le travail de la tension d'un ressort.



Considérons le système formé d'un ressort de masse négligeable auquel est fixé une masse m. Le ressort et la masse sont enfilés sur une tige horizontale sans frottement. L'autre extrémité du ressort est fixé.

La première figure représente le ressort non tendu. Le système est mécaniquement isolé (le poids de m est équilibré par la réaction de la tige).

On a tiré sur la masse m pour tendre le ressort puis on l'a abandonnée. Le mouvement de la masse m est rectiligne sinusoïdal. Les deux forces intérieures au système sont les tensions $\vec{T}$ et $-\vec{T}$ qui s'exercent respectivement

sur la masse m et sur le bâti fixe. Seule la tension $\vec{T}$ travaille au cours des déformations du système.

Nous nous proposons de calculer le travail de la tension pour un déplacement de la masse de x_1 à x_2 .

Pour un déplacement élémentaire $\vec{dx}$, le travail de $\vec{T}$ est :

$$dW = \vec{T} . \vec{dx} \qquad (-\vec{kx})\ dx,$$

Sa valeur algébrique est égale au produit de la valeur algébrique de la tension par la valeur algébrique du déplacement :

$$dW = -\vec{kx} . \vec{dx}$$

Pour un déplacement de x_1 à x_2 , le travail est égal à la somme de tous les travaux élémentaires. Il s'exprime donc par l'intégrale :

$$W_{①}^{②} = \int_{x_1}^{x_2} (-kx.dx) = -k \int_{x_1}^{x_2} x.dx = -k \left[\tfrac{1}{2} x^2 \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$W_{①}^{②} = \tfrac{1}{2} k x_1^2 - \tfrac{1}{2} k x_2^2$$

2°) <u>L'énergie potentielle élastique</u>.

Le travail de la tension dépend uniquement des valeurs extrêmes de la fonction $\frac{1}{2} kx^2$ qui est l'énergie potentielle élastique du ressort lorsque son allongement est x :

$$\boxed{Ep = \tfrac{1}{2} kx^2} \quad \begin{matrix} k \text{ en N/m} \\ x \text{ en m} \end{matrix} \qquad Ep \text{ en joules.}$$

Le travail de la tension peut donc s'exprimer ainsi :

$$\boxed{W_{①}^{②} = Ep_1 - Ep_2}$$

Le travail de la tension d'un ressort au cours d'un allongement quelconque est égal à la diminution de son énergie potentielle élastique au cours de cet allongement.

IV L'ENERGIE MECANIQUE TOTALE D'UN SYSTEME ISOLE.

1°) Définition :

On appelle énergie mécanique totale d'un système matériel, la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

$$Et = Ec + Ep$$

2°) Application du principe de conservation.

Un système est mécaniquement isolé si la somme des forces extérieures est nulle :

$$\sum \overrightarrow{Fext} = \vec{0}$$

En particulier, on doit supposer que le système n'est soumis à aucun frottement. Un tel système ne recevant aucun travail de la part des forces extérieures, son énergie mécanique totale est constante :

$$Et = Cte.$$

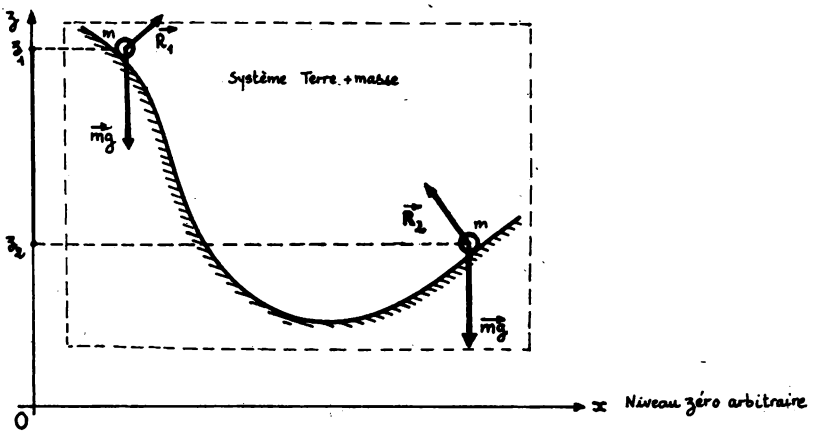
L'énergie mécanique d'un systéme mécaniquement isolé est constante.

En particulier, d'après le principe de conservation de l'énergie, toute dimunition d'énergie potentielle s'accompagne d'une augmentation égale d'énergie cinétique.

Nous allons le vérifier dans les deux cas de transformations d'énergie potentielle de pesanteur en énergie cinétique et d'énergie potentielle élastique en énergie cinétique.

a/ Masse dans le champ de pesanteur terrestre.

Une masse m glisse sans frottement sur le support de ma figure ci-dessous. Entre les niveaux z_1 et z_2 ,la variation d'énergie cinétique du système (Terre + masse m) est égale au travail de toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures au système (théorème de l'énergie cinétique).



Seule la partie m du système est en mouvement au cours de la déformation du système. Elle est soumises aux forces intérieures $\vec{mg}$ et $\vec{R}$. La réaction étant perpendiculaire au support, son travail est nul. Donc :

$$W_{①}^{②} = Ec_2 - Ec_1 = - mg (z_2 - z_1) \quad (1)$$

La diminution d'énergie potentielle du système est égale au travail du poids de la masse m :

$$W_{①}^{②} = Ep_1 - Ep_2 = - mg (z_2 - z_1) \quad (2)$$

Ces deux expressions sont égales :

$$Ec_2 - Ec_1 = Ep_1 - Ep_2$$

ou encore :

$$Ep_1 + Ec_1 = Ep_2 + Ec_2$$

$$\boxed{Et_1 = Et_2}$$

L'énergie mécanique totale du système est la même pour deux positions quelconques de la masse m. Elle se conserve donc quelle que soit la position de la masse m sur sa trajectoire.

b/ L'énergie vibratoire totale.

L'énergie mécanique totale du système constitué par la masse m et le ressort du § III, 1° est la somme de l'énergie cinétique de la masse m et de l'énergie potentielle élastique du ressort :

$$Et = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

L'élongation de m varie sinusoïdalement en fonction du temps :

$$x = a \sin \omega t$$

sa vitesse est : $v = a\omega \cos \omega t$

d'autre part : $\frac{k}{m} = \omega^2$ ou $k = m\omega^2$.

Portons ces expressions dans celle de Et :

$$Et = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t.$$

Compte tenu de $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$, il reste :

$$\boxed{Et = \frac{m a^2 \omega^2}{2}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{Et = \frac{1}{2} k a^2}$$

Cette expression est indépendante de l'élongation x de la masse m. L'énergie vibratoire totale du système se conserve donc au cours de ses oscillations.

V Conservation de l'énergie mécanique totale:Applications

Un objet de masse m et la Terre forment un système mécaniquement isolé, si l'on peut négliger les frottements

Soient v la vitesse de la masse et z son altitude. On prend par convention le niveau d'énergie potentielle nulle du système au sol.

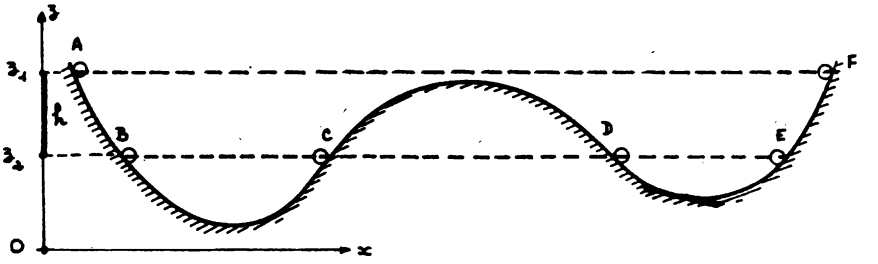
On a :

$$Et = Ec + Ep = C^{te}$$

$$Et = \frac{1}{2} mv^2 + mgz = C^{te}.$$

Si l'objet repasse plusieurs fois par la même surface équipotentielle l'énergie potentielle du système reprend la même valeur. L'énergie totale étant constante, on en

déduit que la masse m retrouve la même énergie cinétique, et par suite la même vitesse, en module, à chaque passage par une même équipotentielle.



On peut ainsi prévoir, qu'en l'abscence de frottements, si une bille part du point A d'altitude z_1 sans vitesse initiale, elle parviendra jusqu'au point F de même altitude avec une vitesse nulle, puis elle retournera jusqu'en A et ainsi, indéfiniment. Dans la pratique, elle n'atteindra pas exactement le point F, parcequ'une partie de l'énergie mécanique se transforme en énergie thermique à cause des frottements.

Le système a même énergie potentielle aux points B,C, D et F de l'équipotentielle de niveau z_2 . La bille reprend donc la même énergie cinétique en ces points et la même vitesse, en module.

$$v = v_B = v_C = v_D = v_E .$$

Calculons cette vitesse :

Entre les niveaux z_1 et z_2 , la conservation de l'énergie totale s'exprime par :

Variation de Ec = Diminution de Ep.

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = -mg (z_2 - z_1) = mg (z_1 - z_2) = mgh$$

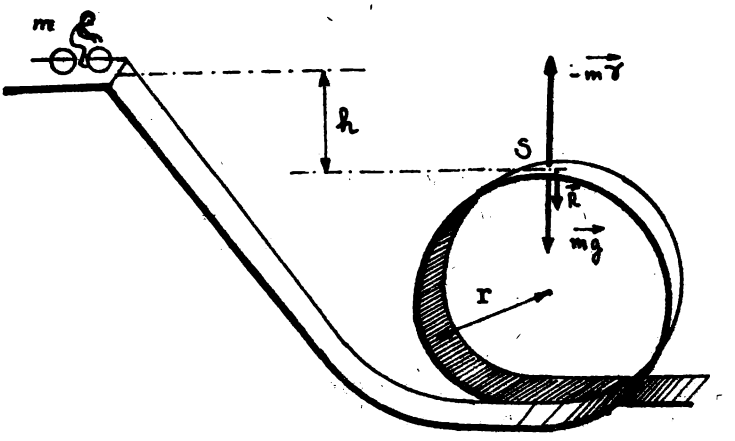
(en appelant h la dénivellation ($z_1 - z_2$).

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh \quad \text{et par suite} \quad \underline{v^2 = 2gh}$$

On constate que la bille aurait même vitesse si elle était tombée en chute libre sans vitesse initiale de l'altitude z_1 à l'altitude z_2 .

1°) Premier exercice: "la boucle de la mort!"

Au cirque, un acrobate à bicyclette part d'une plate forme élevée afin d'effectuer un "looping". La forme de la piste est approximativement celle d'un cerceau de rayon r. Quelle doit être la hauteur minimale de la plate forme au dessus de la partie la plus élevée de la boucle pour que l'acrobate l'atteigne sans cesser d'adhérer à la piste ?



Pendant le "looping" le mouvement du cycliste est circulaire mais non uniforme, sauf au sommet S de la boucle où il passe à vitesse constante. En effet, il vient de cesser de ralentir pendant la phase ascendante et va commencer à accélérer pendant la phase descendante Au passage en S, l'accélération est celle d'un mouvement circulaire uniforme : elle est centripète.

Le cycliste est soumis à 3 forces: son poids $\vec{mg}$, la force d'inertie centrifuge $(-\vec{m\gamma})$ et le réaction de la piste opposée au "poids total" $\vec{mg} + (-\vec{m\gamma})$. L'équilibre relatif s'exprime par :

$$\vec{mg} + (-\vec{m\gamma}) + \vec{R} = \vec{0}$$

Il adhère à la piste si son "poids total" est dirigé vers le haut et à la limite s'il est nul. La réaction est alors également nulle, mais le cycliste ne tombe pas pour autant car il franchit le sommet de la boucle avec une vitesse non nulle. La condition est donc :

$$m\gamma \geqslant mg$$
$$\gamma \geqslant g$$
$$\frac{v^2}{r} \geqslant g$$

h étant la dénivellation entre la plate-forme et le sommet de la boucle, on a, d'après l'étude qui précède :

$$v^2 = 2gh \qquad \frac{2gh}{r} \geqslant g$$

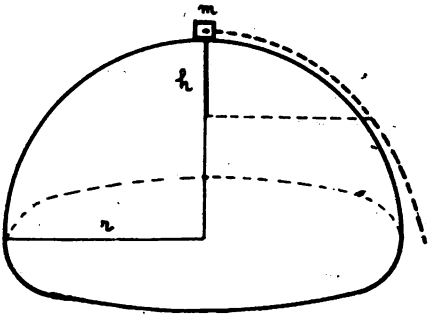
$$\boxed{h \geqslant \frac{r}{2}}$$

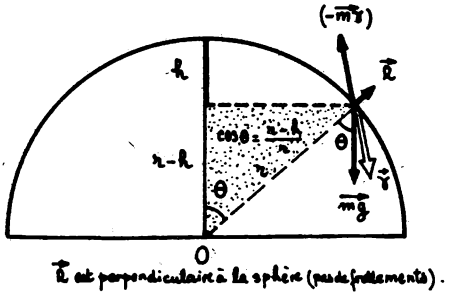
En réalité, compte tenu des frottements qui transforment une partie de l'énergie potentielle en énergie thermique, la hauteur de la plate-forme au dessus de la boucle doit être supérieure à la valeur théorique qui vient d'être calculée.

2°) Deuxième exercice.

Au sommet d'une demi-sphère parfaitement lisse, on a placé un petit objet en équilibre instable. Par un choc minime, on lui donne la possibilité de glisser sur la demi-sphère.

Déterminer, en fonction du rayon r la dénivellation h de l'objet pour laquelle il se séparera de la demi-sphère pour tomber en chute parabolique.





La figure 2 représente, pour un observateur lié à l'objet, l'ensemble des forces auxquelles il est soumis, juste avant de quitter la sphère : le poids $\vec{mg}$, la force d'inertie ($-\vec{m\gamma}$) et la réaction de la sphère, opposée à la somme des deux forces précédentes. La condition d'équilibre relatif est :

$$\vec{mg} + (-\vec{m\gamma}) + \vec{R} = \vec{0}$$

On remarquera que le mouvement n'est pas circulaire uniforme mais circulaire accéléré, ce qui explique que l'accélération n'est pas centripète.

Projetons la relation sur l'axe orienté passant par le centre :

$$- mg \cos \Theta + m\gamma_N + R = 0$$

Au moment où l'objet se sépare de la sphère, la réaction s'annule. On a donc :

$$- mg \cos \Theta + m\gamma_N = 0$$

$$g \cos \Theta = \gamma_N = \frac{v^2}{r}$$

avec $v^2 = 2gh$ comme dans l'exercice précédent et :

$$\cos \Theta = \frac{r - h}{r}$$

On achève le calcul et on trouve :

$$h = \frac{r}{3}$$

L'FSSENTIEL DU CHAPITRE 15

CRITERE D'EXISTENCE DE L'ENERGIE POTENTIELLE

Un système possède de l'énergie potentielle si des forces intérieures fournissent du travail en le déformant.

I - L'ENERGIE POTENTIELLE DE PESANTEUR

On ne doit pas parler d'énergie potentielle de pesanteur d'une masse m, mais d'énergie potentielle du système formé par cette masse avec la Terre.

1°) Expression

Soit une masse m à l'altitude z au dessus du sol. Elle forme avec la Terre un système dont l'énergie potentielle de pesanteur est :

$$Ep = mgz + K$$

K est une constante indéterminée qu'on peut choisir arbitrairement égale à zéro au niveau du sol.

2°) Travail du poids

Le travail du poids d'une masse m au cours d'un déplacement quelconque d'un point quelconque d'une surface équipotentielle de niveau z_1 vers un point quelconque d'une surface équipotentielle de niveau z_2 est égal à la diminution de l'énergie potentielle du système (Terre + masse).

$$W_{①}^{②} = Ep_1 - Ep_2 = mgz_1 - mgz_2$$

3°) L'énergie mécanique totale du système Terre + masse m

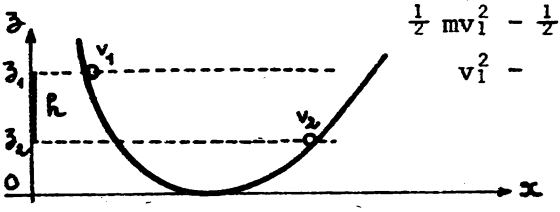
L'énergie mécanique totale d'un tel système est la somme de son énergie potentielle de pesanteur et de son énergie cinétique. (L'énergie cinétique est celle de la masse m seule, car la Terre reste immobile).

$$Et = Ep + Ec = mgz + \frac{1}{2} mv^2$$

Elle est constante si le système est mécaniquement isolé, quelles que soient ses déformations.
Une conséquence : les énergies potentielles et cinétiques se transforment mutuellement.

$Et = C^{te} \Longleftrightarrow$ Variation de Ec = Diminution de Ep

Soit v_1 la vitesse de m dans une équipotentielle et v_2 sa vitesse dans une autre équipotentielle et soit h la dénivellation :



$$\frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_2^2 = mgh$$

$$v_1^2 - v_2^2 = 2gh$$

II- L'ENERGIE POTENTIELLE ELASTIQUE

1°) Energie potentielle élastique d'un ressort

Soit x l'allongement (ou la compression) d'un ressort de raideur k. Son énergie potentielle élastique est :

$$Ep = \frac{1}{2} kx^2$$

2°) Travail de la tension

Le travail de la tension d'un ressort au cours d'une déformation quelconque est égal à la diminution de son énergie potentielle élastique au cours de cette déformation :

$$W_{①}^{②} = Ep_1 - Ep_2 = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$$

3°) L'énergie mécanique totale du système masse+ressort

C'est la somme de l'énergie cinétique de la masse et de l'énergie potentielle élastique du ressort :

$$Et = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

Si le système est mécaniquement isolé, son énergie mécanique totale reste constante. Les énergies potentielles et mécaniques se transforment mutuellement :

Et= Cte $\Longleftrightarrow$ Variation de Ec = Diminutions de Ep

Pour des oscillations d'amplitude a et de pulsation ω , l'énergie vibratoire totale est :

$Et = \frac{1}{2} ma^2\omega^2$ Puisque $m\,\omega^2 = k$: $Et = \frac{1}{2} ka^2$

Chapitre 15

E X E R C I C E S

1/ Un pendule de torsion est caractérisé par la constante de torsion C de son fil et par le moment d'inertie J de sa barre par rapport à l'axe de rotation. Il forme avec son support lié à la Terre un système mécaniquement isolé.

1°) Après avoir été écartée de sa position d'équilibre, la barre est abandonnée. Exprimer le travail du moment de rappel (intérieur au système) entre deux élongations angulaires Θ_1 et Θ_2. Ce travail dépend-il des déformations subies par le système pour passer de Θ_1 à Θ_2? En déduire l'expression de l'énergie potentielle de torsion du fil.

2°) Le pendule oscille avec une élongation angulaire Θ_0. Etablir l'expression de l'énergie mécanique vibratoire totale du système, égale à la somme de l'énergie cinétique de la barre et de l'énergie potentielle de torsion du fil. (On peut s'inspirer de la démonstration relative à l'énergie vibratoire du système ressort + masse).

Réponses :

1°) $\frac{1}{2} C\Theta_1^2 - \frac{1}{2} C \Theta_2^2$, expression qui ne dépend que des valeurs extrêmes de la fonction $\frac{1}{2} C \Theta^2$, énergie potentielle de torsion du fil.

2°) $Et = \frac{1}{2} C \Theta_0^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 \Theta_0^2$

2/A. On étudie le mouvement d'un satellite par rapport à des axes d'orientation fixe, dont l'origine coïncide avec le centre de la Terre. Ce satellite, de masse m= 1600 kg, est assimilable, dans la suite, à un point matériel qui tourne autour de la Terre, supposée sphérique, de rayon R, avec un mouvement circulaire uniforme de rayon x de même centre que la Terre. Son poids est représenté par la force $\vec{f}$, constamment dirigée vers le centre de la Terre (force centripède) de module :

$$f = \frac{mg_0 R^2}{x^2}$$

où g_0 est l'accélération de la pesanteur au niveau de la mer.

1°) Retrouver la formule précédente, à partir de la loi de la gravitation universelle de Newton, qui s'écrit :

$$f = \varepsilon \frac{M\,m}{r^2}$$

où M, représente la masse de la Terre ;
m, représente la masse du satellite ;
r, représente la distance des centres de gravité des deux astres (r = x) ;
ε, représente la constante de la gravitation universelle.

2°) En posant : $mg_0 R^2 = K$, exprimer en fonction de K et x, l'énergie cinétique du satellite. Calculer numériquement l'énergie cinétique du satellite et sa vitesse pour $x = 6{,}72.10^6$ mètres.

On prendre : $g_0 = 9{,}80\ m/s^2$ et $R = 6{,}40.10^6$ mètres.

3°) Exprimer en fonction de K et de x, l'accroissement de l'énergie potentielle du système satellite - Terre, quand on donne à x un accroissement dx très petit. (On rappelle que la variation d'énergie potentielle d'un système matériel entre deux instants donnés est opposée à la somme des travaux effectués entre ces instants par toutes les forces intérieures s'exerçant sur les diverses parties du système, à l'exclusion des forces de frottement).
partant de l'expression obtenue, montrer qu'on peut exprimer, en fonction de K et de x, l'énergie potentielle du système satellite- Terre (cette énergie potentielle étant considérée comme nulle au niveau de la mer où x = R), par la relation :

$$W = K \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{x} \right)$$

Application : Calculer numériquement la vitesse initiale minimale qu'il faudrait communiquer à un projectile de masse m, partant du niveau de la mer, pour qu'il échappe définitivement à l'attraction terrestre (x tendant alors vers l'infini). On négligera la résistance de l'air.

B - Un électron tourne autour d'un proton avec un mouvement circulaire uniforme de rayon x ayant pour centre le proton supposé ponctuel et immobile. Le proton attire l'électron une force $\vec{f}$ de module :

$$f = 9.10^9 \frac{e^2}{x^2}$$

e est la charge électrique du proton et a pour valeur $e = 1{,}6.10^{-19}$ coulomb. Les poids des deux particules sont négligeables dans la suite.

On pose : $9.10^9\ e^2 = K$.
Dans le cas particulier où x = R, l'électron et le proton constituent un modèle simplifié de l'atome d'hydrogène dans l'état fondamental, R étant alors le rayon de l'atome.

1°) Exprimer en fonction de K et x :

a - L'énergie cinétique de l'électron ;

b - Le travail de la force $\vec{f}$, quand la distance du proton à l'électron passe de la valeur R à la valeur x. Exprimer, en fonction de K et de x, l'énergie totale du système, son énergie potentielle étant considérée comme nulle pour x = R.

Application : L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène (c'est-à-dire l'énergie nécessaire pour séparer complètement le proton de l'électron) est 13,5 électrons-volts (1 électron-volt (eV) = $1{,}6 . 10^{-19}$ joule). En déduire le rayon R de l'atome d'hydrogène.

2°) Dans un état dit "excité", l'électron de l'atome d'hydrogène peut être placé sur plusieurs orbites circulaires dont les rayons forment une suite discontinue. Calculer, en fonction de K et de R, l'énergie perdue par l'atome d'hydrogène quand l'électron descend de l'orbite de rayon 16 R sur l'orbite de rayon 4 R.

Application : Cette énergie apparaissant uniquement sous forme d'énergie rayonnante, calculer la fréquence et la longueur d'onde dans le vide de la radiation émise. On donne la constante de Planck :

$h = 6{,}62.10^{-34}$ joule. seconde.

On donne les renseignements suivants :

la fréquence de la radiation est ν telle que $W = h\nu$. Sa longueur d'onde est $\lambda = c/\nu$ où c est la vitesse de la lumière et vaut $3{,}00.10^8$ m/s.

(Rotary Club 1977).

3 - On veut placer un satellite, de masse m = 100 kg en orbite circulaire à une altitude H = 36 100 km (soit une distance D = 6 400 km du centre de la Terre, le rayon terrestre étant R = 6 400 km). En utilisant la relation :

$$g = g_0 \frac{R^2}{D^2} \quad \text{avec} \quad g_0 = 9{,}80 \text{ m/s}^2 ,$$

on trouve que l'accélération de la pesanteur à une telle altitude est égale à $g_A = 0{,}222 \text{ m/s}^2$.

1°) Calculer la vitesse V, perpendiculaire à un rayon terrestre, qu'il faut communiquer au satellite pour qu'il demeure sur cette orbite circulaire. Calculer en heures la durée T d'un révolution autour de la Terre. Que pensez vous d'un tel satellite si son orbite est équatoriale (c'est à dire si le plan de l'orbite est le plan de l'équateur terrestre) ?

2°) Tracer sur une feuille de papier millimètre, la courbe représentant les variations de l'accélération de la pesanteur en fonction de l'altitude, en respectant les échelles suivantes :

- en ordonnées, 1 cm pour 0,50 m/s^2 ;
- en abscisses, 1 cm pour $2{,}00.10^6$ m (2000 Km).

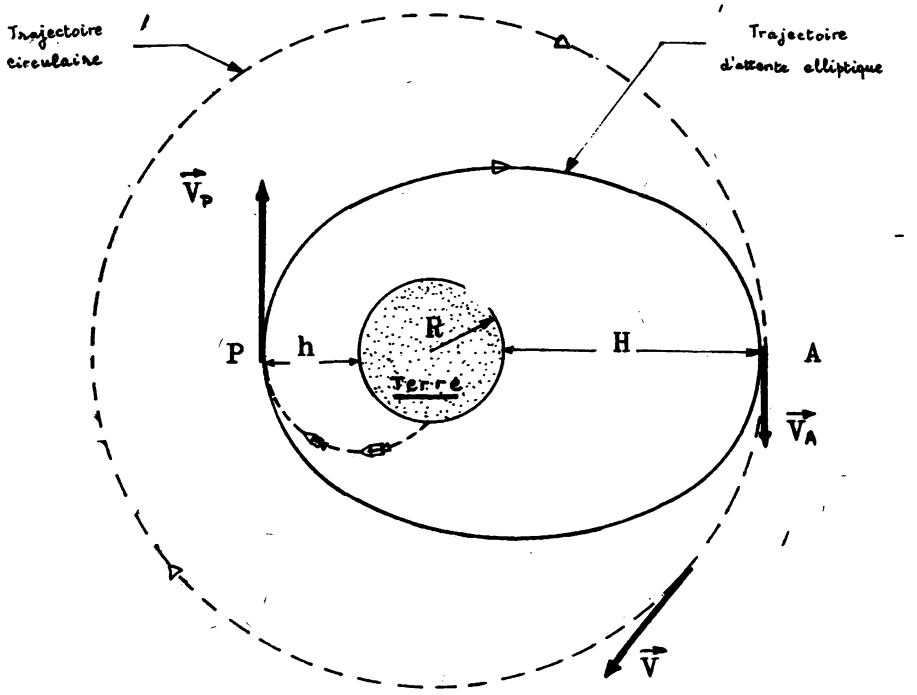
On trouvera dans le tableau ci-dessous quelques valeurs de g pour aider à la construction de la courbe :

h (m)	0	$3{,}60.10^6$	$12{,}0.10^6$	$36{,}1.10^6$
g (m/s^2)	9,80	4,01	1,18	0,222

Représenter sur le même graphique les valeurs moyennes de l'accélération de la pesanteur :

- entre 0 et 3 600 km : $g_1 = 6{,}27 \text{ m/s}^2$;
- entre 0 et 36 100 km: $g_2 = 1{,}47 \text{ m/s}^2$;

3°) Le lancement du satellite comporte deux phases :



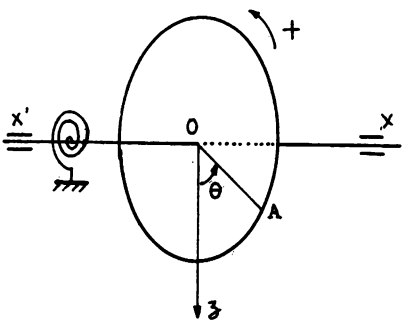
avant d'être placé sur son orbite circulaire, le satellite est placé sur une orbite d'attente fortement elliptique, dont le périgée P(le point le plus proche de la Terre) se trouve à une altitude h = 3 600 km et l'apogée A (le point le plus éloigné de la Terre) à une altitude H = 36 100 km. Les valeurs moyennes de l'accélération de la pesanteur entre le niveau du sol et l'altitude h = 3 600 km étant g_1 = 6,27 m/s^2 et entre le niveau du sol et l'altitude H = 36 100 km étant g_2 : 1,47 m/s^2, calculer l'énergie potentielle $(Ep)_P$ du système Terre-satellite lorsque le satellite se trouve au périgée et son énergie potentielle $(Ep)_A$ lorsque le satellite se trouve à l'apogée. Quelle est la variation Δ Ep d'énergie potentielle quand le satellite passe du périgée à l'apogée ?

4°) Le satellite est placé par le lanceur (la fusée) en P sur l'orbite d'attente avec une vitesse V_P = 8,10.10^3 m/s (soit environ 29 000 km/h) perpendiculairement au rayon terrestre. Le moteur du satellite ne fonctionnant pas que peut-on dire de la somme des énergies potentielle et cinétique Ep + Ec quand il décrit sa trajectoire elliptique ? En déduire la vitesse V_A du satellite quand il arrive à l'apogée A. Comparer cette valeur à la vitesse de satellisation V en orbite circulaire calculée à la **première question**

5°) La deuxième phase consiste à transformer l'orbite d'attente elliptique en orbite circulaire. Le satellite décrivant son orbite élliptique, arrivant à son apogée A, l'impulsion nécessaire pour obtenir l'augmentation de vitesse $\Delta v = V - V_A$ qui rendra l'orbite circulaire est obtenue en allumant pendant un intervalle de temps Δt un petit moteur du satellite. Celui-ci éjecte par seconde une masse de gaz a = 10 kg/s avec une vitesse d'éjection u = 1 800 m/s relativement au moteur. Pendant combien de temps doit-on faire fonctionner le moteur du satellite ?

4 - Un disque homogène, (S), de masse M = 3,20 kg et de rayon R = 5 cm, peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal X'X perpendiculaire à son plan et passant par son centre O. On désignera par Oz la verticale du point O, orientée de haut en bas. On fixe sur l'axe X'X l'une des extrémités d'un ressort spiral de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixe ; soit A le point de la circonférence du disque qui, lorsque le disque est dans sa position d'équilibre, se trouve sur la verticale Oz, au dessous de O.

Dans ces conditions, lorsque le disque (S) est écarté de sa position d'équilibre d'un angle de mesure algébrique $\theta = (Oz , OA)$, il est soumis de la part du ressort spiral, à un couple de rappel de mesure algébrique $- C\theta$, C étant une constante positive de valeur



$C = 10^{-1}$ m.N/rd.

Dans tout le problème, on négligera les résistances passives.

1°) Calculer le moment d'inertie J, du disque (S) par rapport à l'axe X'X. On rappelle que ce moment d'inertie est donné par la formule

$$J = \frac{1}{2} MR^2$$

2°) On écarte le disque (S) d'un angle $\theta_0 = 1$ rd à partir de sa position d'équilibre, puis on l'abandonne sans vitesse à l'instant t = 0.

a - Ecrire l'équation du mouvement $\theta = f(t)$ et calculer la période des oscillations du disque.

b - Calculer la vitesse angulaire du disque à un passage par sa position d'équilibre, ainsi que son accélération angulaire à un instant où son élongation angulaire est $\theta = + 1$ radian.

c - Calculer en fonction de θ, l'énergie potentielle élastique emmagasinée dans le ressort spiral.

3°) Le ressort spiral étant en place, on fixe maintenant sur le disque (S), au point A, une masse ponctuelle m = 102 grammes.

a - On écarte alors le disque de sa position d'équilibre, d'un angle $\theta_0 = + 60^0$ et on l'abandonne sans vitesse.

Calculer la vitesse angulaire du disque au passage par la position correspondant à l'élongation $\theta = + 30^0$.

b - On répète l'expérience précédente, mais en donnant maintenant à l'amplitude angulaire la valeur $\theta_0 = 1^0$ Montrer que le mouvement est alors un mouvement sinusoïdal approché et calculer, dans ce cas, la période des oscillations.

(baccalauréat).

Chapitre 16

GENERALITES SUR LES PHENOMENES PERIODIQUES.

I Définition.

Un phénomène est périodique s'il se reproduit identiquement à lui même à des intervalles de temps successifs égaux appelés période T du phénomène.

L'état du phénomène est le même aux instants t, t + T, t + 3T..., t + kT.

II Exemples de phénomènes périodiques.

Nous avons déjà étudié plusieurs mouvements périodiques :

- le mouvement circulaire uniforme ;
- le mouvement pendulaire ;
- les mouvements sinusoïdaux de translation et de rotation.

De nombreux phénomènes physiques sont périodiques et sinusoïdaux. Nous étudierons quelques uns d'entre eux.

- le son ;
- les ondes lumineuses ;
- le courant alternatif sinusoïdal.

Ces phénomènes obéissent à une équation du type :

$$y = a \sin (\omega t + \varphi)$$

où a est l'amplitude du phénomène ;
ω sa pulsation ;
φ sa phase initiale ;
$\omega t + \varphi$ sa phase à l'instant t ;

La période et la fréquence du phénomène sont respectivement :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (s) \qquad N = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (Hz)$$

III DIFFERENCE DE PHASE.

Soient deux phénomènes périodiques de même pulsation et d'équations :

$$y_1 = a_1 \sin (\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = a_2 \sin (\omega t + \varphi_2)$$

La différence de phase entre les deux phénomènes est la quantité algébrique :

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$$

On peut envisager les cas particuliers suivants :

- si $\Delta\varphi = 2k\pi$: ils sont en phase ;

- si $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$, ils sont en opposition de phase urs états vibratoires sont toujours oppos

- si $\Delta\varphi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, ils sont en quadrature de phase.

IV LE STROBOSCOPE.

Le stroboscope est un appareil qui émet périquement de brefs éclairs destinés à observer u ralenti des mouvements périodiques ou à les immobiliser apparemment.

Ces éclairs peuvent être émis par des stroboscopes électroniques ou mécaniques. Dans ce dernier cas, il sont formés d'un disque percé de un ou plusieurs trous éclairés par de la lumière. Le disque tourne autour de son axe : un bref éclair le traverse chaque fois qu'un trou passe devant le faisceau lumineux.

Nous voulons par exemple observer la rotation d'un disque sur lequel est dessiné un trait Nous désignerons par :

- T et N la période et la fréquence de ce disque ;

- θ et n la période et la fréquence apparentes du disque ;

- T' et N' la période et la fréquence des éclairs du stroboscope.

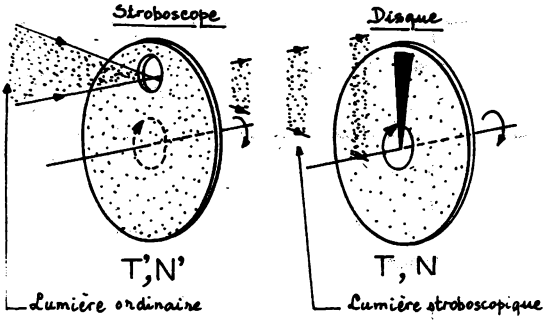
1°) L'immobilité apparente :

Le disque semble immobile s'il est éclairé brièvement à chaque fois que le trait repasse par la même position. Donc si le disque effectue un tour complet entre deux éclairs, c'est à dire pendant un tour du stroboscope. La fréquence du disque est alors égale à celle du stroboscope :

$$N = N'$$

Si le disque effectue k tours complets entre deux éclairs, le trait est toujours éclairé lorsqu'il passe par la même position. La fréquence du disque est k fois plus grande que celle du stroboscope. On a :

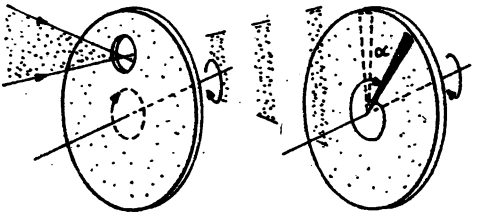
$$N = KN'$$



2°) Le mouvement ralenti direct

Le disque tourne un peu plus vite que le stroboscope. Nous nous proposons de déterminer sa fréquence apparente n.

Pendant un tour du stroboscope (entre deux éclairs) le disque a effectué un tour plus une fraction de tour. Par exemple, un tour plus un p ième de tour. Mais l'observateur a l'impression que le disque a tourné d'un p ième de tour seulement puisque la rotation a eu lieu dans l'obscurité.



Inscrivons dans un tableau les angles de rotation du stroboscope, du disque et la rotation apparente du disque :

Rotation du stroboscope	Rotation du disque.	Rotation apparente du disque.
1 tour →	1 tour + $\frac{1}{p}$ tour	$\frac{1}{p}$ tour
2 tours →	2 tours + $\frac{2}{p}$ tours	$\frac{2}{p}$ tour
.....	.....	.....
p tours →	p tours + $\frac{p}{p}$ tour ou (p + 1) tours	1 tour

La durée apparente de révolution du disque, c'est à dire sa période apparente est θ . Pendant ce temps, d'après le tableau, le stroboscope a effectué p tours de durée T' chacun et le disque (p + 1) tours de durée T chacun. On a donc :

$$\begin{cases} \theta = p.T' \\ \theta = (p+1)T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\theta}{T'} \quad (1) \\ p+1 = \dfrac{\theta}{T} \text{ ou } p = \dfrac{\theta}{T} - 1 \quad (2) \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) sont égales puisqu'elles expriment de deux façons la valeur p. Donc :

$$\frac{\theta}{T'} = \frac{\theta}{T} - 1$$

Divisons les deux membres par θ. On obtient :

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T} - \frac{1}{\theta}$$

Ces trois termes sont respectivement la fréquence du stroboscope, celle du disque et la fréquence apparente du disque :

$$N' = N - n$$

Finalement :

$$\boxed{n = N - N'}$$

3°) Le mouvement ralenti inverse.

Le lecteur démontrera par un raisonnement analogue que si pendant un tour du stroboscope le disque a effectué un tour moins un p ième de tour, il semble tourner dans le sens inverse avec la fréquence apparente :

$$n = N' - N$$

Chapitre 16

EXERCICES

1/ Un stroboscope mécanique est formé d'un disque percé d'un trou. On étudie le mouvement de rotation d'un second disque.

Pendant un tour du stroscope (entre deux éclairs) le disque effectue k tours plus la fraction $\frac{1}{p}$ tour. La fréquence des éclairs du stroboscope est N'. La fréquence de rotation du disque est N. Montrer qu'il semble tourner dans le sens direct avec une fréquence apparente :

$$n = N - kN'$$

2/ Le dispositif est le même que celui de l'exercice précédent. Entre deux éclairs du stroboscope, le disque effectue k tours moins la fraction $\frac{1}{p}$ tour. Montrer qu'il semble tourner dans le sens rétrograde avec une fréquence apparente :

$$n = kN' - N$$

3/ Un disque peint en blanc, porte un rayon tracé en noir. A l'aide d'un dispositif approprié qui sera représenté schématiquement, on illumine le disque, à intervalles de temps réguliers, par des éclairs très brefs, à raison de 30 éclairs par seconde. On modifie légèrement la vitesse de rotation du moteur qui entraine le disque et l'on constate que le rayon noir paraît tourner en sens contraire de son mouvement réel à raison d'un tour en 10 secondes. Calculer dans ces conditions la vitesse du moteur, que l'on sait voisine de 1 800 tours par minute.

Dans une seconde expérience, on augmente cette vitesse de manière à voir le disque immobile avec trois rayons noirs décalés de 120° l'un par rapport à l'autre. Quelle est alors la vitesse du moteur qui ne peut dépasser 3000 tours par minute ?

4/ Pour régler à la valeur convenable la vitesse de rotation d'un tourne-disque on pose sur son plateau un disque en carton portant 66 rayons équidistants et on l'examine à la lumière d'un tube à gaz luminescent s'éclairant 50 fois par seconde. Le plateau partant du repos, la vitesse de rotation croît, et à un moment donné, pour la première fois, les rayons semblent im-

mobiles; interpréter l'expérience et en déduire à ce moment la vitesse du plateau exprimée en tours par minute.

5/ Un disque de stroboscope est percé de 8 trous régulièrement répartis sur une circonférence. Il tourne à raison de 5 tours par seconde. Une lame vibrante éclairée par le stroboscope paraît immobile. Quelles sont les fréquences possibles ? Calculer la fréquence exacte, sachant que par un autre procédé on l'a trouvée voisine de 435.

Chapitre 17

LA PROPAGATION D'UN MOUVEMENT VIBRATOIRE

I - PROPAGATION D'UN EBRANLEMENT DANS UN MILIEU ELASTIQUE HOMOGENE

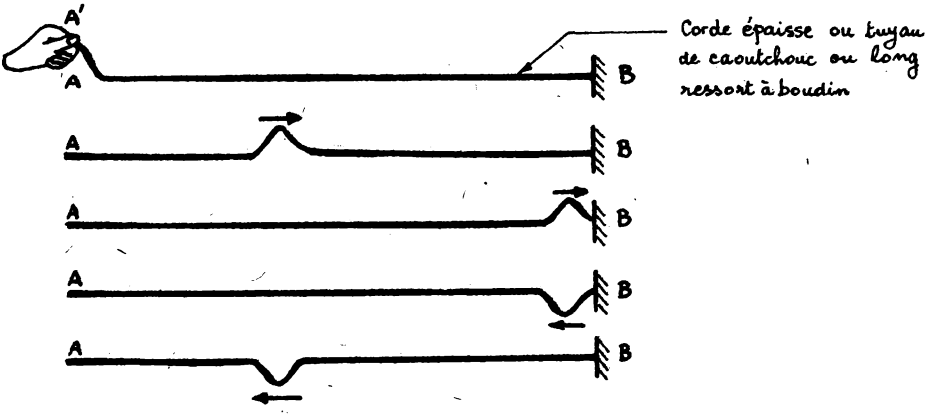
Un milieu est élastique, si après avoir subi une déformation il reprend son état initial lorsque cesse la cause de la déformation. Il en est ainsi d'une corde tèndue, d'un ressort à boudin dans la limite de son domaine d'élasticité.

Dans la suite, nous appellerons ébranlement une déformation rapide imposée localement à un milieu élastique.

1°) Propagation d'un ébranlement transversal

a/ La corde est fixée à l'une de ses extrémités

Une corde AB est fixée à son extrémité B et tenue à la main à son extrémité A. Effectuons un bref déplacement AA'A perpendiculaire à la direction de la corde. Il s'agit d'un ébranlement transversal.



Nous observons que l'ébranlement se propage le long de la corde; arrivé au point fixe B, il se réfléchit et se propage de B vers A, tandis que son élongation change de signe. Nous dirons qu'il y a réflexion de l'ébranlement avec changement de signe pour son élongation.

La matière de la corde ne se propage pas. C'est l'énergie mécanique emmagasinée au point A lorsque l'expérimentateur déforme la corde qui se transmet de point en point. L'amplitude de l'ébranlement reste donc théo-

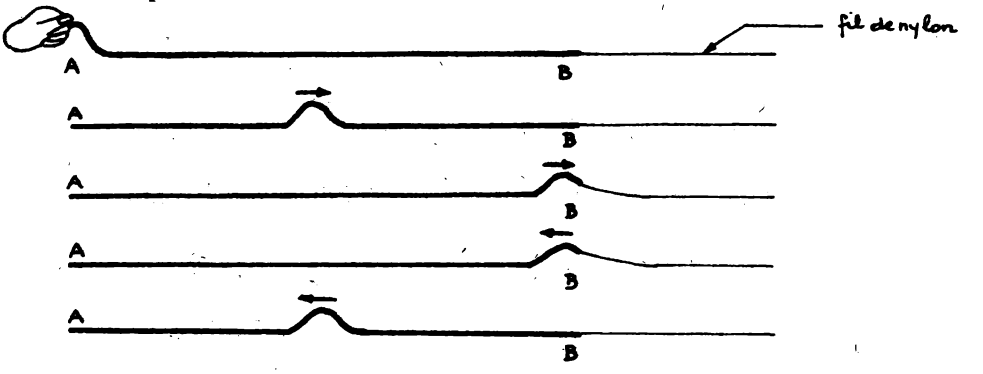
riquement constante, de même que la vitesse de propagation. En réalité, en raison des frottements, une partie de l'énergie mécanique se transforme en énergie thermique et l'amplitude de l'ébranlement décroît. Dans le cas idéal où l'on peut négliger ces frottements, nous énoncerons la propriété suivante :

> Le long d'une corde fixée à l'une de ses extrémités, un ébranlement se propage à vitesse constante et avec une amplitude constante. L'ébranlement se réfléchit à l'extrémité fixe "en changeant de signe".

b/ L'extrémité de la corde est libre

On réalise l'expérience suivante :

Une corde épaisse ou, de préférence, un long ressort à boudin repose sur une longue table lisse. Son extrémité A est tenue à la main. Son extrémité B est fixée à un fil résistant de très faible masse, tel un fil de nylon. On imprime à l'extrémité A un ébranlement transversal, dans le plan de la table :



L'énergie mécanique communiquée au point A se propage comme précédemment. L'extrémité B de la corde est libre de se déplacer. Mais le fil de nylon est trop léger pour propager l'énergie mécanique du ressort. Aussi, cette énergie se réfléchit au point B. L'ébranlement se propage de B vers A sans "changer de signe".

Nous énoncerons la propriété suivante :

> Le long d'une corde dont l'extrémité est libre, un ébranlement se propage à vitesse constante et avec une amplitude constante. L'ébranlement se réfléchit à l'extrémité libre sans changer de signe.

c/ Corde munie d'un dispositif d'amortissement

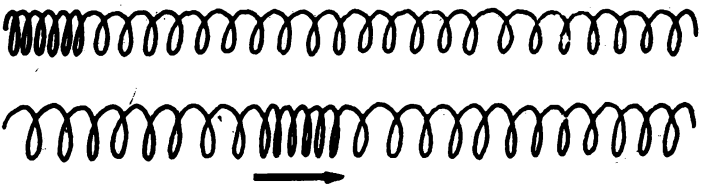
On peut entièrement absorber l'énergie qui se propage par un dispositif d'amortissement. On recouvre par exemple l'extrémité de la corde avec du coton.

Dans ces conditions il n'y a pas réflexion de l'ébranlement.

2°) Propagation d'un ébranlement longitudinal

Un ébranlement qui a même direction que sa direction de propagation est un ébranlement longitudinal.

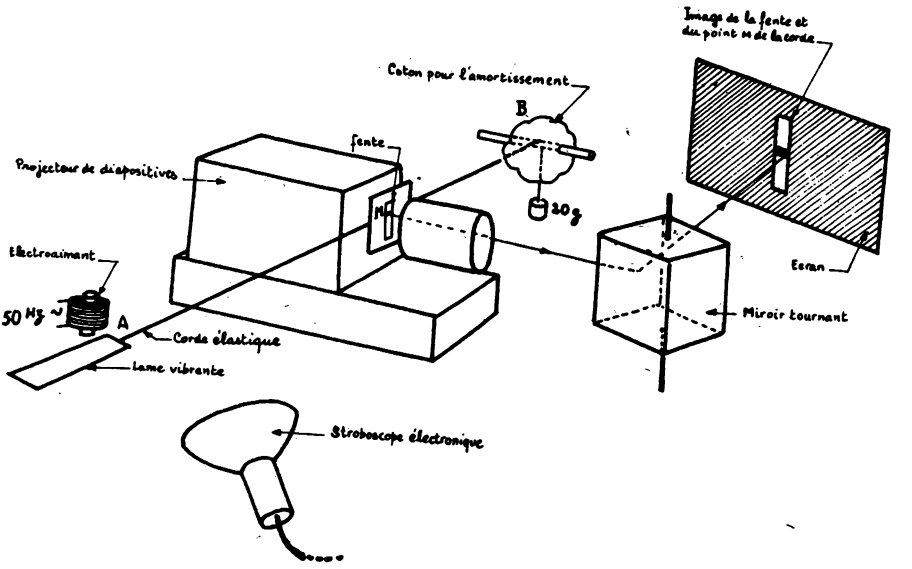
Comprimons quelques spires de l'extrémité d'un ressort à spires non jointives. Lâchons brusquement : il y a propagation de cette compression tout au long du ressort :



Comme l'ébranlement transversal, cet ébranlement longitudinal se propage à vitesse constante, avec une amplitude constante. Il se réfléchit avec ou sans changement de sens du déplacement des spires suivant que l'autre extrémité du ressort est fixe ou libre. La mise en évidence expérimentale n'étant pas possible directement, nous ne développerons pas la question.

II - ETUDE EXPERIMENTALE DE LA PROPAGATION D'UN MOUVEMENT SINUSOIDAL

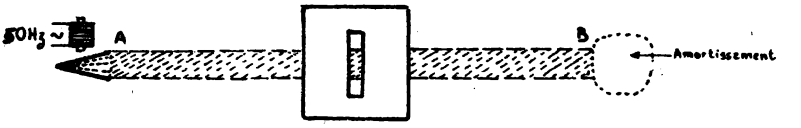
1°) Le dispositif et les expériences



Le milieu élastique de propagation est une corde AB. Son extrémité A est fixée à une lame vibrante ; son extrémité B est munie d'un dispositif d'amortissement pour empêcher la réflexion des ébranlements. On peut isoler un point quelconque de la corde et projeter son image sur un écran par l'intermédiaire d'une fente, d'un projecteur de diapositives et d'un miroir tournant. (Immobile sur la figure ci-dessus).

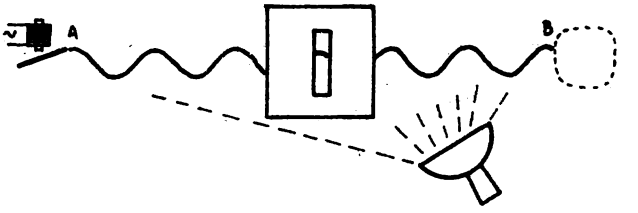
a/ La forme de la corde. La sinusoïde des espaces

Lorsque la lame vibrante est animée de mouvements sinusoïdaux, le point A de la corde devient une source d'ébranlements sinusoïdaux qui se propagent de A vers B. La fréquence élevée des ébranlements (50 ou 100 Hertz suivant les montages) et leur grande vitesse de propagation ne permet pas d'analyser le phénomène en lumière ordinaire : la corde apparaît sous l'aspect d'une bande floue ;



Observation en lumière ordinaire

On observe en lumière stroboscopique. Si la fréquence des éclairs du stroboscope est égale à celle de la lame vibrante, le phénomène s'immobilise en apparence. La corde a l'aspect d'une sinusoïde immobile appelée sinusoïde des espaces.



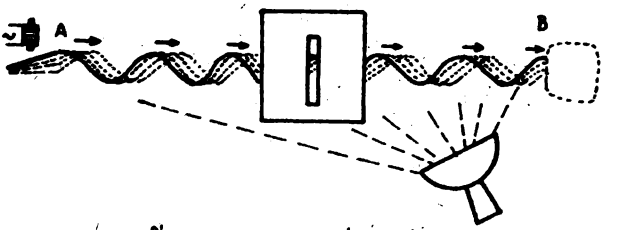
Observation en lumière stroboscopique

On obtient le même résultat en photographiant la corde en l'éclairant à la lumière d'un flash (durée de l'éclair : de l'ordre du millième de seconde).

La sinusoïde des espaces donne donc la position dans l'espace de l'ensemble des points de la corde à un instant donné.

b/ L'onde progressive

Pour une fréquence de stroboscope légèrement inférieure à celle de la lame vibrante on observe un lent déplacement de la sinusoïde de A vers B. Ce sont les déformations de la corde qui se déplacent de A vers B et non pas la corde elle-même. Le phénomène, observé ici au ralenti porte le nom d'onde progressive.

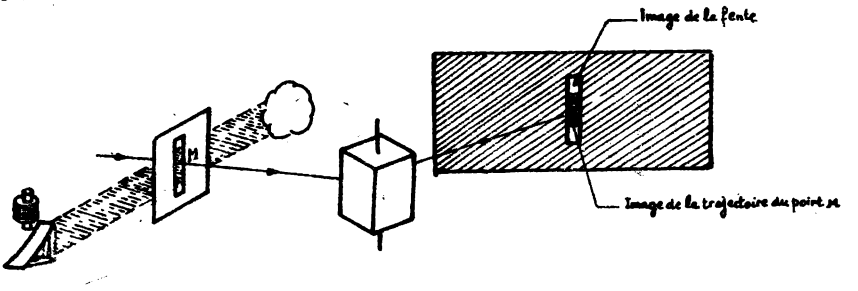


L'onde progressive observée au ralenti stroboscopique.

c/ Mouvement d'un point de la corde
La sinusoïde des temps

Première partie de l'expérience

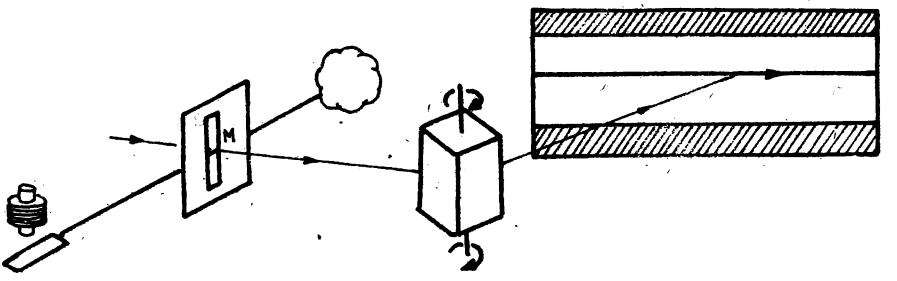
La lame vibre, le miroir est immobile. Sur l'écran, les mouvements du point M de la corde apparaissent sous l'aspect d'un petit segment flou qui est la trajectoire du point :



Observation de la trajectoire d'un point M de la corde

Deuxième partie de l'expérience

La lame ne vibre plus, mais on fait tourner le miroir. L'image du point M décrit rapidement l'écran et dessine un axe qui symbolise l'axe du temps.



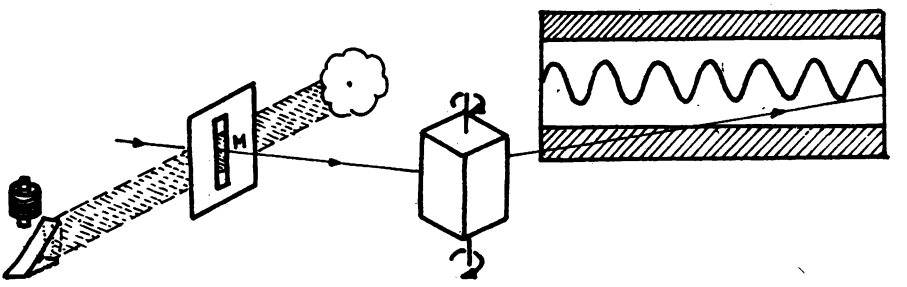
La rotation uniforme du miroir introduit le paramètre temps.

Troisième partie de l'expérience

On combine maintenant les deux premières parties de l'expérience : la lame vibre et le miroir tourne. On observe alors sur l'écran une sinusoïde qui représente les déplacements du point M en fonction du temps. C'est le diagramme des espaces pour le point M de la corde. On

l'appelle aussi sinusoïde des temps du point M.

Cette expérience est une analyse du mouvement d'un point quelconque de la corde en fonction du temps : lorsque la corde est le siège d'une onde progressive sinusoïdale issue de la source A, un point quelconque de la corde est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.



Analyse du mouvement d'un point quelconque de la corde : il est en mouvement rectiligne sinusoïdal.

2°) La longueur d'onde

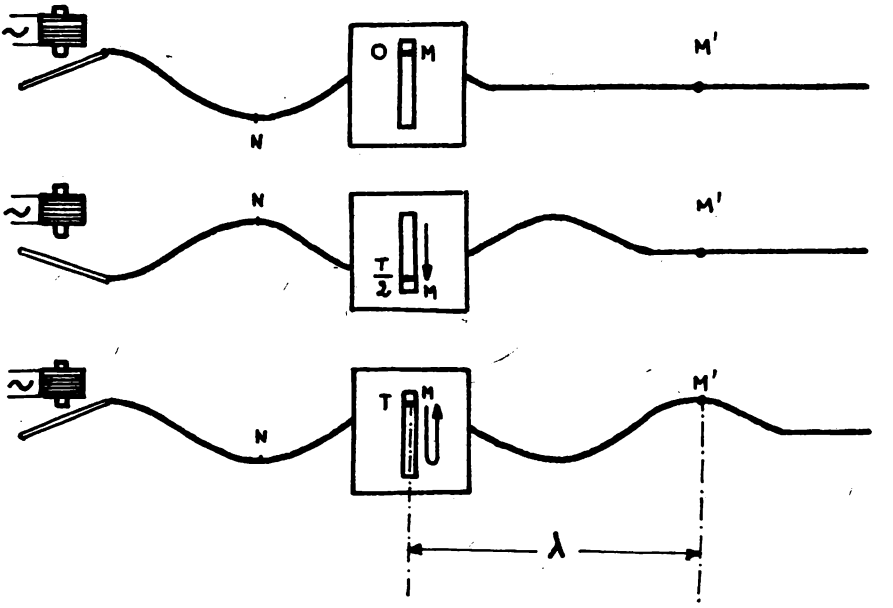
a/ Définition

> La longueur d'onde d'une onde progressive est la distance parcourue par un ébranlement quelconque pendant une période des vibrations de la source ou de tout autre point du milieu de propagation.

Soit M un point de la corde observé à travers une fente. A un instant que nous appelons t = 0 s, son élongation est maximale (+a). Au même instant, le point N, sur sa gauche se trouve dans un "creux" de l'onde (élongation -a), alors que le point M', sur sa droite n'a pas encore été atteint par l'onde issue de la source.

A l'instant $t = \frac{T}{2}$, l'élongation de M est minimale (-a). Le "creux" qui était en N a atteint le point M et le "sommet" qui était en M s'est déplacé vers la droite.

A l'instant t = T, l'élongation de M est à nouveau maximale (+a). Le sommet parti de M a atteint le point M' de la corde.



La longueur d'onde λ : distance parcourue par un ébranlement pendant une période T.

La distance MM' parcourue par un ébranlement pendant une période T, c'est-à-dire pendant que le point M de la corde effectuait une oscillation complète est la longueur d'onde λ de l'onde progressive.

Le schéma montre qu'on peut également définir ainsi la longueur d'onde :

C'est la distance séparant deux "sommets" consécutifs de l'onde progressive.

b/ Expression de la longueur d'onde

Soit V, la vitesse de propagation de l'onde (ou célérité de l'onde). Pendant la durée T d'une période, l'ébranlement a parcouru une longueur d'onde à vitesse constante. On a donc entre λ , V et T la relation :

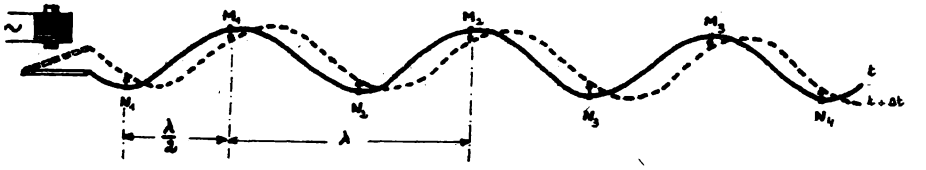
$$\lambda = V \cdot T$$

λ en mètres
V en mètres par seconde
T en secondes.

3°) Points vibrant en phase ou en opposition de phase

Représentons l'état de la corde à deux instants très voisins :

t et t + Δt :



Des points tels que M_1 , M_2 , M_3 , distants d'une longueur d'onde ou plus généralement d'un nombre entier de longueurs d'onde ont à chaque instant le même état vibratoire : ils vibrent en phase.

La condition pour que deux points quelconques d'une onde progressive vibrent en phase est que la distance qui les sépare soit égale à un nombre entier de longueurs d'onde :

$$\boxed{d = k\lambda} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Des points tels que N_1 et M_1 , distants d'une demi-longueur d'onde ont à chaque instant des états vibratoires opposés : ils vibrent en opposition de phase. Il en est de même des points N_1 et M_2 , distants de trois demi-longueurs d'onde, N_1 et M_3 distants de cinq demi-longueurs d'onde etc.

La condition pour que deux points quelconques d'une onde progressive vibrent en opposition de phase est que la distance qui les sépare soit égale à un nombre impair de demi-longueurs d'onde :

$$\boxed{d \quad (2k + 1)\ \frac{\lambda}{2}} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

3°) Expression de la vitesse de propagation

Une étude théorique, confirmée par l'expérience, montre que la vitesse de propagation des ébranlements le long d'une corde homogène est constante et indépendante de de l'amplitude des ébranlements. Elle s'exprime par :

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

F est la tension de la corde, exprimée en newtons ;

μ la masse linéique de la corde (masse par unité de longueur), exprimée en kilogramme par mètre (kg/m).

V est la vitesse de propagation, exprimée en mètres par seconde.

A défaut de pouvoir démontrer cette formule, vérifions son homogénéité en utilisant les équations aux dimensions :

$$\left[\sqrt{\frac{F}{\mu}}\right] = \left[\frac{M.L.T^{-2}}{M.L^{-1}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[L^2 . T^{-2}\right]^{\frac{1}{2}} = L.T^{-1} = [V]$$

L'expression est bien homogène à une vitesse.

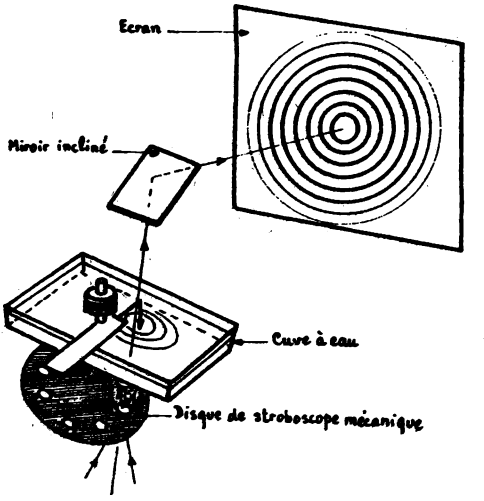
III-PROPAGATION D'ONDES DANS UN PLAN ET DANS L'ESPACE

1°) Ondes progressives à la surface de l'eau

a/ Observations

La surface de l'eau d'une cuve de faible profondeur est excitée par une pointe reliée à une lame vibrante. Le phénomène est éclairé en lumière stroboscopique et projeté sur un écran.

Les ébranlements produits au point source O se propagent sous forme d'ondes circulaires.



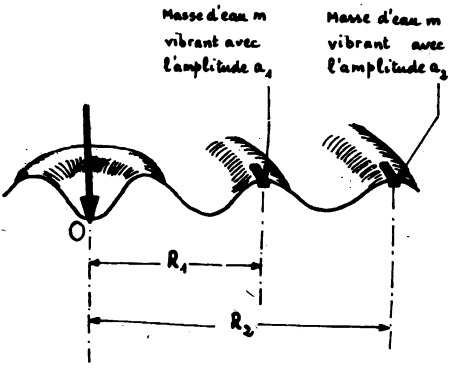
Contrairement à ce qui se passe le long d'une corde, l'amplitude des ébranlements décroît lorsqu'ils s'éloignent de la source des vibrations.

Le long d'une corde, l'énergie vibratoire se transmet intégralement d'un point au point voisin. Ici, l'énergie vibratoire de la source se répartit sur des cercles de rayons croissants et se partage entre un nombre de points de l'eau de plus en plus grand. Un point de l'eau reçoit donc d'autant moins d'énergie qu'il est plus éloigné de la source.

b/ Variation de l'amplitude des ébranlements

Soit une masse d'eau m, répartie sur une unité de longueur à la distance R_1 de la source. Elle vibre avec l'amplitude a et la pulsation ω. Son énergie vibratoire est :

$$e_1 = \frac{1}{2} m \omega^2 a_1^2$$



(expression démontrée pour l'oscillateur masse + ressort).

L'énergie vibratoire de tout le front d'onde de rayon R_1 et de longueur $2\pi R_1$ est :

$$E_1 = 2\pi R_1 e_1 = \pi R_1 m \omega^2 a_1^2$$

Considérons la même masse d'eau m, répartie sur une unité de longueur à la distance R_2 de la source. Elle vibre avec l'amplitude a_2 et la pulsation ω.
Son énergie vibratoire est :

$$e_2 = \frac{1}{2} m \omega^2 a_2^2$$

L'énergie vibratoire de tout le front d'onde de rayon R_2 et de longueur $2\pi R_2$ est :

$$E_2 = 2\pi R_2 e_2 = \pi R_2 m \omega^2 a_2$$

Il y a conservation de l'énergie : $E_1 = E_2$, donc :

$\Pi R_1\ m\ \omega^2 a_1^2 = \Pi R_2\ m\ \omega^2 a_2^2 \Longrightarrow R_1 a_1^2 = R_2 a_2^2$

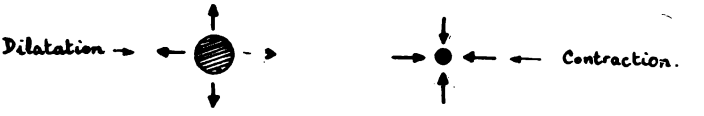
Le produit Ra^2 se conserve :

$R \cdot a^2 = K \Longrightarrow$ $\boxed{a = \sqrt{\frac{K}{R}}}$

L'amplitude d'un ébranlement à la surface de l'eau est inversement proportionnelle à la racine carrée de sa distance à la source des vibrations.

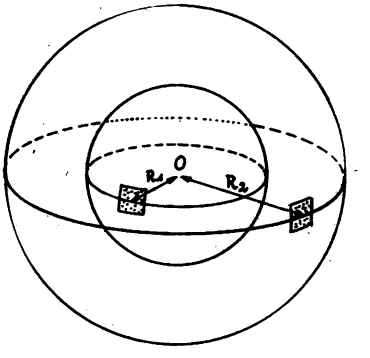
2°) Ondes sphériques

Imaginons au sein d'un fluide, (gaz ou liquide) une très petite sphère pulsante, c'est-à-dire subissant des dilatations et des contractions suivant une loi sinusoïdale :



Cette sphère est la source d'une onde progressive sphérique. Les ébranlements créés par la sphère sont longitudinaux.

Variation de l'amplitude des ébranlements



Soit m la masse de fluide en vibration répartie sur une unité de surface. a_1 est l'amplitude des vibrations à la distance R_1 de la source et a_2 l'amplitude à la distance R_2. Les énergies vibratoires sont respectivement :

- à la distance R_1 : $e_1 = \frac{1}{2}\ m\ \omega^2 a_1^2$
- à la distance R_2 : $e_2 = \frac{1}{2}\ m\ \omega^2 a_2^2$

Les surfaces des fronts d'ondes sphériques sont $4\pi R_1^2$ et $4\pi R_2^2$ et les énergies vibratoires de ces fronts d'onde :

- à la distance R_1 : $E_1 = 4\pi R_1^2 \times e_1 = 2\pi m \omega^2 R_1^2 a_1^2$
- à la distance R_2 : $E_2 = 4\pi R^2 \times e_2 = 2\pi m \omega^2 R_2^2 a_2^2$

L'énergie vibratoire se conserve :

$E_1 = E_2$, ce qui entraine :

$$R_1^2 a_1^2 = R_2^2 a_2^2$$

$$R_1 a_1 = R_2 a_2$$

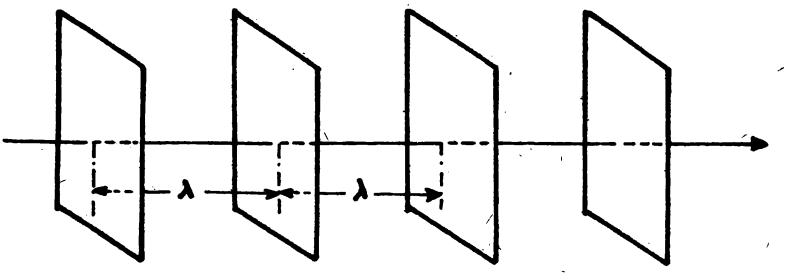
Le produit R.a se conserve :

$R.a = k \longrightarrow$ $\boxed{a = \frac{k}{R}}$

L'amplitude d'un ébranlement est inversement proportionnelle à sa distance à la source des vibrations. Sa décroissance est donc plus rapide que dans le cas des ondes circulaires dans un plan.

3°) Ondes planes

A très grande distance de la source, des éléments d'ondes sphériques sont assimilables à des portions de plans. Autrement dit, on peut confondre l'élément de sphère entourant un point de l'onde avec le plan tangent en ce point :

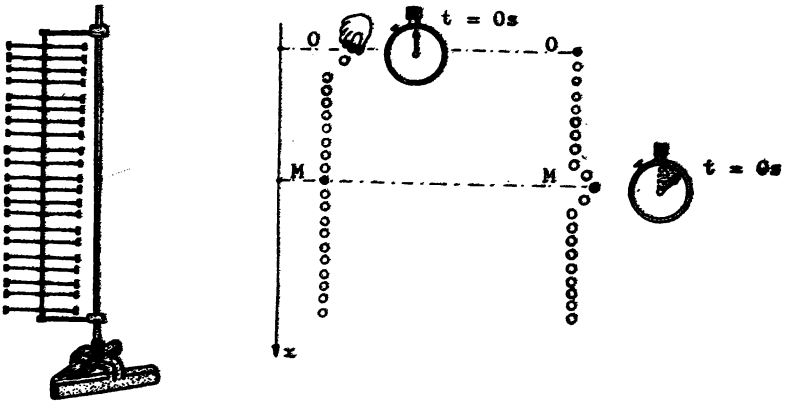


Pour de faibles variations relatives de la distance à la source, l'amplitude peut être considérée comme constante.

IV - L'ETUDE ANALYTIQUE DE LA PROPAGATION D'UN MOUVEMENT SINUSOIDAL

1°) Hypothèse fondamentale

Pour formuler cette hypothèse nous allons observer la propagation d'un ébranlement sur un appareil à ondes de torsion, formé d'un ruban de torsion vertical muni de tiges horizontales dont les extrémités portent des petits disques. La vitesse de propagation de l'ébranlement est suffisamment lente pour être observée par tous les élèves de la classe.

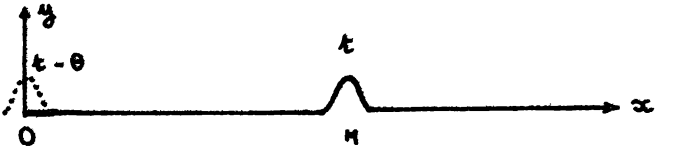


Considérons deux points de l'appareil à ondes : le point source O et un point M quelconque d'abscisse x. A l'instant initial t = 0s nous imprimons un certain mouvement au point O. θ secondes après, le point M effectue le même mouvement. Nous énoncerons ainsi l'hypothèse fondamentale :

> Un point quelconque d'un milieu élastique de propagation reproduit avec un retard θ s un mouvement quelconque du point source.

2°) Equation du mouvement d'un point M

Soit un point M d'abscisse x sur une corde. Son élongation à un instant t est la même que celle qu'avait le point source O θ secondes avant, c'est-à-dire à l'instant (t - θ).



Ce qui s'écrit :

$$\boxed{y_M(t) = y_o(t - \theta)}$$

Si la source O est animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal, l'équation de son mouvement est :

$$y_o(t) = a \sin \omega t$$

A l'instant $(t - \theta)$ son mouvement était :

$$y_o(t - \theta) = a \sin \omega (t - \theta)$$

C'est précisément l'équation du mouvement du point M à l'instant t, conformément à la relation encadrée ci-dessus. Donc :

$$y_M(t) = a \sin \omega (t - \theta)$$

V étant la vitesse de propagation des ébranlements, on a $\theta = \frac{x}{V}$; d'où :

$$y_M(t) = a \sin \omega (t - \frac{x}{V})$$

Remplaçons dans cette expression ω par $\frac{2\Pi}{T}$:

$y_M = a \sin \frac{2\Pi}{T}(t - \frac{x}{V}) = a \sin 2\Pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{V.T})$. Or $V.T = \lambda$,

Donc :

$$\boxed{y_M(x,t) = a \sin 2\Pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})}$$

3°) Exploitation de cette équation

y (x,t) est une fonction de deux variables non séparées, le temps t et l'abscisse x, du type :

$$y(x,t) = f(t - \frac{x}{V}) = f(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

C'est l'équation de propagation d'une onde progressive sinusoïdale

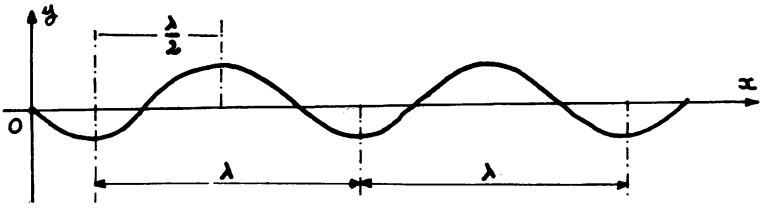
a/ Forme de la corde : sinusoïde des espaces

Fixons la valeur du temps dans l'équation de l'onde progressive. On obtient :

$$\boxed{y(x) = a \sin 2\Pi(Cte - \frac{x}{\lambda})}$$

C'est une fonction sinusoïdale de x seulement: à un

instant donné, la corde a la forme d'une sinusoïde. La période de cette fonction est λ On vérifie en effet que $y(x + k\,\lambda) = y(x)$.



forme de la corde : sinusoïde de période λ

On vérifie également que $y(x + [2k + 1]\,\frac{\lambda}{2}) = - y(x)$

Autrement dit, deux points séparés par un nombre entier de longueurs d'onde ont à un instant quelconque même élongation alors que deux points séparés par un nombre impair de demi-longueurs d'onde ont des élongations opposées. Ces propriétés pouvant être vérifiées à tout instant, nous retrouvons les conditions pour que deux points quelconques vibrent en phase ou en opposition de phase :

Distance séparant des points vibrant en phase : $\boxed{d = k\,\lambda}$ $k \in \mathbb{Z}$

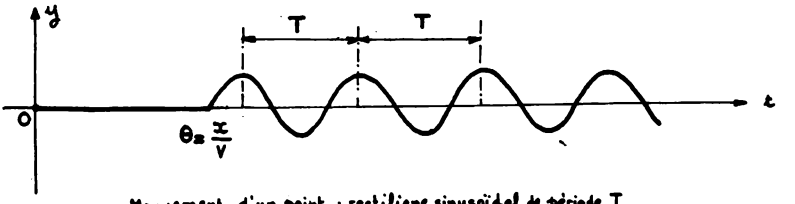
Distance séparant des points vibrant en opposition de phase : $\boxed{d = (2k + 1)\,\frac{\lambda}{2}}$ $k \in \mathbb{Z}$

b/ Mouvement d'un point quelconque. Sinusoïde des temps

Fixons la valeur de x dans l'équation de l'onde progressive. On obtient :

$$y(t) = a \sin 2\,\Pi(\frac{t}{T} - Cte)$$

Un point quelconque vibre sinusoïdalement en fonction du temps avec une période T.



Mouvement d'un point : rectiligne sinusoïdal de période T

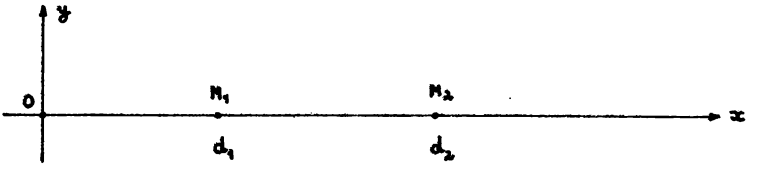
On remarquera que si le point source vibre dès l'instant t = 0 s, le point de la corde situé à la distance x de la source ne vibre qu'à partir de l'instant $\theta = x/V$.

c/ Déphasage entre deux points quelconques

Les mouvements de deux points M_1 et M_2 situés respectivement aux distances d_1 et d_2 de la source sont donnés par les équations :

$$y_{M_1}(t) = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}\right) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda}\right)$$

$$y_{M_2}(t) = a \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}\right) = a \sin\left(\omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda}\right)$$



Le point M_1 a un retard de phase sur la source égal à $\frac{2\pi d_1}{\lambda}$

Le point M_2 a un retard de phase sur la source égal à $\frac{2\pi d_2}{\lambda}$

Soit $\Phi_1 = (\omega t - \frac{2\pi d_1}{\lambda})$ la phase de M_1 à l'instant t ;

Soit $\Phi_2 = (\omega t - \frac{2\pi d_2}{\lambda})$ la phase de M_2 au même instant.

Le déphasage entre les vibrations des points M_1 et M_2 est:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{2\pi(d_1 - d_2)}{\lambda}$$

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 17

I - PROPAGATION D'UN EBRANLEMENT DANS UN MILIEU ELASTIQUE

1°) Propagation d'énergie

Dans un milieu matériel élastique, la propagation d'un ébranlement n'est pas la propagation de la matière du milieu, mais la propagation d'une déformation, autrement dit, la propagation d'énergie mécanique.

2°) Propagation d'un ébranlement dans un milieu homogène à une dimension

Ce milieu peut être une corde, un long ressort à boudin etc. Dans un tel milieu :

- L'ébranlement se propage à vitesse constante ;
- Avec une amplitude constante, parce que l'énergie d'un point est intégralement transmise au point voisin ;
- Si l'extrémité du milieu de propagation est fixe, l'ébranlement se réfléchit et son élongation change de signe.
- Si l'extrémité du milieu de propagation est libre, l'ébranlement se réfléchit sans que son élongation change de signe.

3°) Expression de la vitesse

Le long d'une corde homogène dont la tension est F et la masse par unité de longueur μ , la vitesse de propagation des ébranlements est :

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

II- PROPAGATION D'UN MOUVEMENT VIBRATOIRE SINUSOÏDAL

1°) Hypothèse fondamentale

Le point M quelconque d'un milieu élastique de propagation situé à la distance x de la source O reproduit les mouvements de la source avec un retard:

$$\theta = \frac{x}{V}$$

$$y_M(t) = y_o(t - \theta)$$

2°) L'équation d'onde progressive

Si la source est animée d'un mouvement sinusoïdal d'équation :

$$y_o(t) = a \sin \omega t = a \sin \frac{2\Pi t}{T}$$

un point M situé à la distance x est animé d'un mouvement sinusoïdal d'équation :

$$y_M(t) = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{V}\right) = a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Le signe (-) traduit le retard du point M par rapport à la source.

La fonction des deux variables non séparées x et t :

$$y(x,t) = a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

est l'équation d'une onde progressive sinusoïdale.

a/ La sinusoïde des espaces

En fixant la valeur de t dans l'équation d'onde progressive, on obtient :

$$y(x) = a \sin 2\Pi \left(Cte - \frac{x}{\lambda}\right)$$

C'est l'équation d'une sinusoïde. A un instant donné, la corde a la forme d'une sinusoïde de période λ . λ est la longueur d'onde de l'onde progressive.

b/ Longueur d'onde

La longueur d'onde est la distance séparant deux points consécutifs de l'onde vibrant en phase.

Elle est égale à la distance parcourue par un ébranlement pendant une période T. Son expression sa fonction de V et de T :

$$\lambda = V.T$$

c/ Points en phase : points en opposition de phase

Distance séparant des points vibrant en phase	$d = k\lambda$	$k \in \mathbb{Z}$
Distance séparant des points vibrant en opposition de phase :	$d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$	$k \in \mathbb{Z}$

d/ Sinusoïde des temps: mouvement d'un point particulier

En fixant la valeur de x dans l'équation d'onde progressive, on obtient :

$$y(t) = a \sin 2\Pi\left(\frac{t}{T} - Cte\right)$$

C'est l'équation du mouvement rectiligne sinusoïdal du point d'abscisse x.

e/ Retard de phase

Si l'équation du mouvement du point source est $y = a \sin \omega t$, l'équation du mouvement d'un point situé à la distance d de la source est :

$y = a \sin\left(\omega t - \frac{2\Pi d}{\lambda}\right)$, du type $y = a \sin(\omega t - \varphi)$

$$\varphi = \frac{2\Pi d}{\lambda}$$

est le retard de phase du point par rapport à la source.

Chapitre 17

EXERCICES

1/ L'équation du mouvement d'une particule est de la forme :

$$y = a \sin(\omega t - \alpha)$$

Le temps t est exprimé en secondes ; l'élongation y et l'amplitude a sont exprimées en cm. La période du mouvement est égale à 8 secondes. La trajectoire est un segment de droite de 12 cm de longueur. A l'origine des temps, la particule, qui se meut alors dans le sens positif de y, se trouve déplacée, par rapport à sa position moyenne, de 3 cm dans le sens négatif.

On demande de calculer :

1°) Les valeurs des trois constantes a, ω et α ;

2°) Le temps au bout duquel l'élongation de la particule sera égale à 1cm dans le sens positif.

3°) La valeur en degrés de l'angle $(\omega t - \alpha)$ pour t = 2 secondes.

On suppose que le mouvement vibratoire se propage sans amortissement dans le milieu environnant. La période dans l'espace ou longueur d'onde étant égale à 320 cm. Calculer l'élongation, à l'instant t = 6 secondes, d'une particule située à 20 cm de la première.

Données supplémentaires :

sin 10° = 0,174 sin 37,5° = 0,609.

Pour tout angle inférieur à 10° on confondra le sinus et l'angle exprimé en radians.

(Baccalauréat).

2/ Un train d'ondes planes se propage dans un milieu dont les particules sont animées d'un mouvement périodique représenté par l'équation.

$$y = 4 \sin \left(\frac{2\Pi t}{6} + \alpha\right)$$

dans laquelle le temps t est exprimé en secondes et l'élongation y en cm.

1°) Calculer la vitesse de propagation du mouvement vibratoire, sachant que la longueur d'onde est égale à 240 cm.

2°) Calculer, en degrés, la différence des phases correspondant à deux positions occupées par la même particule à 1 seconde d'intervalle.

3°) Calculer, à un instant donné, la différence des phases correspondant à deux particules séparées par une distance de 210 cm dans la direction de propagation.

4°) L'élongation à un instant donné d'une certaine particule est égale à 3 cm. Quelle sera l'élongation de la même particule 2 secondes plus tard ? Interpréter à l'aide d'un diagramme les deux solutions obtenues.

(Baccalauréat).

3/

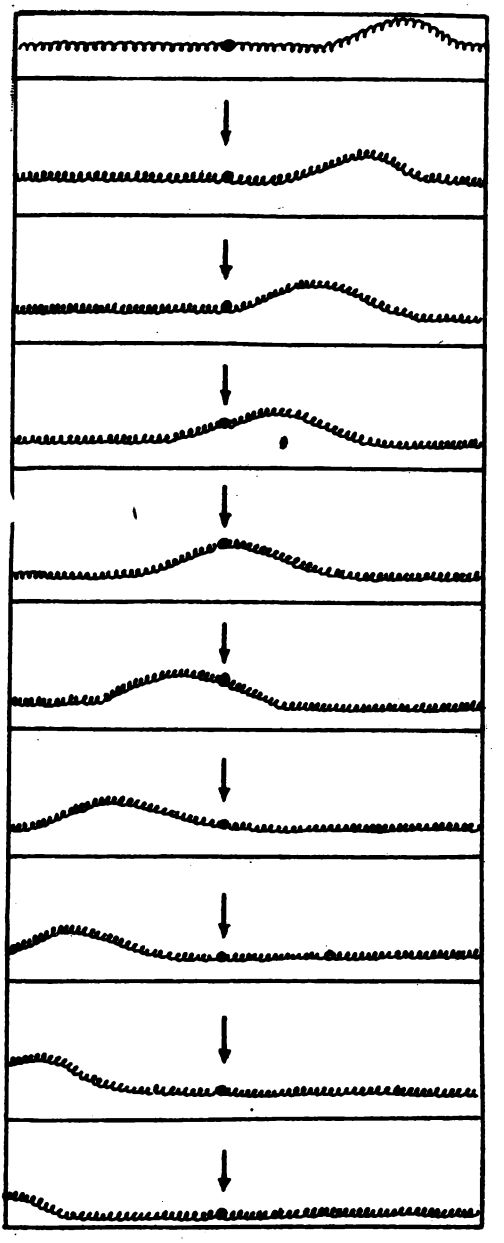
1°) L'extrémité A d'une longue corde élastique est animée d'un mouvement vibratoire dont l'équation en fonction du temps est : $x = 4 \sin 20\Pi.t$

où x est exprimé en cm et t en secondes.

Déterminer l'amplitude, la fréquence et la période du mouvement de A.

2°) Le mouvement vibratoire se propage le long de la corde avec une vitesse de 2,50 m/s. Déterminer la longueur d'onde de mouvement vibratoire. Quelle est l'équation du mouvement d'un point M situé à 62,5 cm de l'extrémité A ?

3°) Calculer en degrés la différence des phases correspondant à deux points, M et M', séparés par une distance de 40 cm.



4/ La figure ci-dessus est la reproduction d'une photographie du livre américain "La Physique". Elle représente la propagation d'un ébranlement de la droite vers la gauche le long d'un long ressort ayant un petit ruban attaché en son milieu.

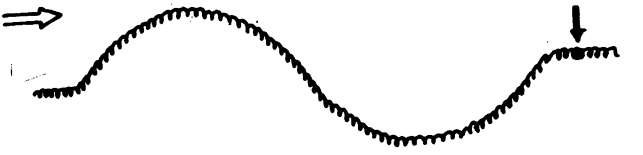
On constate que le ruban se déplace vers le haut puis

vers le bas lors du passage de l'ébranlement, mais qu'il ne se déplace pas dans la direction de propagation de l'ébranlement.

a/ La longueur de ressort représentée est 2 mètres. La fréquence des photographies est 24 images par seconde. Quelle est la vitesse de propagation de l'ébranlement ?

b/ Tracer la courbe représentant le déplacement du ruban en fonction du temps. Porter le déplacement verticalement et le temps horizontalement, avec des intervalles de temps de $\frac{1}{24}$ de seconde.

c/ Représenter le mouvement d'un point du ressort dans le cas de l'ébranlement figuré ci-dessous :



5/

1°) Une corde élastique sans raideur est placée verticalement. L'extrémité supérieure A est reliée à un vibreur qui lui impose un mouvement entretenu, sinusoïdal, transversal, de fréquence N = 100 hertz et d'amplitude a = 2mm. L'extrémité inférieure est tendue par un poids et immergée afin d'éviter la réflexion des ondes qui arrivent à cette extrémité.

La vitesse de propagation des ondes le long de la corde est 20 mètres par seconde. Ecrire l'équation du mouvement de l'extrémité A de la corde et celle du mouvement d'un point C situé sur la corde à 15 cm de A. On comptera les élongations sur l'axe Oy portant la trajectoire du point A. L'origine des élongations sur cet axe est la position du point A lorsque le vibreur n'est pas excité. On prendra comme origine des temps l'instant où l'élongation du point A est nulle et croissante.

2°) Calculer les élongations des points A et C aux instants t_1 = 0,1000 s, t_2 = 0,1015 s, et t_3 = 0,1025 s. Dessiner l'aspect de la corde à partir du point A et sur une distance égale à une longueur d'onde aux trois instants précédents.

3°) On examine la corde à la lumière d'un stroboscope dont la fréquence des éclairs est 100 hertz. Décrire l'as-

pect de la corde.

On amène la fréquence du stroboscope à 99 hertz. Dans ces conditions, quelle est la vitesse apparente de la propagation d'un point d'élongation nulle ?

(Baccalauréat, partiel).

Chapitre 18

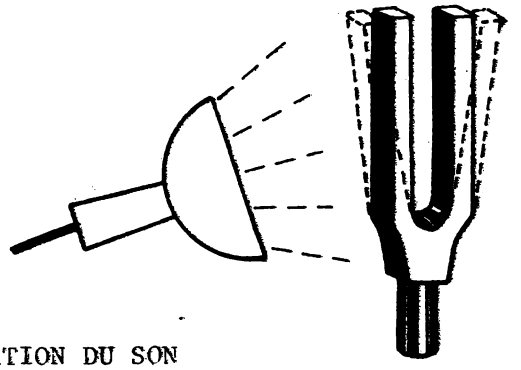
LA NATURE VIBRATOIRE DU SON

I - PRODUCTION DU SON

On sait depuis l'antiquité que le son est produit par la mise en vibration rapide d'un corps matériel.
Par exemple :

- vibration d'une corde ;
- vibration de la membrane d'un haut-parleur ;
- vibration d'un diapason, etc.

On peut, par exemple, observer en lumière stroboscopique les mouvements vibratoires des branches d'un diapason en même temps que l'on entend le son produit par ces vibrations.



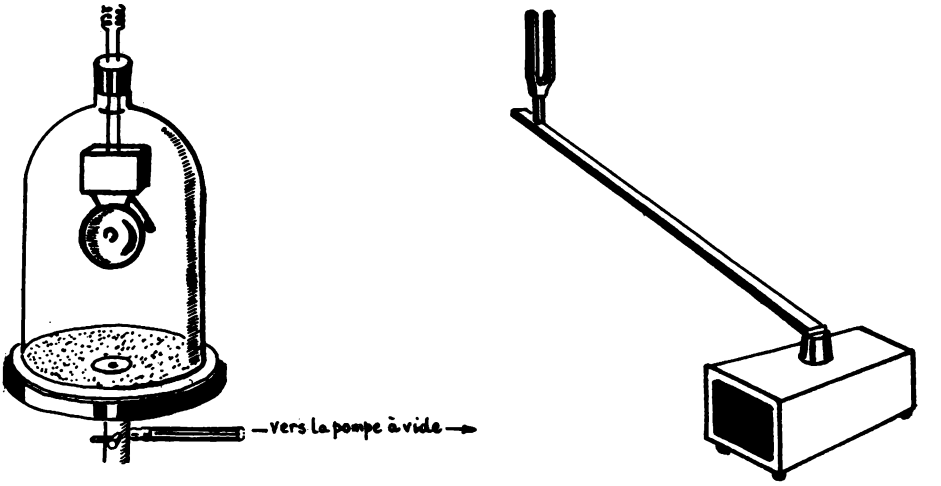
II - LA PROPAGATION DU SON

1°) La nécessité d'un support matériel

Dans l'expérience schématisée ci-dessous (figure de gauche), le son est produit par une sonnette électrique placée dans une cloche à vide. Il s'affaiblit au fur et à mesure que l'on établit un vide plus poussé dans la cloche de verre. Par conséquent, le son se propage mal dans l'air raréfié et, à la limite, il cesse de se propager dans le vide.

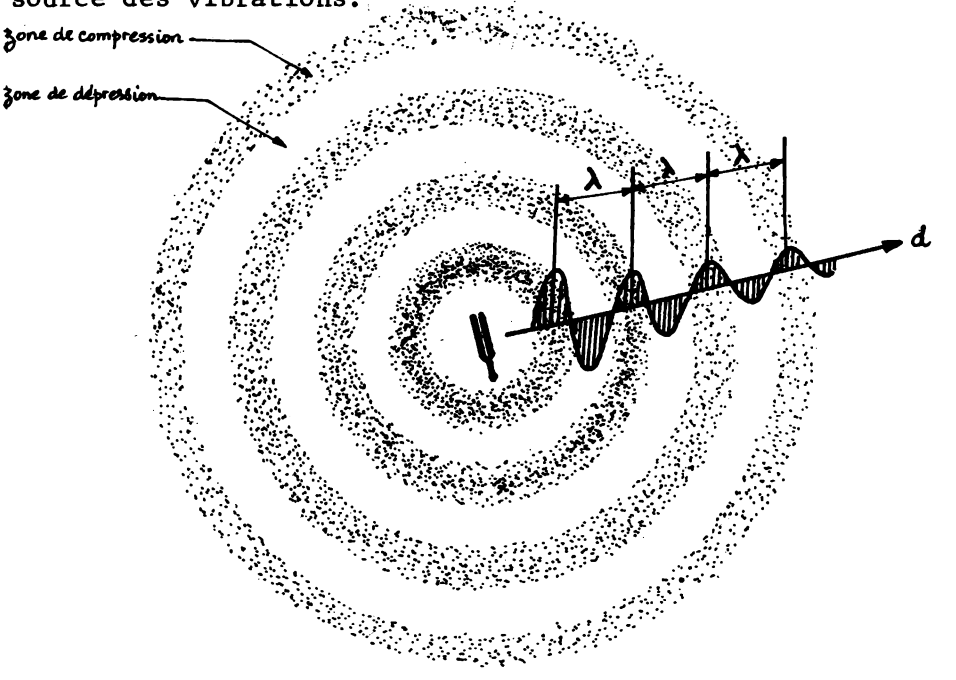
Il y a donc nécessité absolue d'un support matériel pour la propagation du son. Ce support peut être :

- un gaz quelconque et en particulier l'air ;
- un liquide ;
- un solide : la figure de droite montre la propagation du son d'un diapason jusqu'à sa caisse de résonance par l'intermédiaire d'une longue règle en bois.



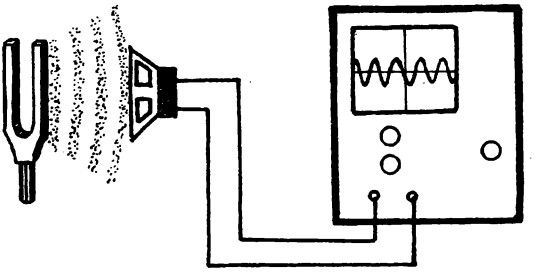
2°) Propagation par ondes longitudinales

Dans l'air, les vibrations sonores se propagent de molécules à molécules sous forme d'ébranlements longitudinaux qui sont des successions de zones de compressions et de zones de dépressions sphériques, centrées sur la source des vibrations.



Propagation des zones de compressions et dépressions sphériques.

Ces variations périodiques de pression peuvent être étudiées à l'aide d'un oscilloscope cathodique : elles font vibrer la membrane du microphone, ce qui crée des oscillations électriques de même fréquence que l'oscilloscope analyse.



3°) La vitesse des ondes sonores

La vitesse des ondes sonores dépend des propriétés élastiques de la matière. Elle est en général d'autant plus grande que le milieu est plus rigide; à titre d'exemple, voici quelques valeurs de la vitesse du son dans divers matériaux :

- Acier 5 200 m/s
- Eau 1 430 m/s
- Hydrogène 1 300 m/s
- Air 330,7 m/s

} ⟶ (à 0°C et sous une atmosphère).

a/ Mesure de la célérité du son dans l'air

Les premières déterminations de la vitesse du son dans l'air ont été faites dès 1738 entre l'Observatoire de Paris et une colline située à une trentaine de kilomètres par la mesure du temps s'écoulant entre la lueur d'un coup de canon et l'arrivée du son correspondant.

Des méthodes plus récentes d'enregistrement électrique donnent pour l'air sec à 0°C et sous la pression atmosphérique normale :

$$v = 330{,}75 \text{ m/s} \pm 0{,}10 \text{ m/s}$$

b/ La formule de Laplace

Dans un gaz quelconque, la célérité du son est donnée par une formule établie par le physicien et astronome Laplace (1749 - 1827) :

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P_o \ T}{a_o \ d \ T_o}}$$

v : célérité du son en m/s

P_o : pression atmosphérique normale : $P_o = 10^5 N/m^2$

a_o : masse volumique de l'air dans les conditions normales :

$$a_o = 1{,}29 \text{ kg/m}^3$$

d : densité du gaz par rapport à l'air

T_o : 273 kelvins (K)

T : température absolue du gaz exprimée en kelvins.

γ est une constante qui dépend de l'atomicité du gaz, c'est-à-dire du nombre d'atomes qui constituent sa molécule :

- pour les gaz monoatomiques (gaz rares) $\gamma = 1{,}67$
- pour les gaz diatomiques (H_2 , O_2 ... air) $\gamma = 1{,}40$
- pour les gaz triatomiques (CO_2 ...) $\gamma = 1{,}33$

4°) Les fréquences des sons audibles

Tous les sons émis par les corps en vibration ne sont pas perçus par l'oreille humaine. Un son n'est audible que si sa fréquence est située à l'intérieur de la plage :

16 Hz	< N <	16 000 Hz
sons très graves		sons très aigus

Ces limites correspondent à une moyenne établie sur l'ensemble des tranchés d'âge de la population, mais la sensibilité de l'oreille diminue avec le temps. L'oreille d'un très jeune enfant réagit bien souvent au delà de 20 000 Hz alors qu'un adulte de plus de quarante ans peut ne pas déceler les fréquences supérieures à 12 000 Hz.

Les vibrations acoustiques de fréquences inférieures à 16 Hz sont des infra-sons; celles de fréquences supérieures à 20 000 Hz sont des ultra-sons.

Chapitre 18

EXERCICES

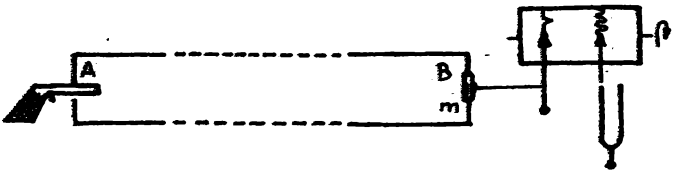
1/ Calculer, en utilisant la formule de Laplace, la vitesse du son dans l'air à 20°C, sous la pression atmosphérique normale. En déduire les vitesses du son dans l'hydrogène et dans l'oxygène dans les mêmes conditions de pression et de température.

2/ On appelle nombre de Mach pour un avion le rapport de sa vitesse à la vitesse du son. Par exemple, un avion dont la vitesse est 1,2 fois la vitesse du son vole à Mach 1,2.

Exprimer en nombre de Mach la vitesse d'un avion dont la vitesse est 2 100 km/h dans les conditions suivantes : température de l'air : - 40°C, pression atmosphérique : 400 mm de mercure. On rappelle que 1 atmosphère est une pression égale à 760 mm de mercure.

3/ Un diapason vibre à la fréquence de 440 Hz. Calculer la longueur d'onde de l'onde sonore dans l'air à 20°C sous la pression atmosphérique normale. Quelle est la variation relative de la longueur d'onde si la température augmente de 3°C ?

4/ Mesure de la célérité du son par la méthode de Regnault



Un long tuyau rectiligne est rempli d'air sec à 15°C sous la pression atmosphérique normale. On fait détonner un pistolet à son extrémité A. L'onde sonore se propage vers l'extrémité B où son arrivée est enregistrée mécaniquement à l'aide d'un stylet sur un cylindre tournant. L'onde se réfléchit en B, se propage vers A où elle se réfléchit à nouveau, de sorte qu'on peut enregistrer plusieurs ébranlements successifs sur le cylindre lorsqu'un seul coup de feu est tiré.

L'arrivée de la quatrième onde se fait 52,880s après celle de la première. Pour repérer le temps avec préci-

sion, on inscrit sur la bande enregistreuse les oscillations d'un pendule entretenu battant la seconde et celles d'un diapason entretenu dont la fréquence est 100 hertz et dont on peut enregistrer le 1/4 de période.

1°) Sachant que la longueur du tuyau est
L = 3,000 km ± 30m, calculer la vitesse de propagation du son dans l'air à 15°C sous la pression normale et indiquer la précision du résultat.

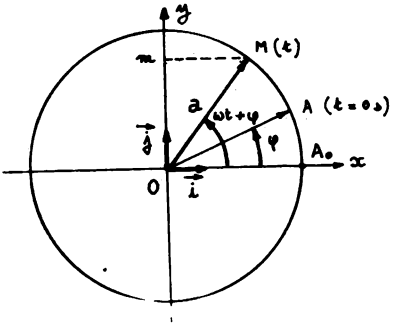
2°) Etablir la relation donnant, au voisinage de 0°C, la variation de vitesse ΔV correspondant à une variation de température Δt. Comparer la valeur fournie par cette formule pour t = 20°C à celle que donne un calcul plus précis.

Chapitre 19

REPRESENTATION VECTORIELLE D'UNE FONCTION SINUSOIDALE
COMPOSITION DE DEUX MOUVEMENTS VIBRATOIRES

I - REPRESENTATION VECTORIELLE D'UNE FONCTION SINUSOIDALE

1°) Projection d'un vecteur tournant



Soit $\vec{OM}$, un vecteur de module a, tournant autour du point O avec la vitesse angulaire ω . Son élongation angulaire initiale est φ . A l'instant t quelconque, son élongation angulaire est :

$$(\vec{OA}_0 , \vec{OM}) = \omega t + \varphi$$

La valeur algébrique de sa projection sur l'axe Oy est à cet instant :

$$y = \overline{Om} = a \sin(\omega t + \varphi)$$

Conclusion

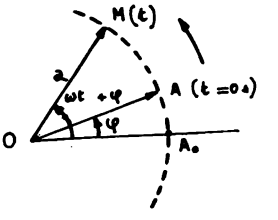
La projection du vecteur tournant de module a, de vitesse angulaire ω et d'élongation angulaire initiale φ est une fonction sinusoïdale d'amplitude a, de pulsation ω et de phase initiale φ .

2°) Réciproque

A la fonction sinusoïdale $y = a \sin(\omega t + \varphi)$, on peut associer un vecteur tournant de module a, de vitesse angulaire ω , d'élongation angulaire initiale φ :

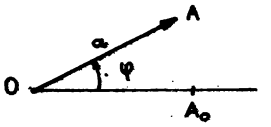
à $y = a \sin(\omega t + \varphi)$

on associe le vecteur tournant :

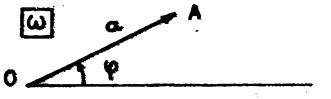


3°) Le vecteur de Fresnel

Nous avons représenté la fonction $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ par un vecteur tournant. A l'instant t = 0 s, ce vecteur occupe une position particulière :

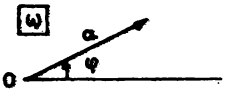


La figure ci-dessus nous donne 2 facteurs de la fonction : son amplitude a et sa phase initiale φ. Si l'on complète la figure en inscrivant la vitesse angulaire du vecteur tournant, on possède les 3 facteurs qui permettent de reconstituer la fonction sinusoïdale : son amplitude a, sa phase initiale φ et sa pulsation ω :



Le vecteur tournant "figé" à l'instant t = 0s est le vecteur de Fresnel de la fonction sinusoïdale.

En résumé :



représente la fonction

$y = a \sin(\omega t + \varphi)$

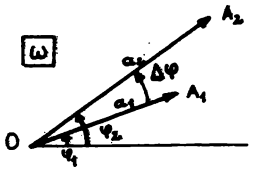
4°) Différence de phase entre deux fonctions sinusoïdales de même pulsation

Soient deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω et de phases initiales respectives φ_1 et φ_2 :

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

On peut représenter sur un même graphique les vecteurs de Fresnel de fonctions sinusoïdales de même pulsation :



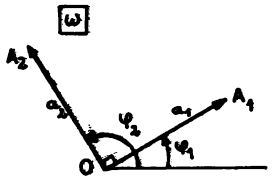
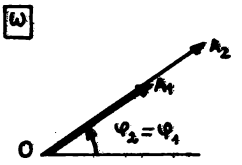
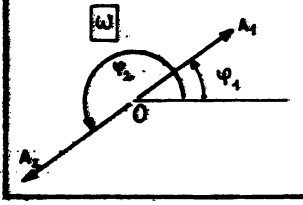
La différence de phase ou déphasage entre les deux fonctions est :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Si $\varphi_2 > \varphi_1$: y_2 est en avance de phase sur y_1 .

Si $\varphi_2 < \varphi_1$: y_2 est en retard de phase sur y_1 .

On peut envisager les cas particuliers suivants :

	$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\Pi}{2} + k\Pi$ ou $(2k+1)\frac{\Pi}{2}$: les fonctions sont en quadrature de phase.
	$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\Pi$: les fonctions sont en phase.
	$\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\Pi$: les fonctions sont en opposition de phase.

Exercice

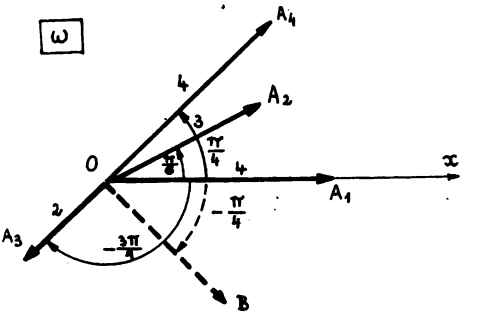
1°) Représenter sur le même graphique les vecteurs de Fresnel des mouvements dont voici les équations :

$y_1 = 4 \sin \omega t$; $y_2 = 3 \sin(\omega t + \frac{\Pi}{6})$;

$y_3 = 2 \sin(\omega t - \frac{3\Pi}{4})$; $y_4 = 4 \sin(\omega t + \frac{\Pi}{4})$

2°) Représenter le mouvement d'amplitude 3, de pulsation ω en retard de phase de $\frac{\Pi}{2}$ sur y_4 . Quelle est l'équation de ce mouvement.

Réponse



Toutes ces fonctions ayant même pulsation peuvent être représentées sur le même graphique.

Une unité de longueur étant choisie, on trace les vecteurs suivants :

- $\vec{OA}_1$ qui représente la fonction y_1
- $\vec{OA}_2$ qui représente la fonction y_2
- $\vec{OA}_3$ qui représente la fonction y_3
- $\vec{OA}_4$ qui représente la fonction y_4

On remarquera que les vecteurs $\overrightarrow{OA_3}$ et $\overrightarrow{OA_4}$ ont des sens contraires et qu'ils représentent des fonctions en opposition de phase.

Le vecteur $\vec{OB}$ est en retard de $\frac{\Pi}{2}$ sur $\vec{OA}_4$. Son élongation angulaire est :

$$(\vec{Ox}, \vec{OB}) = (\vec{Ox}, \vec{OA}_4) + (\vec{OA}_4 , \vec{OB}) = + \frac{\Pi}{4} - \frac{\Pi}{2} = - \frac{\Pi}{4}$$

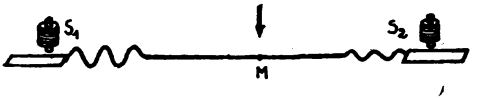
Il représente donc le mouvement d'équation :

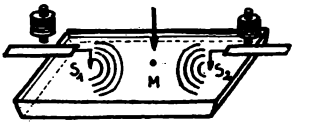
$$y = 3 \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

II - SUPERPOSITION DE DEUX EBRANLEMENTS DE MEME DIRECTION

1°) Problème

Deux sources S_1 et S_2 d'un même milieu élastique (corde, surface de l'eau ...) donnent naissance à deux ondes progressives. M étant un point quelconque du milieu où les deux ondes se rencontrent, comment ce point vibre-t-il ?



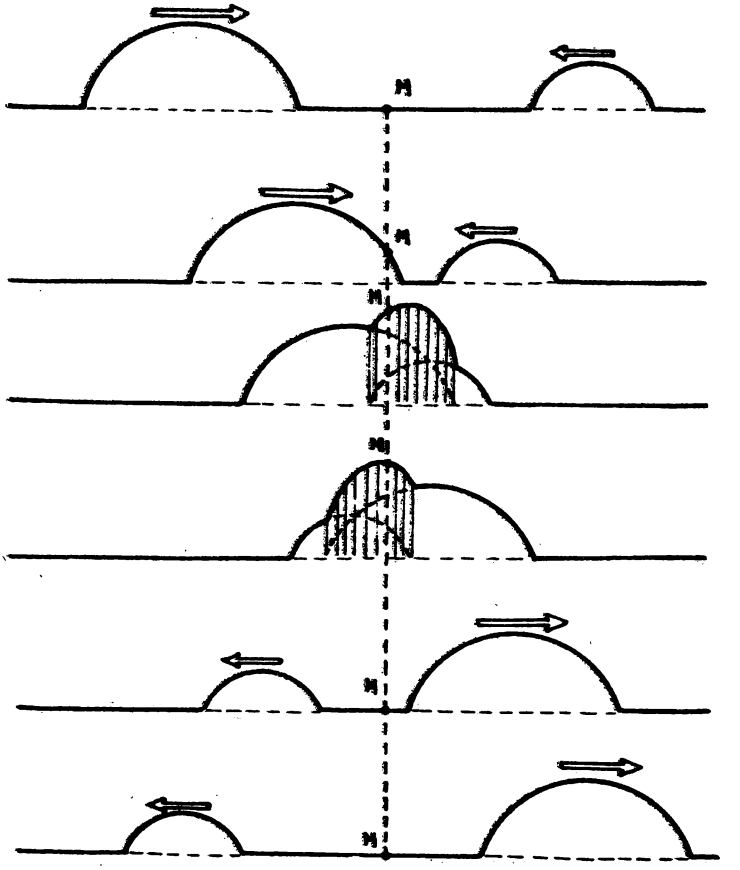


2°) PRINCIPE DE SUPERPOSITION (EBRANLEMENTS DE MEME DIRECTION)

Soit y_1 l'élongation du point M lorsqu'il reçoit seulement l'ébranlement issu de la source S_1 et y_2 son élongation lorsqu'il reçoit seulement l'ébranlement issu de la source S_2 . Si ces ébranlements sont petits (par rapport à la profondeur de la cuve à eau, par exemple), l'élongation du point M lorsqu'il reçoit les deux ébranlements à la fois obéit au principe de superposition :

> Si les élongations partielles d'un point M d'un milieu élastique dues à deux ébranlements passant séparément sont y_1 et y_2 , l'élongation du point M lorsque les deux ébranlements se superposent est la somme algébrique des élongations partielles, pourvu qu'elles soient petites :
>
> $$y = y_1 + y_2$$

Exemple : superposition de deux ébranlements sur une corde :



III-SOMME DE DEUX FONCTIONS SINUSOIDALES DE MEME PULSATION

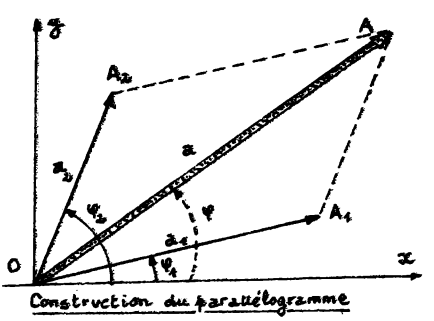
1°) Problème

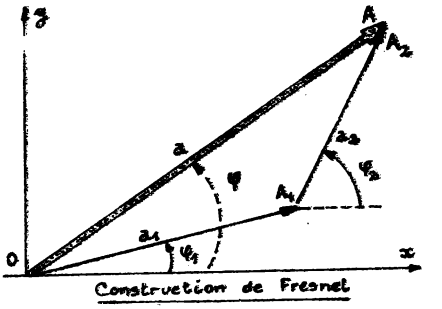
On veut additionner les deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω :

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Pour cela, on additionne leurs vecteurs de Fresnel :





$\vec{OA_1}$ et $\vec{OA_2}$ étant les vecteurs représentatifs des fonctions y_1 et y_2 , on obtient le vecteur $\vec{OA}$, représentatif de la fonction

$$y = y_1 + y_2$$

par construction du parallélogramme des vecteurs $\vec{OA_1}$ et $\vec{OA_2}$:

$$\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2}$$

La méthode pratique est la construction de Fresnel : à l'extrémité A_1 de $\vec{OA_1}$, on représente le vecteur $\vec{A_1A_2}$ de module a_2 , faisant l'angle φ_2 avec la direction horizontale. Cette méthode est utilisable pour un nombre quelconque de vecteurs.

2°) La pulsation de la fonction somme

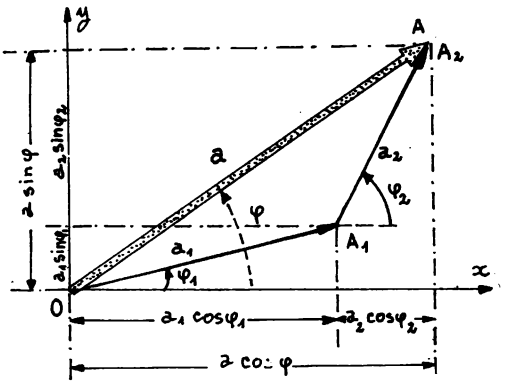
Le quadrilatère OA_1AA_2 est indéformable au cours du temps, car les vecteurs $\vec{OA_1}$ et $\vec{OA_2}$ ont même vitesse angulaire ω . Le vecteur somme $\vec{OA}$ a donc la même vitesse angulaire ω que ses composantes :
il représente une fonction sinusoïdale de pulsation ω .

Conclusion

La somme de deux fonctions sinusoïdales y_1 et y_2 de même pulsation ω est une fonction sinusoïdale $y = y_1 + y_2$ de même pulsation que y_1 et y_2 .

3°) L'amplitude de la fonction somme

Sur un axe quelconque, la projection du vecteur somme est égale à la somme des projections. En particulier :



Sur Ox :

$$\overrightarrow{\text{Proj}_{ox}\ \overrightarrow{OA}} = \overrightarrow{\text{Proj}_{ox}\ \overrightarrow{OA_1}} + \overrightarrow{\text{Proj}_{ox}\ \overrightarrow{A_1A_2}}$$

$$a\cos\varphi = a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2 \quad (1)$$

Sur Oy :

$$\overrightarrow{\text{Proj}_{oy}\ \overrightarrow{OA}} = \overrightarrow{\text{Proj}_{oy}\ \overrightarrow{OA_1}} + \overrightarrow{\text{Proj}_{oy}\ \overrightarrow{A_1A_2}}$$

$$a\sin\varphi = a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2 \quad (2)$$

Elevons au carré les relations (1) et (2) et additionnons les. On obtient :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_1a_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

L'amplitude de la fonction somme est donc :

$$\boxed{a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_1a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} \quad (3)$$

4°) La phase initiale de la fonction somme

Elle est numériquement égale à l'angle φ de la construction de Fresnel, donné par sa tangente :

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{a\sin\varphi}{a\cos\varphi} \qquad \boxed{\text{tg}\,\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}} \quad (4)$$

La fonction somme est donc la fonction sinusoïdale du temps :

$$y = a \sin(\omega t + \varphi)$$

où a est donné par la relation (3) et φ par la relation (4).

5°) Application à quelques cas particuliers

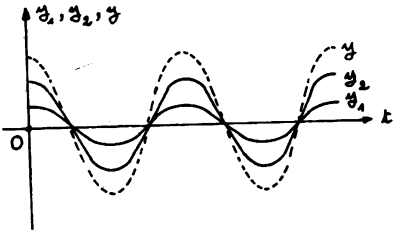
Représenter sur un même graphique les fonctions sinusoïdales du temps :

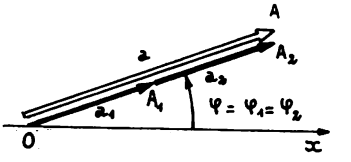
$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

et leur somme $y = y_1 + y_2$. A l'aide de la construction de Fresnel, donner l'amplitude de la fonction somme.

a/ Fonctions en phase : $\varphi_2 = \varphi_1$



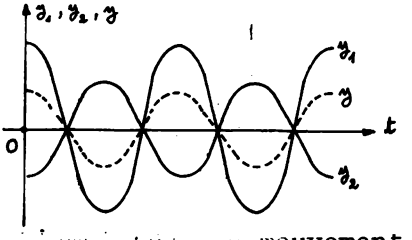


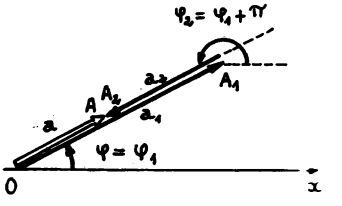
L'amplitude du mouvement résultant est égale à la somme des amplitudes :

$$\boxed{a = a_1 + a_2}$$

Le mouvement résultant est en phase avec les mouvements composants : $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$

b/ Fonctions en opposition de phase : $\varphi_2 = \varphi_1 + \Pi$



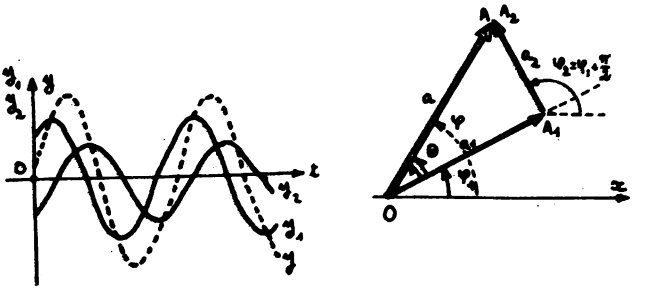


L'amplitude du mouvement résultant est égale à la différence des amplitudes. Ici :

$$\boxed{a = a_1 - a_2}$$

Le mouvement résultant est en phase avec le mouvement de plus grande amplitude. Ici : $\varphi = \varphi_1$

c/ Fonctions en quadrature de phase : $\varphi_2 = \varphi_1 + \Pi/2$



L'amplitude du mouvement résultant est a tel que :

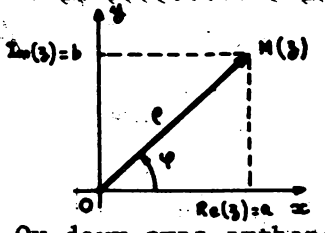
$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La différence de phase entre le mouvement résultant et celui d'amplitude a est Θ tel que :

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{a_2}{a_1}$$

IV- UTILISATION DES NOTATIONS COMPLEXES

1°) Quelques rappels concernant les nombres complexes



Soient Ox et Oy deux axes orthonormés. Ils définissent le "plan complexe". Un point M de ce plan a pour coordonnées a et b. M est l'image du nombre complexe z noté :

$$z = a + jb \qquad a \in \mathbb{R} \ , \quad b \in \mathbb{R}$$

a est la partie réelle de z : $a = \mathrm{Re}(z)$
b est sa partie imaginaire : $b = \mathrm{Im}(z)$.

j est le nombre complexe vérifiant $j^2 = -1$

Remarque : En physique ce nombre est noté j et non i pour éviter de le confondre avec l'intensité instantanée i des courants électriques variables.

a/ Forme trigonométrique

Les coordonnées polaires du point M sont ρ et φ .

- $OM = \rho$ ($\rho \in \mathbb{R}$) est le module de z. On a :

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2}$$

- φ est l'argument de z. On a :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{Im(z)}{Re(z)}$$

D'après la figure ci-dessus : $a = \rho \cos\varphi$ et $b = \rho \sin\varphi$
Le nombre complexe z peut s'écrire :

$$z = a + jb = \rho (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

Compte tenu de la relation $\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}$,
z se note :

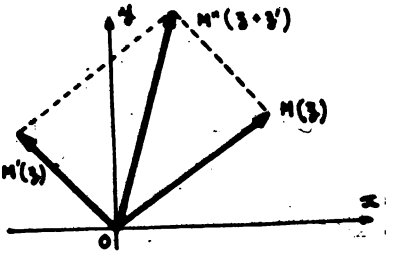
$$z = \rho e^{j\varphi}$$

b/ Somme de deux nombres complexes

Soient $z = a + jb$ et $z' = a' + jb'$ deux nombres complexes. La somme de ces nombres complexes est le nombre complexe z" dont la partie réelle est la somme des parties réelles de z et z' et la partie imaginaire, la somme des parties imaginaires des deux nombres :

$z'' = z + z' = (a + a') + j(b + b')$.

Cherchons l'image de $z'' = z + z'$ dans le plan complexe



D'après la définition de la somme donnée plus haut, le point M", image de $z + z''$ a pour coordonnées $a + a'$ et $b + b'$.

On en déduit :

$\vec{OM}'' = \vec{OM} + \vec{OM}'$

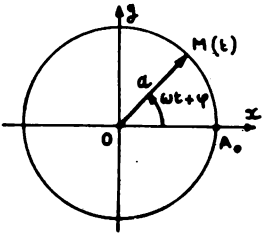
et la propriété :

L'image de $z + z'$ est le point M" tel que $\vec{OM}'' = \vec{OM} + \vec{OM}'$, M étant l'image de z et M' celle de z'.

2°) Représentation complexe d'une grandeur périodique sinusoïdale

a/ Nombre complexe associé à un vecteur tournant

A la fonction sinusoïdale $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ nous pouvons associer le vecteur tournant $\vec{OM}$, dont les composantes sont :



- suivant Ox : $a \cos(\omega t + \varphi)$
- suivant Oy : $a \sin(\omega t + \varphi)$

L'extrémité M de ce vecteur est donc l'image du nombre complexe z :

- de partie réelle : $Re(z) = a \cos(\omega t + \varphi)$
- de partie imaginaire : $Im(z) = a \sin(\omega t + \varphi)$

z s'écrit : $z = a [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$

ou encore : $\boxed{z = a\ e^{j(\omega t + \varphi)}}$

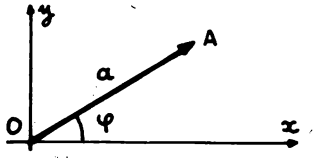
Au vecteur tournant $\vec{OM}$, correspond le nombre complexe z de module a et d'argument $\omega t + \varphi$.

Compte tenu des propriétés de l'exponentielle, on peut aussi écrire ce nombre sous la forme :

$$z = a\ e^{j\varphi} \times e^{j\omega t}$$

b/ Nombre complexe associé au vecteur de Fresnel

Rappelons que le vecteur de Fresnel correspond à la position initiale (t = 0s) du vecteur tournant :



On peut lui associer le nombre complexe $\mathcal{A}$ de module a et d'argument φ .

$$\boxed{\mathcal{A} = a\ e^{j\varphi}}$$

c/ Du nombre complexe associé au vecteur de Fresnel à la fonction sinusoïdale y(t)

Montrons par quelle suite d'opérations on peut, à partir du nombre complexe $\mathcal{A} = a\, e^{j\varphi}$, reconstituer la fonction sinusoïdale $y = a \sin(\omega t + \varphi)$.

1- On multiplie le nombre complexe $\mathcal{A}$ par $e^{j\omega t}$

On obtient : $z = \mathcal{A} e^{j\omega t} = a\, e^{j\varphi}\ e^{j\omega t} = a\, e^{j(\omega t + \varphi)}$

2- On prend la partie imaginaire du nombre complexe obtenu. On trouve :

$$y = \text{Im}\left[\mathcal{A}\, e^{j\omega t}\right] = \text{Im}\left[a\, e^{j(\omega t + \varphi)}\right] = a \sin(\omega t + \varphi)$$

d/ Amplitude complexe

Le nombre complexe $\mathcal{A} = a\, e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe de la fonction sinusoïdale $y = a \sin(\omega t + \varphi)$.
On voit que, ω étant connu, l'amplitude complexe suffit à définir sans ambiguité la fonction y.

$\mathcal{A} = a\, e^{j\varphi}$ et ω connu $\Longrightarrow$ { l'amplitude de y est a ; sa phase initiale est l'argument φ de $\mathcal{A}$. } $\Longrightarrow$

$$y = a \sin(\omega t + \varphi)$$

Dans toute la suite de ce cours, on se contentera d'associer à la fonction sinusoïdale $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ son amplitude complexe :

$$\mathcal{A} = a\, e^{j\varphi} \quad \begin{cases} \text{Re}\,(\mathcal{A}) = a \cos\varphi \\ \text{Im}\,(\mathcal{A}) = a \sin\varphi \end{cases}$$

3°) Application : somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation

On veut additionner les fonctions sinusoïdales de même pulsation :

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \qquad y = y_1 + y_2$$

Pour cela on additionne leurs amplitudes complexes :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = a_1 e^{j\varphi_1} + a_2 e^{j\varphi_2}$$

La partie réelle de $\mathcal{A}$ est la somme des parties réelles de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$; la partie imaginaire de $\mathcal{A}$ est la somme des parties imaginaires :

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}) = a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2$$

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2$$

Le module de $\mathcal{A}$ est l'amplitude a de la fonction y :

$$a = |\mathcal{A}| = \sqrt{[\mathrm{Re}(\mathcal{A})]^2 + [\mathrm{Im}(\mathcal{A})]^2}$$

Le calcul a déjà été effectué au §(III, 3°). On retrouve la relation (3) :

$$\boxed{a = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (5)$$

La phase initiale de la fonction y est l'argument φ de $\mathcal{A}$ donné par :

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\mathrm{Im}(\mathcal{A})}{\mathrm{Re}(\mathcal{A})} = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}} \qquad (6)$$

On retrouve la relation (4) du §(III, 4°)

La fonction somme est donc la fonction sinusoïdale du temps :

$$y = a \sin(\omega t + \varphi)$$

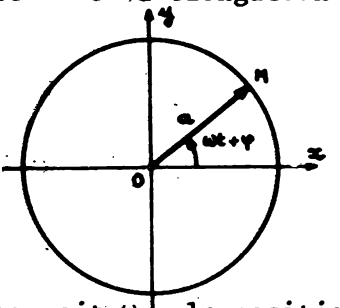
où a est donné par la relation (5) et φ par la relation (6).

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 19

I - REPRESENTATION VECTORIELLE D'UNE FONCTION SINUSOIDALE. NOTATION COMPLEXE

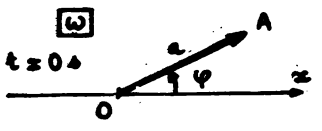
1°) Le vecteur de Fresnel

On peut associer à la fonction sinusoïdale du temps $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ le vecteur tournant de module a, de vitesse angulaire ω et d'élongation angulaire initiale φ.



Mais si on connait ω, la position initiale du vecteur tournant, appelée vecteur de Fresnel de la fonction sinusoïdale, suffit à définir sans ambiguité la fonction y(t).

Les opérations qui permettent de passer du vecteur de Fresnel à la fonction y(t) sont les suivantes :



1- Ajouter ωt à l'élongation angulaire du vecteur ; on obtient $\omega t + \varphi$.

2- Projeter le vecteur d'élongation angulaire $\omega t + \varphi$ sur l'axe Oy : on obtient la fonction $y = a \sin(\omega t + \varphi)$.

2°) L'amplitude complexe

On peut considérer la fonction $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ comme la partie imaginaire du nombre complexe :

$$z = a\left[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)\right] = a\, e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$z = a\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t} = \mathscr{A}\, e^{j\omega t}$$

Le nombre complexe $a.e^{j\varphi} = \mathscr{A}$ est l'amplitude complexe de la fonction $y = a \sin(\omega t + \varphi)$. Si on connaît ω, l'amplitude complexe suffit à définir sans ambiguité la fonction y(t). En effet :

- L'amplitude de la fonction y(t) est le module a de $\mathcal{A}$.

- Sa phase initiale φ est l'argument de $\mathcal{A}$.

Remarque :

Le nombre complexe $z = a\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}$ est l'image du vecteur tournant ;

L'amplitude complexe $\mathcal{A} = a^{j\varphi}$ est l'image du vecteur de Fresnel.

II- ADDITION DE DEUX FONCTIONS SINUSOIDALES DE MÊME PULSATION

1°) Principe de superposition

Deux mouvements vibratoires issus de deux sources peuvent se superposer en un point du milieu de propagation. Si les élongations partielles sont petites, l'élongation totale est la somme algébrique des élongations partielles :

$$y = y_1 + y_2$$

2°) Utilisation de la construction de Fersnel ou des amplitudes complexes

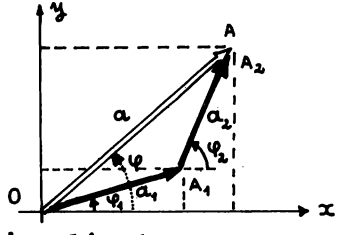
La somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω est une fonction sinusoïdale de pulsation ω .

$$y = y_1 + y_2 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) =$$

$$= a \sin(\omega t + \varphi)$$

Le problème est de déterminer l'amplitude a et la phase initiale φ de la fonction y(t).

Vecteurs de Fresnel	Amplitudes complexes
On additionne les vecteurs de Fresnel	On additionne les amplitudes complexes



Calcul de l'amplitude :

Projetons la construction de Fresnel sur les axes Ox et Oy :

$$a\cos\varphi = a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2 \qquad (1)$$

$$a\sin\varphi = a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2 \qquad (2)$$

en élevant au carré ces relations et en les additionnant, on obtient a^2 d'où l'on déduit a :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Calcul de l'amplitude :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = a_1 e^{j\varphi_1} + a_2 e^{j\varphi_2} = a\, e^{j\varphi}$$

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}) = \mathrm{Re}(\mathcal{A}_1) + \mathrm{Re}(\mathcal{A}_2)$$

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}) = a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2 \qquad (1)$$

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{Im}(\mathcal{A}_1) + \mathrm{Im}(\mathcal{A}_2)$$

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2 \qquad (2)$$

$$a = |\mathcal{A}| = \sqrt{[\mathrm{Re}(\mathcal{A})]^2 + [\mathrm{Im}(\mathcal{A})]^2}$$

On est conduit au même calcul que celui de l'addition des vecteurs de Fersnel :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Vecteurs de Fresnel	Amplitudes complexes
Calcul de la phase initiale : La phase initiale de la fonction y(t) est donnée par la tangente : $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\sin\varphi}{a\cos\varphi} = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}$$	Calcul de la phase initiale : La phase initiale est égale à l'argument de l'amplitude complexe. Elle est donnée par la tangente : $$\operatorname{tg}\varphi = \text{Arg.}\mathcal{A} = \frac{\text{Im}(\mathcal{A})}{\text{RE}(\mathcal{A})}$$ $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}$$

Chapitre 19

E X E R C I C E S

1/ Etablir l'équation du mouvement résultant de la superposition des deux mouvements sinusoïdaux d'équations :

$y_1 = 10 \sin(100 \pi t)$ et $y_2 = 20 \cos(100 \pi t)$

2/ Même question pour les mouvements sinusoïdaux d'équations :

$y_1 = 20 \sin(100 \pi t)$ et $y_2 = -30 \sin(100 \pi t)$.

3/ Déterminer par la construction de Fresnel puis par la méthode des amplitudes complexes les expressions de l'amplitude et de la phase initiale de la fonction y(t), somme des trois fonctions y_1 , y_2 , et y_3 :

$y = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + a_3 \sin(\omega t + \varphi_3)$

4/ Additionner :

$$y = 3 \sin \omega t + 4 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}) + 2 \sin(\omega t + \frac{7\pi}{6})$$

1°) On effectuera la construction de Fersnel sur papier millimétré à l'échelle de 4 cm pour une unité de module des vecteurs. On lira directement sur le graphique :

a- Le module a du vecteur somme ;

b- L'angle $\varphi = (\vec{Ox} , \vec{OA})$

2°) Vérifier les résultats obtenus en utilisant les expressions théoriques établies à l'exercice 3.

3°) Exprimer la fonction somme sous la forme $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ où φ sera compté en degrés.

5/ On considère deux sources synchrones A et B, de même amplitude a, de même fréquence N = 85 Hz, distantes de d.

1°) Si on admet pour date zéro un instant où les deux sources passent par leur position d'équilibre, quelle est leur élongation y_o à la date t ?

2°) Quelle est la longueur d'onde, si la vitesse de propagation est de 340 m/s?

3) Quelles sont, à la date t, les élongations des deux mouvements qui arrivent en un point M situé sur la droite BA, à 100 m de A?

4°) Déterminer, en utilisant la construction de Fresnel, le mouvement qui en résulte pour M dans les 3 cas suivants:

a) d = 4m;

b) d = 2m;

c) d = 1m.

(BACCALAUREAT).

Chapitre 20

LES ONDES STATIONNAIRES

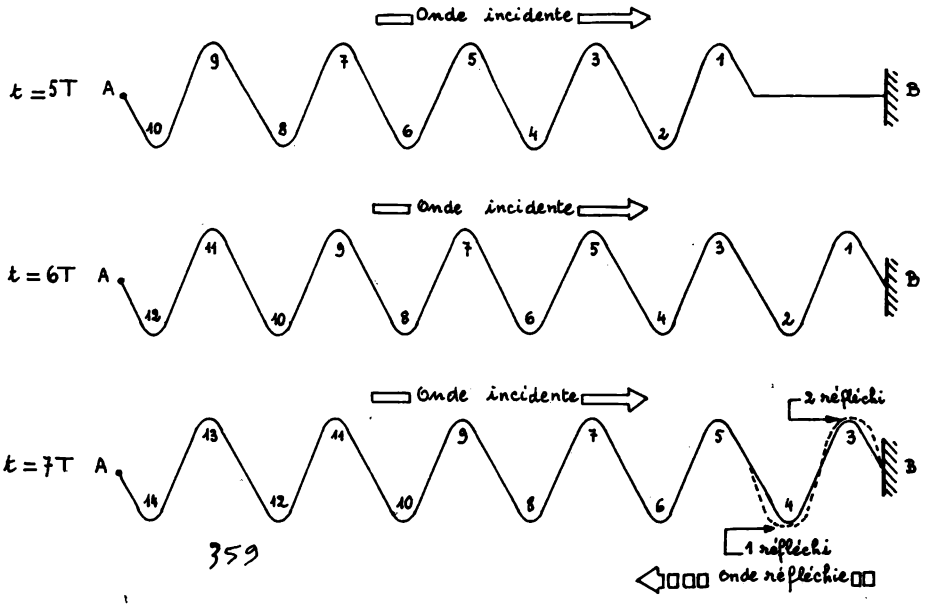
I - ETUDE DES ONDES STATIONNAIRES TRANSVERSALES.

1°) Onde incidente et onde réfléchie.

Rappelons que le long d'une corde AB dont l'extrémité B est fixe, une ébranlement se propage et se réfléchit au point B avec changement de signe de son élongation.

Si le point A de la corde est la source d'une onde progressive sinusoïdale, chaque ébranlement de l'onde se réfléchira sur l'obstacle fixe en changeant de signe. Autrement dit :

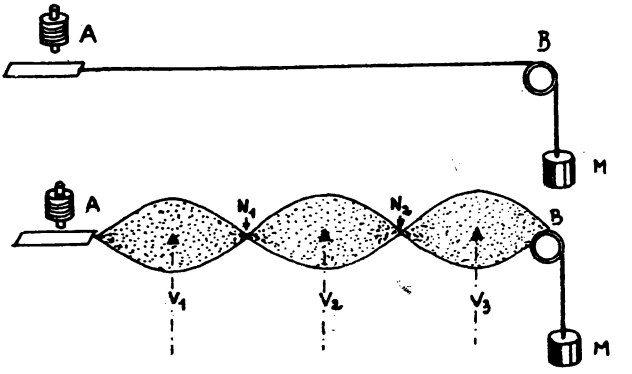
> Lorsqu'une onde incidente rencontre un obstacle fixe, elle donne naissance à une onde réléchie, telle que chaque ébranlement change de signe au moment de la réflexion



A 1'instant 7T, lorsque le 3ème ébranlement arrive sur l'obstacle B, le 2ème vient de se réfléchir. Il a changé de signe. Appelons le 2 réfléchi. Il a même signe que 3 qui arrive en B. Quand à l'abranlement 1 qui s'est réfléchi une demi-période avant, et que nous appelons 1 réfléchi, il se superpose à 4 qui se propage vers B.

2°) Onde stationnaire sur une corde: expérience de Melde.

a/ Le dispositif expérimental.

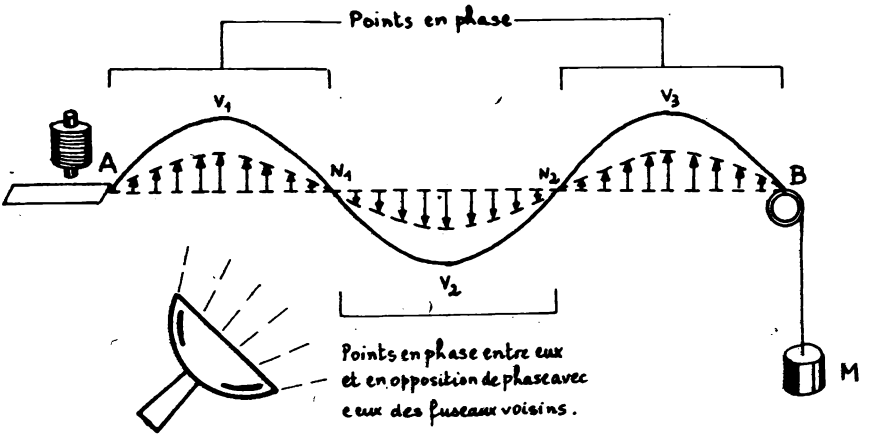


La corde est fixée au point A à une lame vibrante, source d'ébranlements sinusoïdaux. Au point B, elle passe sur la gorge d'une poulie et est tendue par le poids d'une masse M. Le point B est un obstacle fixe pour les ébranlements issus de A.

Pour un choix convenable de la masse M, c'est à dire pour une tension convenable de la corde, on observe un ou plusieurs fuseaux. Certains points de la corde sont toujours immobiles : ce sont les noeuds de vibration, tels que A, N_1 , N_2 , et B.

D'autres vibrent avec une amplitude maximale: ce sont les ventres de vibration, tels V_1 , V_2 et V_3 .

b/ Observation en lumière stroboscopique.



Si la fréquence du stroboscope est égale à celle du vibreur, la corde apparaît sous la forme d'une sinusoïde immobile. Si l'on modifie légèrement la fréquence du stroboscope, on observe une déformation sur place de la sinusoïde.

La figure représente trois aspects de la corde à des instants très voisins, pendant un quart de période : tous les points de la corde sont d'abord alignés ; puis tous les points compris entre A et N_1 et entre N_2 et B montent, alors que les points compris N_1 et N_2 descendent. Lorsque tous les points atteignent leur élongation maximale, ils effectuent les mouvements en sens contraire : la sinusoïde s'aplatit, la corde est à nouveau rectiligne. Il s'est alors écoulé une demi-période. Pendant la demi-période suivante, la corde a des déformations symétriques de celles qui viennent d'être décrites.

Au cours de ces déformations, un certains nombre de points sont restés immobiles: ce sont les noeuds de vibration: A, N_1 , N_2 et B. Les points V_1 , V_2 et V_3 ont eu les mouvements de plus grande amplitude: ce sont les ventres de vibration.

Cette déformation sur place de la corde avec noeuds et ventres de vibration est une onde stationnaire.

b/ Points en phase et points en opposition de phase.

Il résulte des observations qui précèdent que tous les points d'un même fuseau vibrent en phase alors que les points appartenant à des fuseaux consécutifs vibrent en opposition de phase.

Conclusion :

Deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation se propageant en sens inverses dans un même milieu donnent naissance à une onde stationnaire dans ce milieu.

Remarque :

Au cours de l'expérience de Melde, un ébranlement émis par la source se réfléchit une première fois au point B, une seconde fois en A, puis de nouveau en B et ainsi de suite. Dans ces conditions, l'onde stationnaire ne peut s'établir que si l'ébranlement qui se réfléchit en A après un aller-retour ABA, se superpose exactement à un ébranlement émis par la source. Cela impose à l'ébranlement d'effectuer son aller-retour avec une vitesse telle qu'il arrive au point A "au bon moment". L'onde stationnaire ne peut s'établir que pour certaines vites-

ses de propagation des ébranlements.

Nous savons que la vitesse des ébranlements est liée à la tension de la corde par la relation :

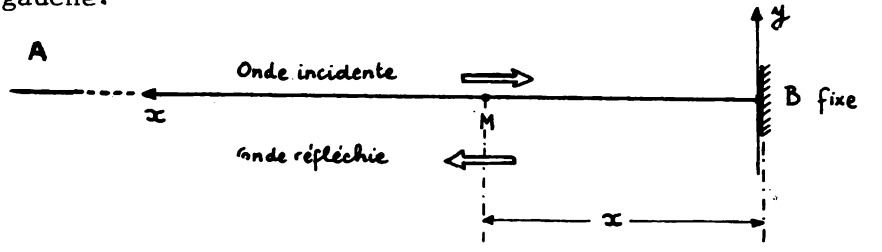
$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

où F est la tension de la corde et μ sa masse par unité de longueur. En d'autres termes, l'onde stationnaire ne peut s'établir que pour certaines valeurs de la tension de la corde. Lorsqu'elle est possible, c'est une onde stationnaire résultant de la superposition de plusieurs ondes progressives se propageant dans les deux sens.

II Etude théorique.

1°) Equation de l'onde stationnaire.

Nous ne tiendrons pas compte des réflexions multiples qui se produisent entre les extrémités A et B de la corde. Les calculs seront effectués dans le cas d'une onde incidente et d'une seule onde réfléchie. On peut pour cela imaginer que la source A des vibrations est rejetée à l'infini à gauche.



a/ Les vibrations du point B.

L'origine des abscisses est choisie au point B. L'origine des temps est choisie de telle sorte que l'équation du mouvement du point B dû à l'onde incidente soit :

$$y_{(i)B} = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Soit $y_{(r)B}$ l'élongation du point B due à l'onde réfléchie

Ecrivons que l'élongation du point B due aux deux ondes est la somme des élongations partielles (principe de superposition) et que de plus elle est nulle puisque le point B est fixe :

$$y_B = y_{(i)B} + y_{(r)B} = 0 \text{ car B est immobile.}$$

L'équation du mouvement de B dû à l'onde réfléchie est donc :

$$y_{(r)_B} = -y_{(i)_B} = -a \sin 2\Pi \frac{t}{T}$$

Le signe moins traduit bien le changement de signe au cours de la réflexion des ébranlements au point B.

En résumé :

$$y_{(i)_B} = a \sin 2\Pi \frac{t}{T}$$

$$y_{(r)_B} = -a \sin 2\Pi \frac{t}{T}$$

b/ Les vibrations d'un point M.

Considérons un point M quelconque d'abscisse x. L'onde incidente passe en M avant de passer en B. $y_{(i)_M}$ est donc en avance sur $y_{(i)_B}$ et nous écrivons :

$$y_{(i)_M} = a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

L'onde réféchie passe au point B avant de passer au point M; $y_{(r)_M}$ est donc en retard sur $y_{(r)_B}$ et nous écrivons :

$$y_{(r)} = -a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

D'après le principe de superposition, le mouvement résultant du point M est la somme des mouvements partiels

$$y_{(M)} = y_{(i)_M} + y_{(r)_M}$$

$$y_M = a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) - a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

C'est une somme dy type: $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p - q}{2} . \cos \frac{p + q}{2}$.

Le calcul conduit à :

$$y_M (x,t) = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} . \cos 2\Pi \frac{t}{T}$$

2°) L'interprétation de l'équation.

Cette fonction des deux variables séparées x et t, du type :

$$y\,(x,t) = f\,(x)\,.g\,(t)$$

est le produit d'une fonction sinusoïdale d'espace par une fonction sinusoïdale du temps. C'est l'équation d'une onde stationnaire.

a/ Forme de la corde à un instant donné.

Donnons à t une valeur telle que :

$$\cos 2\Pi \frac{t}{T} = K \quad \text{avec} \quad 0 < K \leqslant 1$$

On a alors: $y(x) = 2aK \sin 2\Pi \frac{x}{\lambda}$ =

$$A \sin 2\Pi \frac{x}{\lambda} \quad \text{avec} \quad 0 < A \leqslant 2a$$

C'est une fonction sinusoïdale de x seulement. A un instant donné, la corde a la forme d'une sinusoïde de période λ . On vérifie en effet que.

$$y\,(x + k\lambda) = y\,(x)$$

Points d'élongation nulle :

Ce sont ceux pour lesquels $\sin 2\Pi \frac{x}{\lambda} = 0 \Longleftrightarrow \frac{2\Pi x}{\lambda} = k\Pi$
Ils ont pour abscisse :

$$\boxed{x = k \frac{\lambda}{2}}$$

Lorsque k prend les valeurs 0, 1, 2, 3 etc., x, prend les valeurs

$$0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, 3\frac{\lambda}{2} \text{ etc.}$$

Points d'élongation extrême :

Ce sont ceux pour lesquels $2\Pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1 \Longleftrightarrow$

$$\frac{2\,\Pi\,x}{\lambda} = (2k + 1)\,\frac{\Pi}{2}$$

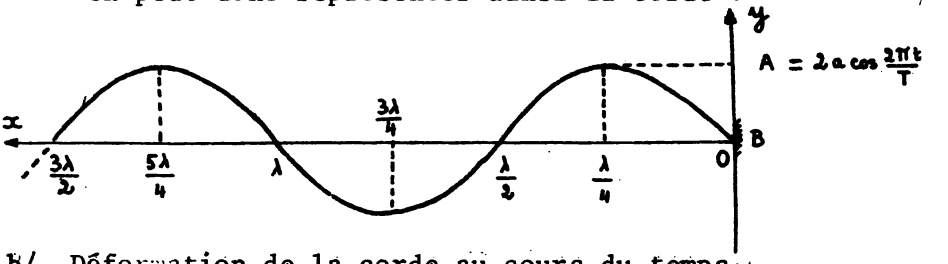
Ils ont pour abscisse :

$$x = (2k + 1)\frac{\lambda}{4}$$

Lorsque k prend les valeurs 0, 1, 2 etc., x prend les valeurs :

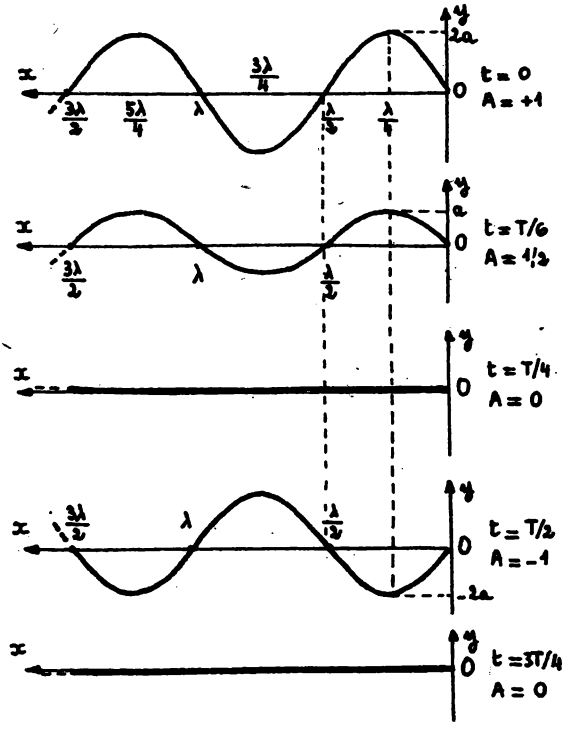
$$\frac{\lambda}{4}\ ,\quad 3\frac{\lambda}{4}\ ,\quad 5\ \frac{\lambda}{4}\quad \text{etc.}$$

On peut donc représenter ainsi la corde :



b/ Déformation de la corde au cours du temps.

Le facteur $A = 2a \cos 2\Pi \frac{t}{T}$ de l'équation d'onde stationnaire est une fonction sinusoïdale du temps de période T. Il prend toutes les valeurs comprises entre - 2a et 2a.



Soient t_1 , t_2 , t_3 etc. des valeurs de t pour lesquelles le facteur 2 a cos $2\Pi \frac{t}{T}$ prend les valeurs A_1 , A_2 , A_3 etc. On a alors :

$$y_1 (x) = A_1 \sin 2\Pi \frac{x}{\lambda}$$

$$y_2 (x) = A_2 \sin 2\Pi \frac{x}{\lambda}$$

$$y_3 (x) = A_3 \sin 2\Pi \frac{x}{\lambda} \text{ etc...}$$

Ces fonctions sinusoïdales de x s'annulent et ont leurs extrêmums pour les valeurs de x déterminées plus haut. La seule influence du facteur $2a\cos 2\Pi \frac{t}{T}$ est de modifier l'amplitude de la sinusoïde. La corde a donc la forme d'une sinusoïde qui se déforme sur place. (Fig ci-dessus).

Cela tient au fait que les variables x et t de l'équation d'onde stationnaire appartiennent à deux facteurs séparés :

$$y (x,t) = \underbrace{2a \cos 2\Pi \frac{t}{T}} \cdot \underbrace{\sin 2\Pi \frac{x}{\lambda}}$$

Le facteur $\sin 2\Pi \frac{x}{\lambda}$ correspond à la forme sinusoïdale de la corde, alors que le facteur $2a \cos 2\Pi \frac{t}{T}$ correspond aux variations sinusoïdales de l'élongation des points de la corde. Ainsi, un ventre de vibration oscille avec une élongation comprise entre -2a et +2a : l'amplitude de l'onde stationnaire est 2a.

c/ Noeuds et ventres de vibration.

Les noeuds de vibration sont les points toujours immobiles de la corde. Ils ont pour abscisse :

$$\boxed{x = k \frac{\lambda}{2}} \qquad k \in (0, 1, 2 \ldots)$$

Ils sont donc équidistants et la distance séparant deux noeuds consécutifs est égale à une demi-longueur d'onde.

Les ventres de vibration sont les points vibrant avec une amplitude maximale. Ils ont pour abscisse :

$$x = (2k + 1)\frac{\lambda}{4} \qquad k \in (0,1,2 \ldots)$$

Ils sont équidistants, et la distance séparant deux ventres consécutifs est égale à une demi-longueur d'onde.

La distance séparant un ventre des noeuds qui l'encadrent est égale au quart de la longueur d'onde.

d/ Points vibrant en phase et points vibrant en opposition de phase.

Tous les points compris entre deux noeuds consécutifs appartiennent au même fuseau. Ils ont à un instant quelconque des élongations de même signe et passent tous en même temps par leur position d'équilibre. Ils vibrent donc en phase.

Deux points quelconques appartenant à deux fuseaux consécutifs ont à un instant quelconque des élongations de signes contraires ; ils passent en même temps par leur position d'équilibre. Ils vibrent donc en opposition de phase.

En conclusion.

Deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude a et de même période, se propageant en sens contraires dans un même milieu, donnent naissance à une onde stationnaire sinusoïdale de même période et d'amplitude 2a.

3°) Expérience de Melde. Condition d'onde stationnaire.

L'onde stationnaire de l'expérience de Melde résulte de la superposition de plusieurs ondes en raison des réflexions multiples d'un même ébranlement sur les extrémités de la corde. Ces refléxions se poursuivent jusqu'a l'amortissement complet de l'ébranlement. Une première conséquence est que l'amplitude de l'onde est nettement supérieure à 2a (a étant l'amplitude de la source).

La seconde conséquence est la nécessité de choisir convenablement la tension de la corde qui agit directement sur la vitesse de propagation des ébranlements et

par suite sur la longueur d'onde ($\lambda = VT$).

Lorsque l'onde stationnaire s'établit, elle contient un nombre entier de fuseaux. Soit ℓ la longueur de la corde et $\lambda/2$ la longueur d'un fuseau. On doit avoir :

$$\ell = k \frac{\lambda}{2}$$

Considérons une corde de longueur ℓ, de masse linéique μ, excitée par un vibreur de fréquence N. Déterminons la tension F qui donne une onde stationnaire à k fuseaux.

Nous avons $\lambda = VT = \frac{V}{N}$ et $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$. Portons ces expressions dans la condition d'onde stationnaire. On obtient :

$$\ell = \frac{k}{2N} V = \frac{k}{2N} \times \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{d'où l'on déduit:}$$

$$F = \frac{4 N^2 \ell^2 \mu}{k^2}$$

Les valeurs de N, ℓ et μ sont imposées par le dispositif. Les fuseaux n'apparaissent que pour des valeurs discrètes de la tension. La tension est inversement proportionnelle au carré du nombre de fuseaux. On doit, par exemple, diviser la tension par quatre pour doubler le nombre de fuseaux.

4°) Utilisation de la construction de Fresnel.

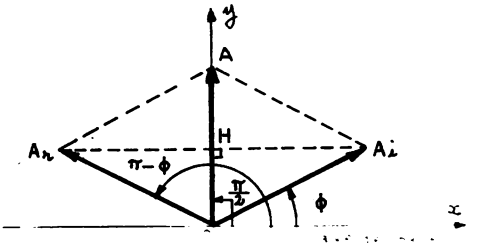
On peut établir l'équation d'onde stationnaire en utilisant la construction de Fresnel.

Les équations des mouvements d'un point M du milieu dûs à l'onde incidente et à l'onde réfléchie sont respectivement :

$$y_{(i)_M} = -2a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) = 2a \sin \left(2\Pi \frac{t}{T} + 2\Pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_{(r)_M} = -2a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = -2a \sin \left(2\Pi \frac{t}{T} - 2\Pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

Posons : $\frac{2\Pi}{T} = \omega$; $\frac{2\Pi x}{\lambda} = \Phi$. Et tenant compte de $-\sin\alpha = \sin(\alpha + \Pi)$ pour la seconde relation, nous avons à additionner les deux fonctions sinusoïdales de même pulsation :



$$y_{(x)_M} = 2a \sin (\omega t + \Phi)$$

$$y_{(r)_M} = 2a \sin (\omega t + [\Pi - \Phi])$$

ce qui correspond à la construction de Fresnel ci-dessus.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ et $\overrightarrow{OA_r}$ représentatifs des vibrations $y_{(i)_M}$ et $y(r)_M$ sont symétriques par rapport à l'axe Oy. Le vecteur somme est donc porté par cet axe. Le module de ce vecteur est $OA = 2OH = 2a \sin\Phi$. Il représente un mouvement de phase initiale $\varphi = \Pi/2$. Le mouvement résultant du point M est donc :

$$y = 2a \sin\Phi . \sin (\omega t + \frac{\Pi}{2})$$

$$y = 2a \sin\Phi . \cos \omega t$$

En remplaçant Φ par $\frac{2\Pi x}{\lambda}$ et ω par $\frac{2\Pi t}{T}$, on retrouve l'équation d'onde stationnaire établie plus haut :

$$y (x,t) = 2a \sin 2\Pi \frac{x}{\lambda} . \cos 2\Pi \frac{t}{T}$$

III Autres ondes stationnaires.

1°) Ondes stationnaires transversales avec extrémité libre

On peut réaliser l'expérience avec une lame d'acier souple fixée à l'extrémité d'un vibreur. A titre d'exercice, le lecteur pourra établir l'équation d'onde station-

naire, en tenant compte de la réflexion sans changement de signe sur l'extrémité libre. On trouve :

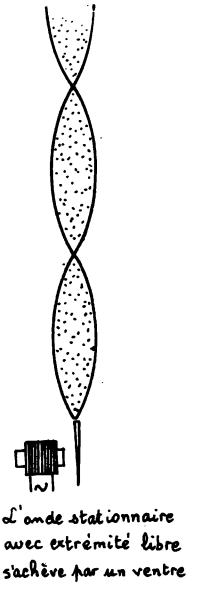
$$y = 2a \cos 2\Pi \frac{x}{\lambda} . \sin 2\Pi \frac{t}{T}$$

2°) Ondes stationnaires longitudinales.

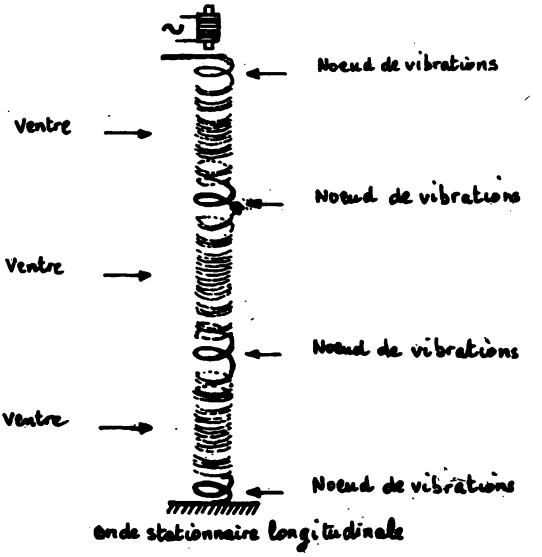
Un long ressort à spires non jointives est fixé à sa partie supérieure à un vibreur et à sa partie inférieure à un support fixe. En réglant convenablement la longueur du ressort, ce qui agit sur sa tension, on peut créer un système d'onde stationnaire longitudinale (les déplacements des spires s'effectuent suivant la direction du ressort).

Un certain nombre de spires, régulièrement espacées sont immobiles ce sont les noeuds de déplacement.

Les spires qui apparaissent floues correspondent aux ventres de déplacement.



L'onde stationnaire avec extrémité libre s'achève par un ventre



Onde stationnaire longitudinale

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 20

I - LE DISPOSITIF DE MELDE.

C'est une corde dont l'une des extrémités est reliée à un vibreur et dont l'autre extrémité est un point fixe.

Les ondes issues de la source de vibration se réfléchissent une première fois sur l'extrémité fixe, puis une seconde fois au point source etc. Il y a ainsi plusieurs réflexions successives, jusqu'à amortissement complet des ébranlements.

La condition pour qu'une onde stationnaire puisse s'établir sur la corde est la suivante: il faut qu'un ébranlement qui a effectué un aller et retour complet sur la corde se réfléchisse à nouveau sur la source, en phase avec l'ébranlement que la source est en train d'émettre à cet instant. On observe alors une onde stationnaire à un ou plusieurs fuseaux, dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Les points extrêmes des fuseaux sont des noeuds de vibration immobiles.

- Les milieux des fuseaux vibrent avec le maximum d'amplitude. Ce sont les ventres de vibration.

- Tous les points d'un même fuseau vibrent en phase.

- Les points de deux fuseaux consécutifs vibrent en opposition de phase.

- La distance séparant deux noeuds consécutifs ou deux ventres consécutifs est égale à une demi-longueur d'onde.

- Une corde de longueur ℓ contient toujours un nombre entier de fuseau, ce qui permet d'exprimer simplement la condition d'existence de l'onde stationnaire :

$$\ell = k \frac{\lambda}{2}$$

II ETUDE THEORIQUE DE L'ONDE STATIONNAIRE.

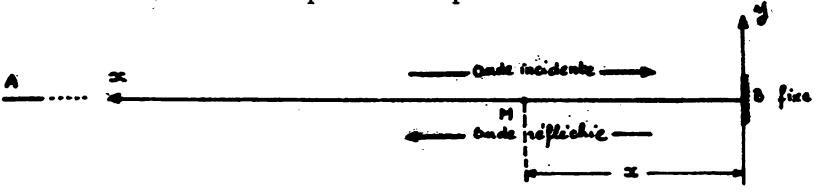
1°) Onde incidente ; onde réléchie.

Lorsqu'une onde incidente rencontre un obstacle fixe

elle donne naissance à une onde réfléchie, telle que chaque ébranlement change de signe au moment de la réflexion.

2°) L'équation d'onde stationnaire.

On n'étudie que le cas où chaque ébranlement ne se réfléchit qu'une seule fois. L'onde incidente issue du point A (à l'infini à gauche pour éviter les réflexions multiples), est une onde progressive sinusoïdale d'amplitude a. Elle passe au point M, se réfléchit au point fixe B. L'onde réfléchie repasse au point M.



L'origine des espaces est au point B. L'origine des temps est choisie de sorte que les vibrations de B dues à l'onde incidente aient une phase initiale nulle.

	Vibrations de B	Vibrations de M
Onde incidente	$y_{(i)_B} = a \sin 2\Pi \frac{t}{T}$	$\Rightarrow \quad y_{(i)_M} = a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$ (+) car $y_{(i)_M}$ en avance sur $y_{(i)_B}$
Onde réfléchie	$\Downarrow \quad y_{(r)_B} = -a \sin 2\Pi \frac{t}{T}$ (-) dû à la réflexion	$\Rightarrow \quad y_{(r)_M} = -a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ (-) car $y_{(r)_M}$ en retard sur $y_{(r)_B}$.

Par addition de $y_{(i)_M}$ et $y_{(r)_M}$ on obtient l'équation d'onde stationnaire :

$$y(x, t) = 2a \sin 2\Pi \frac{x}{\lambda} \cdot \cos 2\Pi \frac{t}{T}$$

C'est une fonction des variables séparées x et t. Le facteur $\sin 2\Pi \frac{x}{\lambda}$ montre que la corde a la forme d'une sinusoïde de période λ .

Les noeuds de vibration sont les points d'élongation nulle :

$$\sin 2\Pi \frac{x}{\lambda} = 0 \iff \boxed{x = k \frac{\lambda}{2}}$$

Les ventres de vibration sont les points d'élongation maximale :

$$\sin 2\Pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1 \iff \boxed{x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}}$$

Le terme $2a \cos 2\Pi \frac{t}{T}$, sans influence sur la position des ventres et des noeuds, correspond à la déformation sur place de la corde. Chaque point de la corde est animé d'un mouvement sinusoïdal de période T. Pour connaître l'amplitude de l'onde stationnaire, on se place à un ventre de vibration :

$$\sin 2\Pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1 \implies y(t) = \pm 2a \cos 2\Pi \frac{t}{T}$$

Les ventres ont des mouvements sinusoïdaux d'amplitude 2a .

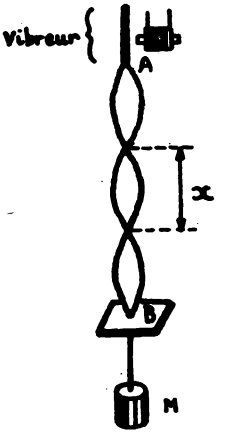
Conclusion :

Deux ondes progressives sinusoïdales de même amplitude a et de même période, se propageant en sens contraires dans un même milieu, donnent naissance à une onde stationnaire sinusoïdale de même période et d'amplitude 2a.

EXERCICES CHAPITRE 20

1 - Un fil inextensible est suspendu verticalement par son extrémité A à un vibreur qui lui communique un mouvement transversal de fréquence N = 100 Hz. Le fil traverse en un point B une plaque percée d'un petit trou qui empêche tout déplacement transversal de B.

1°) On tend le fil par le poids d'une masse M suspendue à son extrémité inférieure. Pour certaines positions de la plaque, le fil vibre en formant un système stable de k fuseaux dont chacun a toujours même longueur x = 26,0 cm ± 0,5 cm. Calculer la vitesse de propagation des ondes le long du fil et son incertitude absolue.



2°) On fixe la plaque dans une position telle que AB = ℓ = 1,30 m ± 0,01 m et on donne à M une série de valeurs croissantes. On porte dans le tableau ci-dessous les valeurs extrêmes de M permettant d'obtenir k fuseaux stables de forte amplitude :

k (fuseaux)	M_{mini} (g)	$M_{max.}$ (g)
7	83	86
6	115	120
5	166	173
4	258	266

Tracer les domaines expérimentaux des produits k^2 . Mg (en prenant g = 9,80 N/Kg) et déterminer leur intersection. Peut-on en déduire comment varie la tension du fil en fonction du nombre de fuseaux ? Dites sans long calcul quelle masse moyenne il faudra suspendre pour obtenir deux fuseaux de forte amplitude.

3°) On veut vérifier la validité de l'expression donnant la vitesse de propagation des ondes le long d'une corde :

$$V = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$$

Mg : tension de la corde ;
μ : sa masse linéique.

Pour cela, on détermine la longueur d'onde par deux méthodes:

a/ Connaissant la longueur de la corde AB = $\ell \pm \Delta\ell$, donner un premier encadrement de la longueur d'onde dans le cas de quatre fuseaux.

b/ Déterminer un second encadrement de la longueur d'onde à l'aide d'un calcul théorique, dans le cas de quatre fuseaux. La masse linéique du fil est

$$\mu = (6{,}03 \pm 0{,}03).\ 10^{-4}\ \text{kg/ m}.$$

c/ Comparer les deux encadrements et conclure.

4°) Le dispositif est éclairé à l'aide d'un stroboscope de fréquence N'= 200Hz. Quel est son aspect? (aucun calcul). Quel est son aspect si la fréquence du stroboscope est très légèrement supérieure à 200 Hz? (aucun calcul).

2/ Une corde verticale OO', de longueur 1m est attachée à sa partie supérieure O, à l'une des branches d'un diapason, entretenu électriquement, de fréquence 50Hz. Son extrémité inférieure O' est pratiquement immobilisée

par une plaque métallique mince, percée d'un petit trou au travers duquel passe la corde. Un poids P, accroché à l'extrémité inférieure O' tend la corde.

1°) Sachant que la corde vibre fortement en un seul fuseau pour P = 20 N, calculer la masse de la corde. (On rappelle que la célérité des ondes transversales le long de la corde a pour expression

$$V = \sqrt{\frac{P}{\mu}}$$

V en m/s
P en newtons
μ en kg/m. (masse linéique).

2°) Pour quelles valeurs du poids P, la corde se partage-t-elle en vibrant en 2, 3, 4 fuseaux?

3°) On éclaire la corde à l'aide d'un faisceau lumineux traversant une petite ouverture pratiquée dans un disque opaque qui peut tourner d'un mouvement uniforme autour de son axe.

a/ Représenter le dispositif expérimental.
b/ Calculer en tours par seconde les vitesses de rotation du disque pour lesquelles la corde paraît immobile.

c/ Quelles sont les vitesses pour lesquelles la corde semble effectuer un mouvement de fréquence 4 oscillations par seconde ?

(Baccalauréat).

3-1°) Une corde élastique sans raideur est placée verticalement. L'extrémité A est reliée à un vibreur qui lui impose un mouvement entretenu, sinusoïdal, transversal, de fréquence N = 100 hertz et d'amplitude a = 2 mm. L'extrémité inférieure est tendue par un poids et immergée afin d'éviter la réflexion des ondes qui arrivent à cette extrémité.

a/ La vitesse de propagation des ondes le long de la corde est 20 mètres par seconde. Ecrire l'équation du mouvement de l'extrémité A de la corde et celle du mouvement d'un point C situé sur la corde à 15 cm de A. On comptera les élongations sur l'axe orienté horizontal passant par A. L'origine des élongations O sur cet axe Oy est la position du point A lorsque le vibreur n'est pas excité. On prendra comme origine des temps l'instant où l'élongation du point A est nulle et croissante.

b/ Calculer les élongations des points A et C aux instants $t_1 = 0,1000$ s, $t_2 = 0,1015$ s et $t_3 = 0,1025$ s. Dessiner l'aspect de la corde à partir du point A et sur une distance égale à une longueur d'onde aux trois instants précédents.

c/ On examine la corde à la lumière d'un stroboscope dont la fréquence des éclairs est 100 hertz. Décrire l'aspect de la corde.

On amène la fréquence des éclairs à 99 hertz. Dans ces conditions, quelle est la vitesse apparente de la propagation d'un point d'élongation nulle ?

2°) L'extrémité supérieure A de la corde restant reliée au vibreur, la corde traverse en un point B une plaque métallique mince percée d'un petit trou qui interdit pratiquement tout déplacement transversal de B. On tend la corde par le poids P d'une masse suspendue à l'extrémité inférieure de la corde. Sachant que la masse linéique de la corde est 0,2 gramme par mètre et que AB = 50 cm, déterminer P pour que la portion AB de la corde se partage en k fuseaux. Calculer P pour K égal à 1, 2, et 3.

3°) L'extrémité B est maintenant reliée à un deuxième vibreur identique de fréquence 100 hertz, qui lui impose un mouvement transversal de même direction que celui de A, d'amplitude 2 mm et en retard de phase de $\Pi/3$ par rapport à celui de A. On supposera qu'il n'y a ni réflexion des ondes ni amortissement. La tension de la corde AB est la même que dans la deuxième question pour $k = 3$.

a/ Ecrire l'équation du mouvement d'un point M quelconque de AB. Où les points au repos et les points vibrant avec une amplitude maximale se trouvent-ils ?

b/ Déterminer directement l'amplitude des vibrations du milieu, I, de AB en fonction de l'amplitude a des deux sources A et B et du déphasage φ entre ces deux sources.

N.B. - Les notations de l'énoncé devront être scrupuleusement respectées. Les résultats numériques seront fournis avec la précision de la règle à calcul, c'est-à-dire quelques millièmes.

(Baccalauréat).

4- A) Etude des vibrations.

1°) Un point matériel A est animé d'un mouvement sinusoïdal rectiligne de fréquence 80 hertz et d'amplitude 3 mm.

En prenant pour origine des temps l'instant où le point A passe par sa position d'équilibre dans le sens positif des élongations, donner l'expression de son élongation y en fonction du temps. A quels instants l'élongation du point A sera-t-elle égale à 1,5 mm, le point A se déplaçant dans le sens des élongations décroissantes

2°) Ce point matériel est pris à l'extrémité d'un vibreur, lié à une corde élastique sans raideur, de longueur infinie, à qui il imprime des vibrations transversales. La célérité de propagation des vibrations le long de la corde est 16 m/s.

a/ Donner en fonction du temps l'élongation d'un point B situé à 5 cm de A.

Quelle sera l'élongation du point B aux instants t_1 = 0,1000 s, t_2 = 0,1125 s, t_3 = 0,1130 s?

b/ Quel sera l'aspect de la corde aux instants t_1 , t_2, t_3 (faire un graphique)? Vérifier sur le graphique, les élongations du point B aux instants t_1 , t_2 , t_3 .

B/- Etude de la célérité de propagation des vibrations le long d'une corde.

1°) Pour faire cette étude, on réalise les expériences suivantes :

a/ La corde est maintenue tendue entre deux points fixes. Sa longueur est égale à 6 m, à 3 cm près, et sa tension est 0,98 newton. Un ébranlement transversal se propage le long de la corde et effectue 3 allers et retours en 1,7 s.

b/ Le dispositif précédent étant conservé, on écarte le milieu de la corde de sa position d'équilibre transversalement et l'on abandonne la corde à elle-même. Elle effectue alors 4 oscillations en 2,3 secondes.

c/ On pèse la corde utilisée. Sa masse supposée déterminée exactement et 14,4 grammes.

Déterminer à l'aide des résultats ci-dessus, dans chaque cas, la célérité de propagation. Sachant que les durées sont mesurées à 0,1 seconde près, évaluer dans

chaque cas la précision des résultats. Quelle valeur de la célérité faut-il choisir ?

2°) Avec cette même corde et le vibreur du paragraphe A) on réalise l'expérience de Melde pour controler le résultat précédent.

a/ La tension étant toujours 0,98 newton, quelles longueurs de corde faudra-t-il utiliser pour obtenir 2, 3, 4 fuseaux ?

b/ La corde présentant 4 fuseaux, comment faudrait-il, en conservant la longueur constante, modifier la tension pour obtenir 3 puis 2 fuseaux ?

(Baccalauréat).

5 . Une corde d'acier de longueur 250 cm est tendue horizontalement de telle sorte que les petits mouvements transversaux s'y propagent à la vitesse de 80 m/s.

A/ Calculer la tension de la corde sachant que sa masse est égale à 42,5 g. Une extrémité de la corde est attachée à un point O et l'autre passe sur une poulie, dont les frottements sont négligeables, et supporte un corps ; déterminer la masse de celui-ci. On rappelle que sur une corde de tension F et de masse par unité de longueur μ , la célérité des ébranlements transversaux est donnée par la formule :

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Au lieu de l'expérience, on a $g = 9{,}80\ m/s^2$

B/ L'extrémité O de la corde est animée d'un mouvement vibratoire transversal d'équation horaire

$$y = 5 \sin 377\ t,$$

L'élongation y étant mesurée en millimètres et le temps en secondes.

1°) Donner l'amplitude, la fréquence et la période du mouvement.

2°) Le mouvement se propage sur la corde sans amortissement et, à l'extrémité opposée, un dispositif approprié empêche toute réflexion.

a/ Déterminer l'abscisse (distance à l'origine O) du point (ou les abscisses des points) qui vibre en phase avec O.

b/ Déterminer les abscisses des points qui vibrent en opposition de phase.

C/ On considère maintenant une longueur utile de la corde OA = 100 cm, les points O et A sont fixes. A une trentaine de centimètres de O, on place un électro-aimant parcouru par un courant alternatif de fréquence f = 50 Hz. On constate que la corde vibre avec une amplitude importante et en formant deux fuseaux.

Expliquer le phénomène. Calculer la nouvelle vitesse de propagation et la nouvelle tension de la corde.

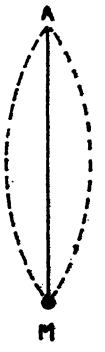
D/ La corde précédente, vibrant en formant deux fuseaux est maintenant éclairée par une lampe au néon donnant des éclairs brefs à une fréquence réglable. Que voit-on si la fréquence des éclairs est 100 Hz? Même question pour la fréquence de 200 Hz. Quel est l'aspect de la corde si la fréquence des éclairs est voisine de 100 Hz (elle peut varier de 98 à 100 Hz) ?

6 Un pendule pesant est constitué par un fil d'acier et une masse ponctuelle M fixée à l'une de ses extrémités L'autre extrémité du fil est attachée à un point fixe A. Le fil a une longueur parfaitement connue ℓ_0 = 1m à 0°C.

1°) On fait osciller ce pendule a 0° C. Calculer la période des oscillations de faible amplitude. On donne g = 9,800 m/s²

2°) Le pendule est ensuite placé à une température de 20 ° C. Le fil se dilate.

a/ Calculer la variation relative de période consécutive à cette dilatation. En déduire la valeur de la période à 20° C. (coefficient de dilatation linéique du fil : $\lambda = 1{,}2.10^{-5}$)



b/ Calculer la variation relative d'accélération de pesanteur que devrait subir ce pendule pour retrouver à 20 ° C, sa période d'oscillation à 0°C, calculée au 1°.

Quelle serait alors la valeur de l'accélération de la pesanteur ?

3°) Le pendule est maintenant immobile à 0°C. On écarte le milieu du fil de sa position d'équilibre, très faiblement et pendant un instant très court. La masse ponctuelle M reste alors immobile et le reste toujours par la suite. Le fil vibre en formant un seul fuseau.

Calculer sa fréquence de vibration à 0°C.

On éclaire ce fil avec un éclairage stroboscopique. Pour quelle fréquence maximale des éclairs observe-t-on ce fil constamment immobile ?

On donne M = 4 kg ; masse du fil: m = 3,92 grammes.

4°) La température devient θ = 20°C. Quelle est la nouvelle fréquence de vibration du fil écarté de sa position d'équilibre comme au 3° ?

Quelle serait la fréquence du mouvement apparent du du fil, éclairé par le stroboscope, la fréquence des éclairs émis n'ayant pas changé ? Donner ce résultat en indiquant combien de temps le fil mettrait pour effectuer une vibration du mouvement apparent. L'expérience vous paraît-elle réalisable ?

Remarque. - On rappelle que la vitesse V de propagation d'un ébranlement transversal le long d'un fil dont la masse par unité de longueur est μ et la tension F est donnée par la formule.

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

(Baccalauréat).

Chapitre 21

NOTIONS TRES SOMMAIRES SUR LA RESONANCE

I - OSCILLATIONS AMORTIES, OSCILLATIONS ENTRETENUES.

1°) La période propre.

Ecartons un pendule simple de sa position d'équilibre et abandonnons le: il oscille librement avec la période:

$$T_o = 2\Pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Cette période (pour les faibles amplitudes) est celle avec laquelle se font les échanges d'énergie potentielle et d'énergie cinétique du système pendule-Terre. Elle ne dépend que de la construction du pendule et de sa position dans le champ de pesanteur terrestre. C'est la période propre du pendule.

De même, la période d'un pendule élastique oscillant librement, ne dépend que de la raideur du ressort et de la masse fixée à son extrémité. Sa période propre est :

$$T_o = 2\Pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Définition :

> La période propre d'un oscillateur est celle avec laquelle il oscille librement.

2°) Oscillations forcées.

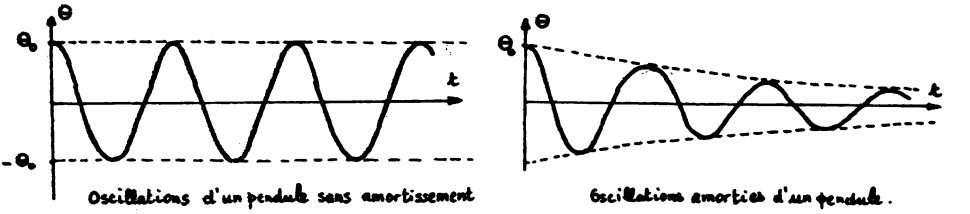
On peut saisir à la main ou relier à un dispositif quelconque la sphère du pendule simple ou la masse du pendule élastique et leur imposer un mouvement de période différente de leur période propre. Leurs oscillations sont alors des oscillations forcées.

3°) L'amortissement des oscillations d'un pendule.

Un pendule simple dépourvu de tout frottement (donc théorique) peut osciller éternellement parce qu'il constitue avec la Terre un système mécaniquement isolé dont

l'énergie mécanique totale reste constante.

En fait, il existe des frottements ; une partie de l'énergie mécanique se transforme en énergie thermique et l'amplitude des oscillations décroît: il y a amortissement des oscillations.



Oscillations d'un pendule sans amortissement

Oscillations amorties d'un pendule.

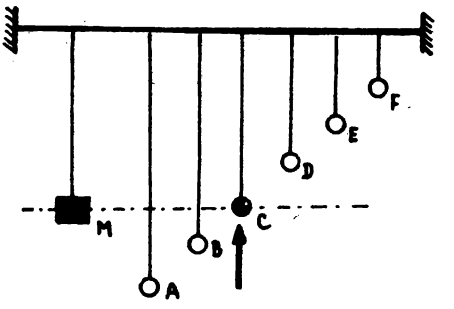
4°) L'entretien des oscillations.

Si l'on veut maintenir constante l'amplitude des oscillations d'un pendule, il faut lui fournir périodiquement une quantité d'énergie mécanique égale à celle qu'il perd par frottement, par exemple en lui communiquant une légère impulsion à chaque passage par sa position d'élongation angulaire maximale, c'est-à-dire avec une période égale à la période propre du pendule.

II - La résonance.

1°) Un exemple.

Des pendules légers, A, B, C, D etc. sont suspendus à une corde horizontale bien tendue. On met en mouvement un pendule lourd M. Après quelques oscillations du pendule M, tous les pendules se mettent à osciller, mais de façon irrégulière: l'amplitude, tout en restant faible croît, décroît et les oscillations cessent. Puis le mouvement reprend de la même façon.



Un seul pendule, le pendule C, qui a même longueur que M oscille règulièrement avec une forte amplitude. Puisqu'ils ont même longueur, les pendules M et C ont même période.

Tous les pendules se mettent à osciller parceque le pendule M leur a fourni une partie de son énergie par l'intermédiaire de la corde. Mais l'un d'eux a reçu cette énergie sur un rythme égal à sa période propre. Il oscille alors avec une forte amplitude. On dit qu'il entre en résonance.

2°) Définition de la résonance.

La résonance est l'accroissement de l'amplitude d'un oscillateur qui reçoit de l'énergie sur une période égale à sa période propre.

3°) Excitateur, résonateur, couplage.

L'expérience décrite plus haut conduit aux définitions suivantes :

L'EXCITATEUR est le système qui fournit périodiquement de l'énergie et impose ses vibrations (ici: M).

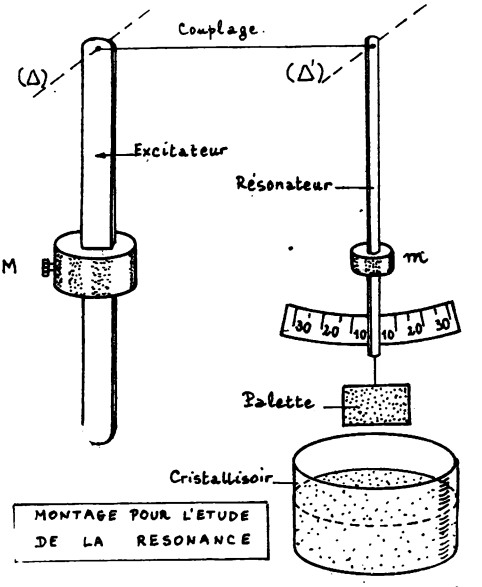
LE RESONATEUR est le système qui, recevant de l'énergie se met à osciller avec la période imposée par l'excitateur. (Ici : C).

LE COUPLAGE est le dispositif qui permet à l'énergie de passer de l'excitateur au résonateur (ici: la corde).

III ETUDE EXPERIMENTALE DE LA RESONANCE.

1°) Cas d'un résonateur faiblement amorti.

L'excitateur fournit de l'énergie au résonateur, mais par réaction le résonateur restitue une partie de cette énergie à l'excitateur. Nous admettrons que cette réaction est négligeable. Il suffit pour cela que la masse du résonateur soit très faible devant celle de l'excitateur.



Le résonateur porte à sa partie inférieure une palette légère orientable. Elle permet de faire varier l'amortissement du résonateur sans changer sa période propre. Pour obtenir de forts amortissements on peut la plonger dans l'eau d'un cristallisoir.

Le couplage est assuré par une corde de caoutchouc.

Dans toutes les expériences qui suivent, on laisse constante la période propre du résonateur. On fait varier celle de l'excitateur en déplaçant la masse M.

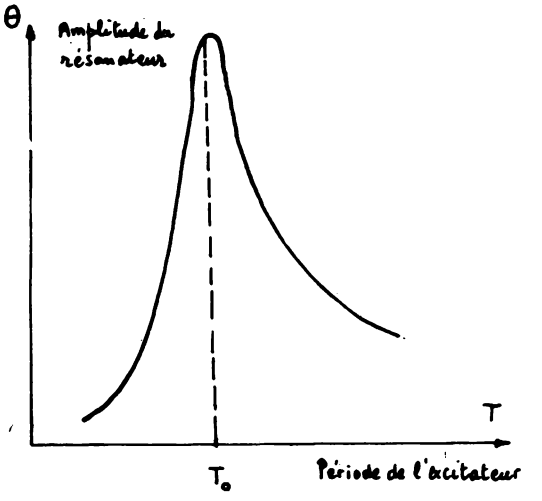
Le résonateur oscille devant une graduation, ce qui permet de mesurer son amplitude.

a/ La période de l'excitateur est très différente de la propre du résonateur.

Lorsqu'on lance l'excitateur, le résonateur prend un mouvement compliqué d'amplitude faible, non synchronisé avec celui de l'excitateur. On peut le voir s'arrêter puis se remettre en mouvement et ceci plusieurs fois.

b/ La période de l'excitateur se rapproche de celle du résonateur.

La période propre du résonateur est T_o. En agissant sur la masse M de l'excitateur, nous donnons à sa période T des valeurs qui se rapprochent de T_o .



Courbe de résonance aiguë d'un résonateur faiblement amorti

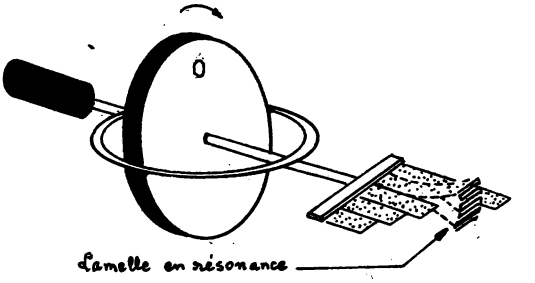
Dans ces conditions, le résonateur oscille, non pas avec sa période propre, mais avec la période T de l'excitateur et son amplitude est d'autant plus grande que T est plus voisin de T_o.

Lorsque la période de l'excitateur est égale à la période propre T_o du résonateur, l'amplitude du résonateur est maximale. Elle est beaucoup plus grande que celle de l'excitateur. Il y a résonance aiguë.

Ces résultats se traduisent par la courbe ci-contre où la période de l'excitateur est portée en abscisse et l'amplitude du résonateur en ordonnée.

c/ Exemples de phénomènes de résonance .

Un gyroscope porte une série de lamelles d'acier, d'inégales longueurs et par conséquent d'inégales périodes propres. Le centre de gravité du disque n'est pas exactement sur l'axe de rotation en raison d'un petit trou percé au voisinage du pourtour. Il en résulte des vibrations qui sont transmises au lamelles.

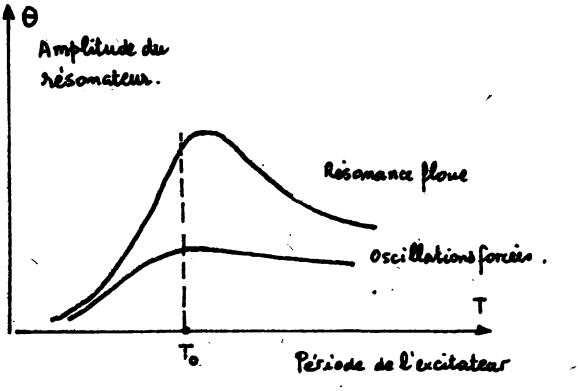


A cause des frottements, la vitesse de rotation du disque diminue. Lorsque la période des vibrations du disque est égale à la période propre de l'une des lamelles, celle-ci entre en résonance. C'est la plus courte qui entre d'abord en résonance puis elle s'arrête. La suivante se comporte de même après un certain temps et il en est ainsi jusqu'à la plus grande.

On fixe les diapasons sur des caisses de résonance, dont les dimensions sont calculées pour que l'air contenu à l'intérieur vibre par résonance lorsque le diapason oscille.

2°) La résonance floue. Les vibrations forcées

Reprenons les deux pendules couplés. On introduit la palette du résonateur dans l'eau du cristallisoir. Un amortissement appréciable est ainsi créé, que l'on peut faire varier en enfonçant plus ou moins la palette. L'expérience permet de dégager les conclusions suivantes :



- Le résonateur oscille avec la période de l'excitateur, quelle que soit cette période.

- L'amplitude reste faible, la résonance est floue.

- Si l'amortissement augmente encore, l'amplitude du résonateur reste très faible et sensiblement constante dans un grand domaine. Le résonateur est dans le régime des oscillations forcées.

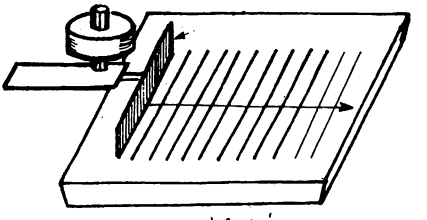
Chapitre 22

LES INTERFERENCES MECANIQUES

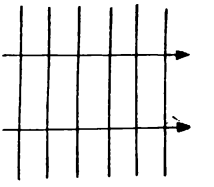
A/ ONDES A LA SURFACE DE L'EAU: REFLEXION, REFRACTION, DIFFRACTION.

Le dispositif schématisé ci-dessous permet de créer des ondes rectilignes à la surface de l'eau. Nous distinguerons les deux notions suivantes :

ne vibrante perpendiculaire à la surface de l'eau



Cuve à eau éclairée en lumière stroboscopique.



fronts d'ondes et directions de propagation

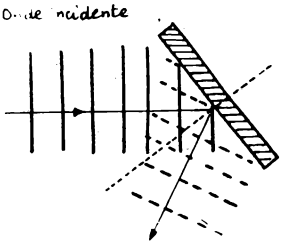
- Les fronts d'ondes

Ce sont les lignes que nous observons à la surface.

- Les directions de propagation:

Ce sont les directions perpendiculaires aux fronts d'ondes.

1°) La réflexion.



Lorsque les ondes rencontrent un obstacle fixe, elles subissent la réflexion, de telle sorte que les directions de propagation de l'onde réfléchie obéissent à la loi de Descartes pour la réflexion:

Angle d'incidence = Angle de réflexion.

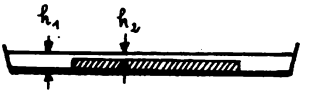
2°) La réfraction.

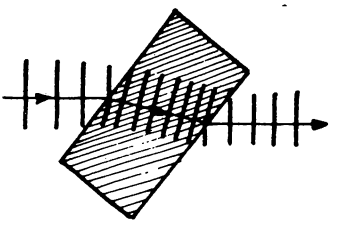
Dans une cuve à eau peu profonde, la vitesse de propagation des ondes est liée à la profondeur h de la cuve

par la formule :

$$v = \sqrt{g.h}$$ g: accélération de la pesanteur.

La vitesse de propagation de l'onde est donc une fonction croissante de la profondeur.





Plaçons dans une cuve à eau une lame de verre afin de diminuer localement la profondeur de l'eau et par conséquent la vitesse de propagation de l'onde. Si la lame a été placée obliquement par rapport au fronts d'onde, on observe deux phénomènes :

- Un resserrement des ondes, donc une diminution de la longueur d'onde.

- Un changement de direction de propation de l'onde.

Si la lame est parallèle aux fronts d'onde, on observe seulement la diminution de la longueur d'onde;

Ces phénomènes sont évidemment liés à la modification de la vitesse de propagation de l'onde lorsqu'elle [illegible] milieu à un milieu de moins profond. Il s'agit **de la réfraction qui s'interprète ainsi :**

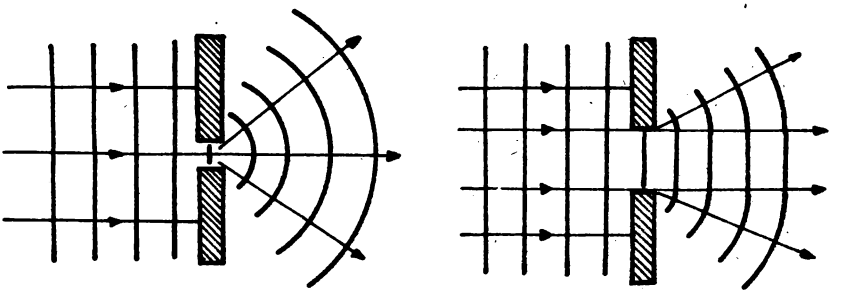
Lorsqu'une portion de front d'onde pénètre dans la partie moins profonde de la cuve, elle se propage moins vite que la portion de front d'onde qui se trouve encore dans le milieu plus profond. Elle progresse moins loin pendant des durées égales et le front est "brisé". Inversement, lorsque le front d'onde pénètre à nouveau dans le milieu plus profond, il se propage plus vite et reprend sa direction initiale.

3°) La diffraction

Si l'on place dans la cuve, sur le trajet des ondes

rectilignes, un obstacle percé d'une ouverture, petite par rapport à la longueur d'onde, il apparaît un système d'ondes circulaires ayant l'ouverture pour centre. Les directions de propagation, qui étaient parallèles avant l'ouverture, divergent à partir de l'ouverture.

Le phénomène observé est de la diffraction.



Si l'on augmente la largeur de l'ouverture, le phénomène de diffraction est moins marqué, mais il continue d'exister.

Pour une ouverture très large par rapport à la longueur d'onde, la diffraction n'apparaît que sur les bords de l'ouverture et on pourra la négliger.

4°) Généralisation.

Toute onde, quel que soit le phénomène vibratoire qui se propage, donne lieu aux phénomènes de réflexion, réfraction et diffraction.

Prenons l'exemple des ondes sonores:

- La réflexion: L'écho est un phénomène de réflexion.
- La réfraction: Dans des gaz différents, le son se propage à des vitesses différentes, ce qui peut donner lieu à de la réfraction.
- La diffraction: La caisse de résonance d'un diapason émet des ondes sphériques puisqu'on les entend où que l'on soit par rapport à son ouverture. Il s'agit d'un phénomène de diffraction.

Interférences à la surface de l'eau.

I - ETUDE EXPERIMENTALE.

1°) Sources cohérentes.

Deux sources de vibrations sinusoïdales O_1 et O_2 sont cohérentes si leur déphasage est constant.

$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$

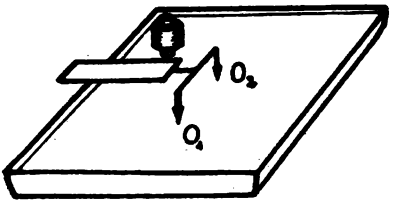
$y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$

$\varphi_2 - \varphi_1 = Cte \Leftrightarrow$ source cohérentes.

Un cas particulier de sources cohérentes est celui où elles vibrent en phase ($\varphi_2 = \varphi_1$).

2°) Dispositif expérimental.

O_1 et O_2 sont deux sources de vibrations perpendiculaires à la surface d'une cuve à eau. Elle sont fixées à la même lame vibrante. Par conséquent :



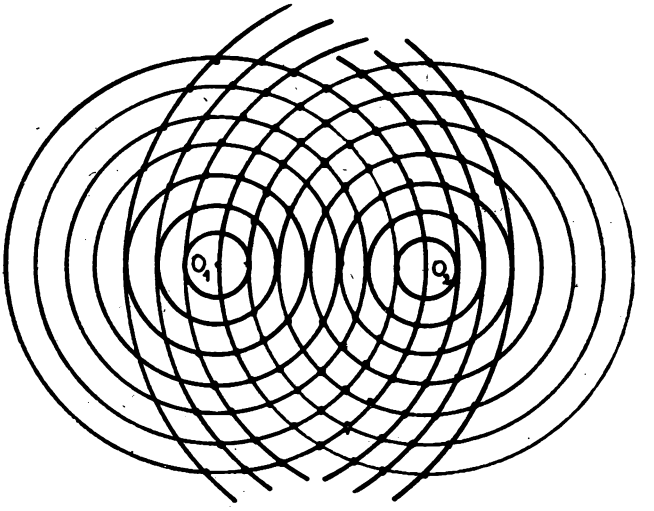
- Elles ont même amplitude de vibration ;
- Elles ont même période.
- Elles sont toujours en phase. Elles sont donc cohérentes.

3°) Observations.

a/ En lumière stroboscopique.

Les deux pointes vibrant à la surface de l'eau, on éclaire le dispositif en lumière stroboscopique.

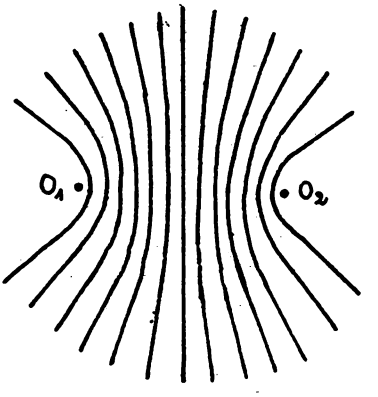
Au ralenti stroboscopique, on observe les deux systèmes d'ondes circulaires progressives issues des sources O_1 et O_2 qui se superposent en un certain nombre de points du milieu de propagation.



Deux ondes progressives circulaires observées au ralenti stroboscopique.

b/ En lumière ordinaire.

En lumière ordinaire, on observe un ensemble de lignes fixes, alternativement brillantes et obscures ayant l'aspect d'hyperboles. Ce sont des franges d'interférences.



Interférences à la surface de l'eau.

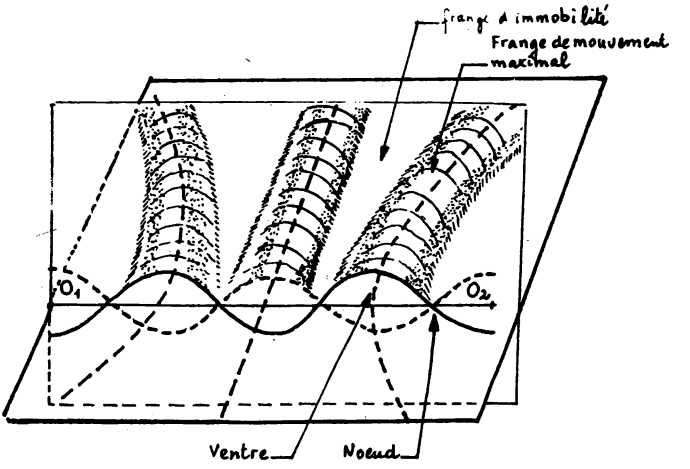
L'expérience montre qu'il est impossible d'obtenir des franges d'interférences si les sources de vibrations O_1 et O_2 ne sont pas cohérentes.

4°) Définition:

On appelle phénomène d'interférences dans un plan, le résultat de la superposition dans ce plan de deux ondes progressives sinusoïdales issues de deux sources de vibrations cohérentes.

5°) Noeuds et ventres sur une droite; Franges dans un plan.

A partir de O_1 et O_2 des ondes se propagent dans toutes les directions, en particulier de O_2 vers O_1 et de O_1 vers O_2 .



Le segment de droite $\overline{O_1\ O_2}$ est donc, comme dans le cas d'une corde, le siège d'une onde stationnaire qui présente des noeuds et des ventres de vibration. L'extension dans le plan d'un noeud est une frange où l'eau est toujours immobile. C'est une frange de mouvement nul.

L'extension dans le plan d'un ventre de vibration est une frange où le mouvement est maximal.

6°) Importance des phénomènes d'interférences.

L'expérience réalisée à la surface de l'eau montre que dans certaines conditions il est possible d'obtenir l'immobilité en superposant des états de mouvement.

Les conditions sont les suivantes :

- Les états de mouvement sont dûs à des ondes progressives qui se superposent dans le même milieu.

- Les ondes progressives sont issues de sources cohérentes.

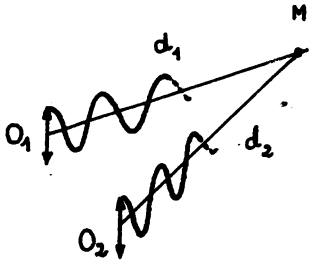
Toute onde, quel que soit le phénomène vibratoire qui se propage, peut, dans les conditions citées, donner des phénomènes d'interférences.

Réciproquement, nous devrons toujours interpréter un phénomène d'interférences comme le résultat de la superposition de deux (ou de plusieurs) ondes progressives issues de sources cohérentes.

II- ETUDE THEORIQUE.

1°) Vibrations d'un point M du milieu.

Etudions l'état vibratoire d'un point M situé à la distance d_1 de la source O_1 et à la distance d_2 de la source O_2 .



Nous nous plaçons à faible distance des sources afin de pouvoir négliger l'amortissement des ébranlements.

Les deux sources ont le même mouvement, d'équation :

$$y_0 = a \sin 2\Pi \frac{t}{T} .$$

Soient $y_{(1)_M}(t)$ et $y_{(2)_M}(t)$ les équations des mouvements du point M dûs respectivement aux ondes issues de O_1 et O_2 .

$$y_{(1)_M} = a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) = a \sin \left(2\Pi \frac{t}{T} - \varphi_1\right)$$

avec $\varphi_1 = \frac{2\Pi d_1}{\lambda}$

(M est en retard de $\frac{2\Pi d_1}{\lambda}$ sur O_1).

$$y_{(2)_M} = a \sin 2\Pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right) = a \sin \left(2\Pi \frac{t}{T} - \varphi_2\right)$$

avec $\varphi_2 = \frac{2\Pi d_2}{\lambda}$

(M est en retard de $\frac{2\Pi d_2}{\lambda}$ sur O_2).

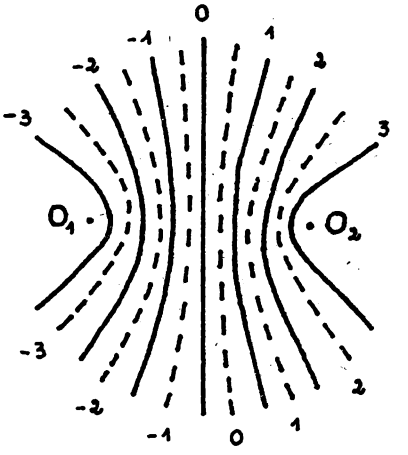
a/ Points vibrant avec une amplitude maximale.

Le point M vibre avec une amplitude maximale (égale à 2a) si les ondes issues de O_1 et O_2 s'y superposent en phase, donc si:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2\pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda} = 2k\pi$$

$$d_1 - d_2 = k\lambda$$

Les points de la surface de l'eau qui vibrent avec l'amplitude maximale sont ceux pour lesquels la différence des distances aux sources O_1 et O_2 est égale à un nombre entier de longueurs d'onde.



Si $k = 0$, on a $d_1 - d_2 = 0$. L'ensemble des points satisfaisant à cette condition est la médiatrice du segment $O_1 O_2$.

Si k n'est pas nul, la condition

$$d_1 - d_2 = k\lambda$$

définit une famille d'hyperboles de foyers O_1 et O_2 (tracés en traits pleins).

L'ensemble des points vibrant avec une amplititude maximale est une famille d'hyperboles qui admet O_1 et O_2 pour foyers.

Comme nous le montrerons plus loin, le nombre de ces hyperboles est limité.

b/ Points immobiles.

Le point M est immobile si les ondes issues de O_1 et O_2 s'y superposent en opposition de phase, donc si

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2k' + 1)\pi \quad \text{ou} \quad 2\pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda} = (2k' + 1)\pi$$

$$d_1 - d_2 = (2k' + 1)\frac{\lambda}{2}$$

Les points de la surface de l'eau qui sont immobiles sont ceux pour lesquels la différence des distances aux sources O_1 et O_2 est égale à un nombre impair de demi-longueurs d'onde.

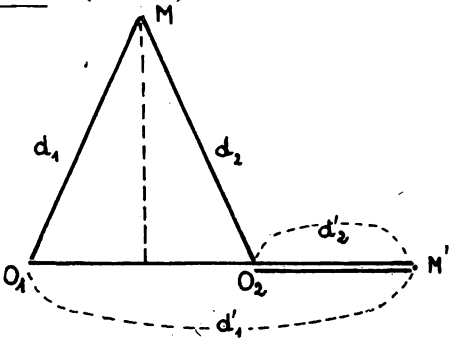
La condition $(d_1 - d_2) = (2k' + 1)\frac{\lambda}{2}$ définit une seconde famille d'hyperboles (tracées en pointillé).

L'ensemble des points immobiles est une famille d'hyperboles qui admet O_1 et O_2 pour foyers.

2°) Le nombre d'hyperboles est limité.

k (ou k') est l'ordre de la frange d'interférence. Montrons que cet ordre est limité.

Dans le cas des franges de mouvement maximal, la différence $d_1 - d_2$ est nulle pour les points de la médiatrice de O_1O_2. Cette médiatrice est la frange centrale ou frange d'ordre zéro. (k = 0).



La plus grande valeur de la différence des distances est obtenue pour les points appartenant à la droite $\overline{O_1O_2}$, hors du segment $\overline{O_1\ O_2}$. On a alors, pour un point

M' de cette droite :

$$d'_1 - d'_2 = \overline{O_1\ O_2}$$

Pour un point quelconque du plan, la valeur absolue de la différence des distances aux deux sources est au plus égale à $\overline{O_1\ O_2}$:

$$|d_1 - d_2| \leqslant \overline{O_1 O_2}$$

Cette relation permet d'obtenir l'ordre maximal d'interférence. Dans le cas des franges de mouvement maximal, la relation s'écrit :

$$|k|\lambda \leqslant \overline{O_1 O_2}$$

$$\boxed{|k| \leqslant \frac{\overline{O_1 O_2}}{\lambda}}$$

Application numérique : La distance des sources est $\overline{O_1\ O_2} = 2$ cm, la longueur d'onde est $\lambda = 0{,}6$ cm. L'ordre maximal d'interférence est

$k \leqslant \frac{2}{0{,}6} = 3{,}33$. De plus k est entier. Il y a donc 7 franges de mouvement maximal, correspondant aux valeurs suivantes de k :

$$k \in \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3.\}$$

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 22

1°) Définition des interférences.

On appelle phénomène d'interférences dans un plan, le résultat de la superposition dans ce plan de deux ondes progressives issues de deux sources de vibrations cohérentes.

On appelle ainsi des sources dont les vibrations sont synchrones (c'est à dire ayant même période) et présentant toujours entre elles le même déphasage. Un cas particulier fréquent est celui où les sources vibrent en phase.

2°) Les franges d'interférences.

Les ondes issues des deux sources synchrones donnent naissance à des franges de mouvement maximal et à des franges de mouvement nul.

Les ondes stationnaires sont un cas particulier d'interférences. En effet, dans le plan on est en présence d'un phénomène d'interférences, alors que sur le segment de droite joignant les deux sources il s'agit d'une onde stationnaire.

Si $y_o = a \sin 2\Pi \frac{t}{T}$ est le mouvement commun aux deux sources,

en un point quelconque du milieu de propagation se superposent deux ondes progressives sinusoïdales imprimant au point les mouvements :

$$y_{(1)_M} = a \sin \left(2\Pi \frac{t}{T} - 2\Pi \frac{d_1}{\lambda} \right)$$

$$y_{(2)_M} = a \sin \left(2\Pi \frac{t}{T} - 2\Pi \frac{d_2}{\lambda} \right)$$

a/ Franges de mouvement maximal.

Un point M appartient à une telle frange si les ondes issues des deux sources s'y superposent en phase :

$$2\Pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda} = 2k\Pi \qquad \boxed{d_1 - d_2 = k\lambda}$$

b/ Franges d'immobilité.

Un point M appartient à une telle frange si les ondes issues des deux sources s'y superposent en opposition de phase :

$$2\Pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda} = (2k' + 1)\Pi \qquad \boxed{d_1 - d_2 = (2k'+1)\frac{\lambda}{2}}$$

Chacune des deux relations encadrées définit une famille d'hyperboles admettant les sources de vibrations pour foyers.

3°) L'ordre maximal d'interférence.

k et k' sont les ordres d'interférences. Il sont limités car la plus grande différence des distances aux deux sources (en valeur absolue) correspond aux points du plan situés sur la droite $\overline{O_1 O_2}$, hors du segment $\overline{O_1 O_2}$.

$|d_1 - d_2| \leqslant \overline{O_1 O_2}$ Pour le mouvement maximal: $|k| \leqslant \frac{\overline{O_1 O_2}}{\lambda}$

Chapitre 22

EXERCICES

1 - N.B. Les deux parties du problème sont indépendantes.

A/ ON REALISE L'EXPERIENCE D'INTERFERENCES SUIVANTE :

Deux pointes S_1 et S_2 distantes de d = 0,100 m vibrent en phase, en contact avec la surface libre d'une cuve à eau perpendiculairement à cette surface, avec la même amplitude. Les deux pointes sont excitées sinusoïdalement par un vibreur électrique avec une fréquence N = 50 Hz. La profondeur de l'eau est $h = 7{,}0.10^{-3}$ m. La théorie indique que la vitesse de propagation d'un ébranlement à la surface du liquide est

$$V = \sqrt{g.h} \qquad (\text{avec } g = 9{,}80 \text{ m/s}^2)$$

1°) a/ Le dispositif est éclairé en lumière stroboscopique de fréquence N' = 25 Hz. Qu'observe-t-on à la surface du liquide considéré ?

b/ On observe maintenant le dispositif expérimental en lumière ordinaire. Décrire l'aspect de la surface de l'eau Pourquoi le phénomène observé n'est-il nettement visible que dans une zone voisine des sources de vibration .

2°) Combien de franges d'amplitude maximale observe-t-on?

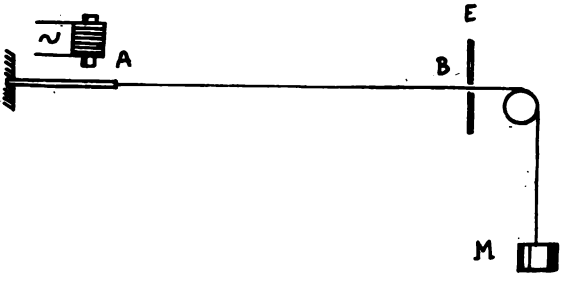
3°)
a/ Montrer que tous les points de la médiatrice de S_1 S_2 sont ceux d'une frange de mouvement maximal.

b/ On suppose que les pointes vibrent en opposition de phase. Montrer que la médiatrice de S_1 S_2 est une frange de mouvement nul.

B/ ON REALISE L'EXPERIENCE DE MELDE EN UTILISANT LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL REPRESENTE CI-DESSOUS :

- Longueur du fil: AB = L = 1,00 m.
- E: écran percé d'un petit trou immobilisant l'extrémité B du fil.
- M: masse dont le poids Mg tend le fil.

La fréquence des vibrations de la lame est N = 100 Hz.



On rappelle que la vitesse de propagation d'un ébranlement le long du fil est donnée par la relation :

$$V = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$$ où μ est la masse linéique du fil.

1°) Pour quelle valeur de M observe-t-on deux fuseaux entre A et B ?

2°) On observe le dispositif à l'aide de la lunière d'un stroboscope dont la fréquence des éclairs est N' = 101Hz.

a/ Le ralenti est-il direct ou inverse ?

b/ Etablir l'expression donnant la fréquence apparente n du mouvement de la corde en fonction de N et N'. Quelle est la valeur numérique de n ?

(D'après baccalauréat tunisien, juin 1970)

2 -

1°) Une masse de 1 kg, suspendue à un ressort à boudin, provoque un allongement de 4 cm. Dans tout le problème, l'intensité g de la pesanteur sera supposée égale à 10 SI

Calculer la raideur k du ressort en unités SI (k est défini comme le rapport de la force agissante à l'allongement correspondant).

2°) Le ressort, de masse négligeable, étant fixé à son extrémité supérieure A, on accroche à son extrémité inférieure B une masse M. Après avoir fait subir à M une

translation verticale de haut en bas et de faible amplitude a, on l'abandonne sans vitesse initiale.

a/ Etudier le mouvement de M. Donner l'expression de sa période.

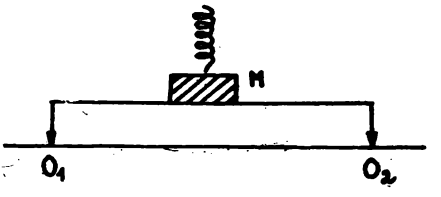
b/ Sachant que la période est 0,25 s, donner l'expression de l'élongation x du mouvement de M en fonction de a et du temps t. L'élongation sera comptée positivement au dessus de la position de repos de M; au temps t = 0, M passe par sa position d'équilibre dans le sens de bas en haut. Dans tout le problème on supposera le mouvement non amorti.

3°) La masse M est munie, à sa partie inférieure, d'une pointe de masse négligeable qui vient frapper en un point O la surface libre de l'eau contenue dans un récipient de grandes dimensions. La masse M est animée du même mouvement que dans la question 2°. La célérité V de la propagation du mouvement considéré à la surface de l'eau étant supposée égale à 60 cm/s :

a/ Calculer la longueur d'onde du mouvement qui se propage à la surface de l'eau.

b/ Comparer les mouvements de deux points de la surface de l'eau situés sur une demi-droite Ox, distants de 7,5 cm.

4°) On fixe à la partie inférieure de M, à l'aide d'un système de masse négligeable, deux pointes distantes de 60 cm. Le mouvement de M étant toujours supposé le même que dans la question 2°, les pointes viennent frapper la surface de l'eau en O_1 et O_2.



a/ Décrire qualitativement, en s'aidant d'un schéma, le phénomène observé.

b/ Préciser l'état d'un point P de la surface de l'eau situé à 90 cm de O_1 et à 37,5 cm de O_2.

(Baccalauréat)

3 -

1°) Un diapason entretenu électriquement vibre transversalement avec une fréquence N = 50 Hz. Sachant que l'am-

plitude des vibrations des extrémités de ses branches est 2 mm, écrire l'équation du mouvement de l'une de ces extrémités.

2°) Une corde est tendue horizontalement entre une poulie fixe A, et l'une des branches B du diapason précédent placé de telle sorte que le déplacement de B soit perpendiculaire à la corde. Au delà de la poulie, la corde supporte un poids P. La longueur AB vaut 1 mètre. Lorsque le poids P prend la valeur 40 newtons, la corde vibre fortement en seul fuseau.

a/ Calculer la célérité des ondes transversales le long de la corde.

b/ La célérité des ondes transversales le long de la corde a pour expression

$$V = \sqrt{\frac{P}{\mu}}$$

en mètres par seconde, P désignant le poids tenseur exprimé en newtons et μ la masse par unité de longueur de la corde, en kilogramme par mètre.

Pour quelles valeurs de P le fil se partage-t-il en 2, 3 ou 4 fuseaux ?

Représenter dans les trois cas l'aspect de la corde et préciser les distances des noeuds et ventres à l'extrémité A.

3°) A l'une des branches du diapason on fixe une fourche dont les pointes verticales O_1 et O_2 trempent légèrement dans l'eau.

a/ Décrire les phénomènes observés à la surface de l'eau

b/ Quel est le mouvement d'un point M dont les distances à O_1 et O_2 sont $d_1 = 2,74$ cm et $d_2 = 3,70$ cm ? La célérité des vibrations transversales à la surface de l'eau est égale à 32 cm/s.

(Baccalauréat)

4 - L'extrémité A d'une lame vibrante horizontale est animée d'un mouvement vertical rectiligne sinusoïdal d'amplitude $a = 2.10^{-3}$ m et de fréquence $f = 100$ Hz.

A/ On fixe en A une corde AB horizontale à laquelle la la lame impose des vibrations transversales. Une onde se propage à la vitesse V = 20 m/s avec une amplitude constante. L'extrémité B de la corde est placée de telle façon qu'on puisse négliger la réflexion des ondes.

1°) Ecrire l'équation horaire du mouvement de A (on prendra comme date origine l'instant où débute le mouvement, A quittant sa position d'équilibre dans le sens des élongations positives).

2°) Indiquer où sont les points de la corde qui vibrent en phase avec A.

3°) Donner l'équation horaire du mouvement d'un point M situé à une distance d = 0,30 m de A. Comparer le mouvement de M à celui de A.

B/ L'extrémité B de la corde est maintenant fixe. Les ondes émises par la même source A se réfléchissent en B. La corde AB a une longueur ℓ = 1,60 m et la vitesse de propagation des ondes est dans ce cas V' = 40 m/s .

1°) Décrire le phénomène observé en admettant que A est un noeud de vibration et représenter l'aspect de la corde.

2°) Sachant que la vitesse de propagation des ondes est porportionnelle à la racine carrée de la tension F de la corde, qu'observe-t-on:

a - lorsque la tension est quatre fois plus grande?

b - lorsque la tension est deux fois plus grande ?

C/ On retire la corde puis on fixe à la lame une tige supportant deux pointes distante de b = 4.10^{-2}m qui produisent en deux points S_1 et S_2 de la surface d'un liquide deux pertubations transversales sinusoïdales en phase d'amplitude a = 2.10^{-3} m et de fréquence 100 Hz. La vitesse de propagation des ondes à la surface du liquide est V" = 0,60 m/s. On supposera que la propagation à partir de chacune des pointes se fait à amplitude constante.

1°) Calculer le nombre de franges d'amplitude maximale qui se forment à la surface du liquide.

2°) Déterminer l'amplitude vibratoire aux deux points suivants :

- P situé à $3,15.10^{-2}$ m de S_1 et $4,35.10^{-2}$ m de S_2.

- Q situé à $3,15.10^{-2}$ m de S_1 et $4,05.10^{-2}$ m de S_2.

3°) En utilisant la construction de Fresnel, déterminer l'amplitude et le déphasage par rapport aux sources, d'un point N situé à $3,15.10^{-2}$ m de S_1 et $3,00.10^{-2}$ m de S_2 .

(Baccalauréat).

Chapitre 23

LES RADIATIONS LUMINEUSES

I - DISPERSION DE LA LUMIERE PAR UN PRISME.

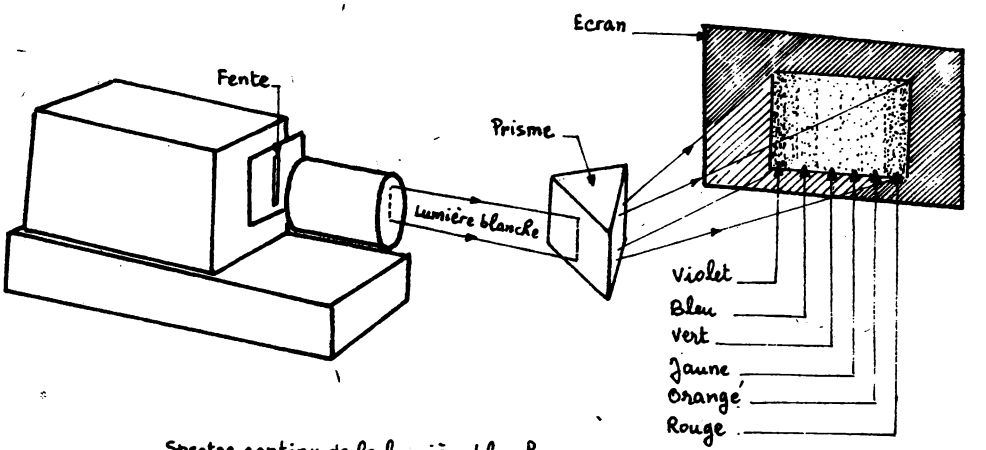
1°) Les radiations visibles.

A la fin du 17 ième siècle, Newton réalise une série d'expériences d'optique décrites dans son "Traité sur la lumière et les couleurs". Il démontre que la lumière blanche du soleil est composée d'un ensemble de lumières colorées :

"Dans une chambre fort obscure, ayant fait dans le volet d'une des fenêtres un trou rond ... j'appliquai à ce trou un prisme de verre ..."

a/ Décomposition de la lumière blanche.

Réalisons l'expérience de Newton à l'aide du montage représenté ci-dessous où la lumière blanche du soleil est remplacée par celle du filament de la lampe d'un projecteur de diapositives :



Spectre continu de la lumière blanche.

Après avoir formé l'image d'une fente placée dans le projecteur de diapositives, on interpose un prisme de verre. La lumière est réfractée par le prisme et forme un spectre continu, dont les couleurs passent progressivement du rouge au violet, sans transition.

L'interprétation est la suivante :

1°) La lumière blanche est formée d'un ensemble de lu-

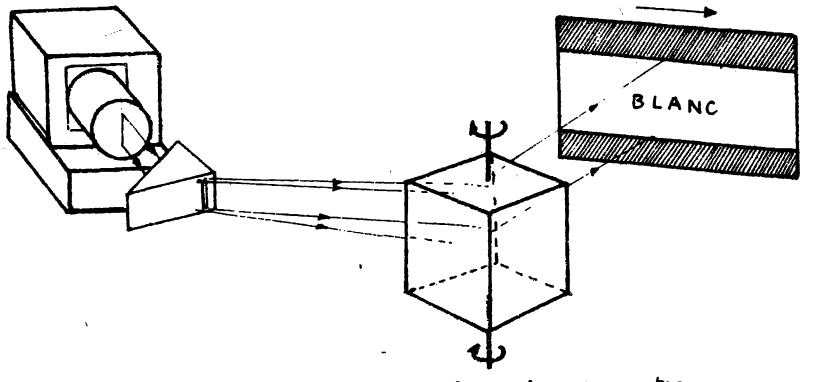
mières colorées. Chaque lumière colorée est une lumière monochromatique. La lumière blanche est polychromatique.

2°) La réfraction de la lumière par le prisme dépend de sa couleur (la réfrangibilité d'une lumière dépend de sa couleur). Le rouge est le moins réfracté, puis dans l'ordre, le jaune, le vert, le bleu et le violet qui est le plus réfracté.

b/ Recombinaison des couleurs.

Pour prouver que les lumières colorées rendues visibles grâce au prisme sont contenues dans le blanc, Newton mélange les différentes couleurs et obtient à nouveau du blanc.

On peut réaliser l'expérience ainsi :



Reconstitution du blanc en combinant les couleurs du spectre.

Entre le prisme et l'écran, on interpose un miroir tournant. Le spectre se déplace rapidement sur l'écran et l'oeil qui ne parvient plus à séparer les différentes couleurs voit une bande blanche.

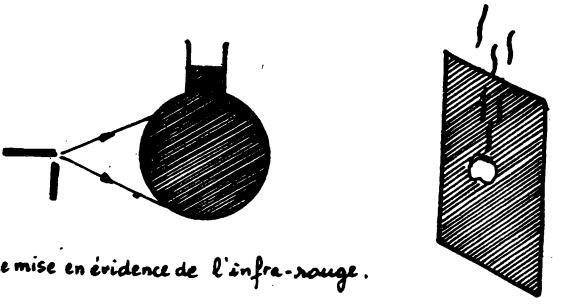
2°) Les extensions du spectre.

a/ L'infra-rouge.

En 1801, William Herschel étudiant les propriétés thermiques du spectre à l'aide d'un termomètre très sensible, montre que l'échauffement augmente à mesure que l'on s'éloigne du violet, pour atteindre un maximum au delà du spectre visible, du côté du rouge. Cette constatation devait conduire à la découverte du rayonnement infra-rouge, existant dans la lumière blanche, mais non

visible par l'oeil.

Expérience mettant en évidence l'infra-rouge:



Une mise en évidence de l'infra-rouge.

Devant l'arc électrique, on place un ballon contenant de l'iode dissous dans du sulfure de zinc (ou du tétrachlorure de carbone). La solution arrête la lumière visible, mais laisse passer l'infra-rouge. Le ballon fait office de lentille convergente. Au point de convergence des rayons, on place un papier noir qui s'écnauffe au point de s'enflammer.

b/ L'ultra-violet.

En 1801 également, le physicien allemand Ritter, projetant un spectre solaire sur une plaque couverte de nitrate d'argent, constate que le noircissement s'étendait au delà du spectre visible, du côté du violet. (les sels d'argent noircissent sous l'action de la lumière). Cette constatation conduisit à la découverte de l'ultra-violet, rayonnement existant dans la lumière blanche du Soleil ou de l'arc électrique, mais invisible de l'oeil humain. On le met facilement en évidence en classe car il rend luminescentes un certain nombre de substances, en particulier le platinocyanure de baryum.

3°) Vitesse de la lumière.

Les expériences d'interférences que nous décrirons au chapitre suivant conduisent à attribuer à la lumière un caractère vibratoire. La lumière se propage sous forme d'ondes sinusoïdales dont la célérité dans le vide est une constante, indépendante de la couleur.

Sa valeur est :

$$c = 299\,780 \text{ km/s.}$$

Nous retiendrons la valeur c = 300 000 km/s fournie avec une erreur relative inférieure au millième .

$$c = 300\ 000 \text{ km/s} = 3{,}000.10^{8} \text{ m/s}$$

4°) Les longueurs d'onde.

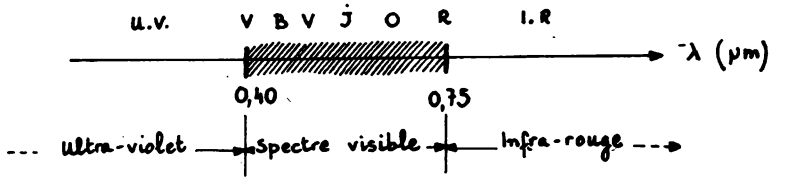
Une lumière de couleur donnée, ou radiation monochromatique, est caractérisée par sa longueur d'onde λ dans le vide.

Le violet sombre, à la limite du spectre visible a une longueur d'onde de l'ordre de 0,40 µm.

$$1 \text{ µm (micromètre)} = 10^{-6} \text{ m.}$$

Le rouge sombre, à la limite du spectre visible a une longueur d'onde de l'ordre de 0,75 µm.

Le spectre visible est donc formé des radiations dont les longueurs d'onde sont comprises entre 0,40 µm et 0,75 µm.



On ne peut pas définir de limite aux différents groupes de couleurs puisque l'on passe de l'une à l'autre graduellement, sans transition. Les valeurs suivantes sont données à titre indicatif :

- Violet: entre 0,40 µm et 0,44 µm environ ;
- Bleu : entre 0,44 µm et 0,50 µm environ ;
- Vert : entre 0,50 µm et 0,57 µm environ ;
- Jaune : entre 0,57 µm et 0,60 µm environ ;
- Orangé: entre 0,60 µm et 0,63 µm environ ;
- Rouge : entre 0,63 µm et 0,75 µm environ ;

L'ultra-violet est le domaine des radiations optiques de longueurs d'onde inférieures à 0,40 µm.

L'infra-rouge est le domaine des radiations optiques de longueurs d'onde supérieures à 0,75 µm.

6°) Fréquence d'une radiation.

La fréquence ν (nu) d'une radiation est liée à sa longueur d'onde dans le vide par :

$$\lambda = c\,T = \frac{c}{\nu}$$

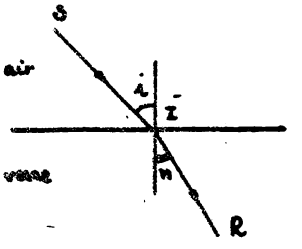
Exemple : la fréquence de la radiation jaune de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0{,}579\ \mu m \approx 5{,}79.10^{-7}$ m est :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3{,}00.10^{8}\ m/s}{5{,}79.10^{-7} m} = 5{,}18.10^{14}\ Hz.$$

II- L'INDICE DE REFRACTION.

1°) Définition

Un rayon lumineux passant d'un milieu transparent à un autre subit la réfraction. Par exemple lorsqu'il passe de l'air dans le verre.



La réfraction est due à un changement de vitesse de propagation de l'onde lumineuse (Voir réfraction au chapitre 22, § I).

Dans un milieu transparent quelconque:

- La lumière se propage moins vite que dans le vide.
- La vitesse de propagation dépend de la couleur.

(alors que dans le vide, elle est indépendante de la couleur).

On appelle indice de réfraction absolu d'une substance transparente pour une radiation donnée, le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide à la vitesse de propagation de cette radiation dans la substance :

$$n = \frac{c}{v}$$

Notons bien que l'indice d'une substance transparente dépend de la radiation qui la traverse.

L'indice est toujours supérieur à 1 puisque c'est dans le vide que la lumière se propage le plus vite.

La connaissance de l'indice absolu d'une substance pour une radiation donnée permet de calculer la vitesse de la radiation dans cette substance et inversement. Par exemple, pour la radiation jaune $\lambda = 0{,}579\ \mu m$, l'indice du verre ordinaire est $n = 1{,}52$. La vitesse de cette lumière jaune dans le verre est :

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3.10^8}{1{,}52} = 1{,}97.10^8\ m/s$$

2°) Indice de l'air.

Pour la radiation jaune, par exemple, l'indice de l'air est $n = 1{,}00029$, très voisin de 1, ce qui signifie que la vitesse de propagation dans l'air est très voisine de celle du vide.

Sauf indication contraire, nous confondrons les notions suivantes :

- Vitesse de propagation dans l'air et vitesse dans le vide .
- Indice par rapport à l'air et indice absolu ;
- Longueur d'onde dans l'air et longueur d'onde dans le vide.

Ce dernier point appelle une remarque : la réfraction modifie la longueur d'onde (Voir chapitre 22, § I). En passant d'un milieu vers un milieu où la vitesse de propagation est plus faible, les fronts d'onde se resserrent. En d'autres termes, la longueur d'onde diminue. La longueur d'onde d'une radiation donnée est toujours inférieure à sa longueur d'onde dans le vide lorsqu'elle se trouve dans un milieu transparent quelconque.

En revanche, la fréquence ne dépend que de la source des vibrations (les atomes pour la lumière) : la fréquence de la lumière reste constante lorsqu'elle passe d'un milieu transparent à un autre.

On peut donc caractériser une radiation manochromatique par sa fréquence ou par sa longueur d'onde dans le vide.

Chapitre 24

INTERFÉRENCES LUMINEUSES

NATURE VIBRATOIRE DE LA LUMIERE

Avant d'aborder l'étude des interférences lumineuses, évoquons le grand débat sur la nature de la lumière qui qui passionna les savants des 17 ième et 18 ième siècles.

Selon Newton (1642 - 1727), la lumière était l'émission de corpuscules très petits et très rapides, non matériels et par conséquent soustraits à l'action de la pesanteur, se propageant en ligne droite dans tout milieu transparent et homogène.

Selon Huygens (1629 - 1695) la lumière consistait en la propagation de vibrations mécaniques, analogues à celles du son qui se transmet dans l'air ou à celles des vagues à la surface de l'eau.

Pendant tout le 18 ième siècle, la plupart des physiciens adoptent la théorie de l'émission qui permettait de représenter de façon satisfaisante les phénomènes optiques les plus courants: couleurs du spectre continu, réflexion et réfraction.

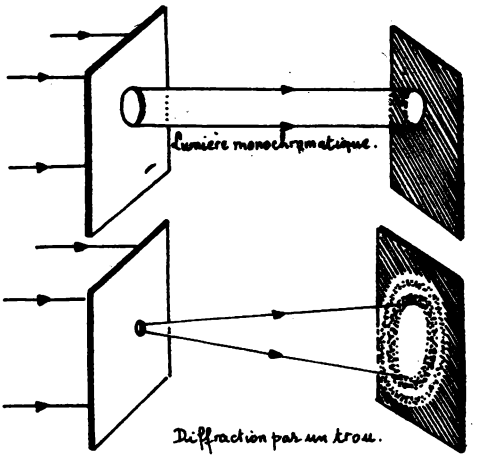
Toutefois, pour expliquer le phénomène de la diffraction de la lumière, seule convenait la théorie ondulatoir de Huygens, développée au début du 19 ième siècle par Young (1773 - 1829) et surtout par Fresnel (1788 - 1827).

I - DIFFRACTION DE LA LUMIERE.

1°) Diffraction par un trou.

Lorsqu'un faisceau lumineux traverse un trou de plusieurs millimètres de diamètre, il forme sur un écran une petite tache à bords nets (première figure ci-dessous).

Mais si l'on diminue le diamètre du trou jusqu'à une fraction de millimètre, la figure formée sur l'écran devient plus compliquée. La tache s'élargit d'autant plus que le trou devient plus petit et elle s'entoure de quelques anneaux sombres et brillants (deuxième figue ci-dessous) C'est un phénomène de diffraction, qui devient visible chaque fois que la lumière doit traverser une ouverture étroite.

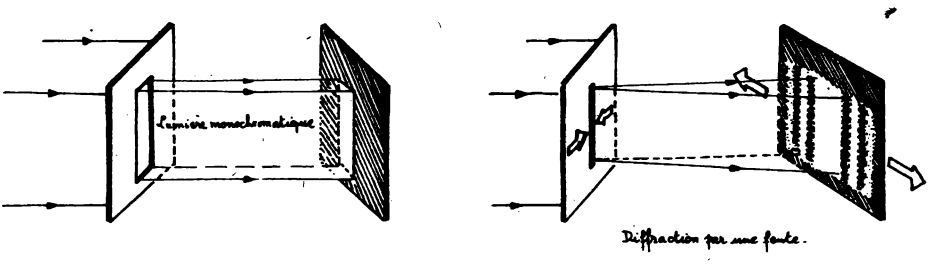


2°) Diffraction par une fente.

Lorsqu'un faisceau de lumière monochromatique traverse une fente large de plusieurs millimètres, il se forme sur un écran une tache à bords nets (première figure ci-dessous).

Mais si l'on diminue progressivement la largeur de la fente jusqu'à une fraction de millimètre, on voit apparaître sur l'écran une figure de diffraction: la tache s'élargit et elle s'encadre de franges sombres et lumineuses (deuxième figure ci-dessous).

La tache, que nous appellerons frange centrale de diffraction est beaucoup plus lumineuse que toutes les autres et deux fois plus larges qu'elles.



Plus on diminue la largeur de la fente, plus la figure de diffraction s'élargit, jusqu'à occuper la totalité de l'écran. Dans la suite de ce chapitre on ne tiendra compte que de la frange centrale de diffraction.

La diffraction est l'un des phénomènes inexplicables dans la théorie de l'émission de Newton. En revanche, on peut l'interpréter en attribuant la lumière une nature ondulatoire, mais nous sommes pas en mesure de le faire dans ce cours. Nous nous contenterons de rapprocher ce phénomène de la diffraction des ondes à la surface de l'eau lorsqu'elles doivent traverser une ouverture étroite (Chapitre 22, § I).

II- LES INTERFERENCES LUMINEUSES.

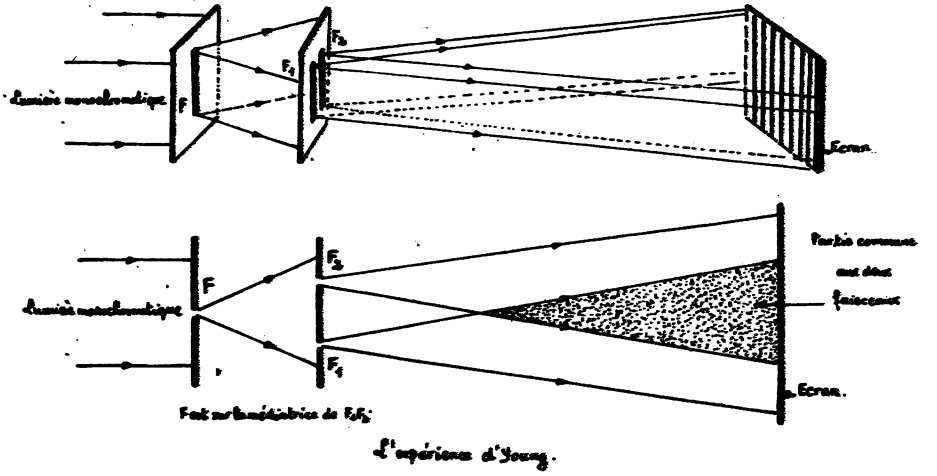
1°) L'expérience des fentes d'Young.

a/ Le montage.

En 1802, Young réalise l'expérience suivante :

Une fente très fine F est éclairée par une radiation monochromatique. Elle donne naissance à un faisceau de diffraction. Deux autres fentes, F_1 et F_2 , très fines, parallèles entre elles et parallèles à la fente F sont placées dans le faisceau de diffraction :

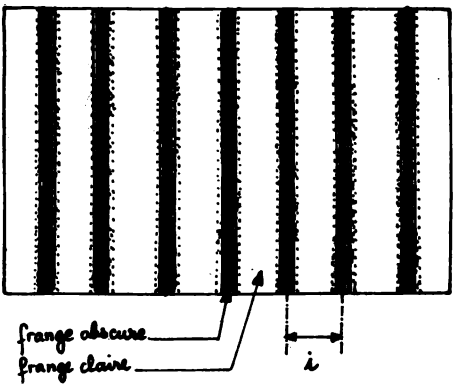
Les fentes F_1 et F_2 donnent également lieu au phénomène de diffraction. Dans la partie commune aux deux faisceaux de diffraction on place soit un écran, soit un oculaire (loupe pour observer).



b/ Les observations.

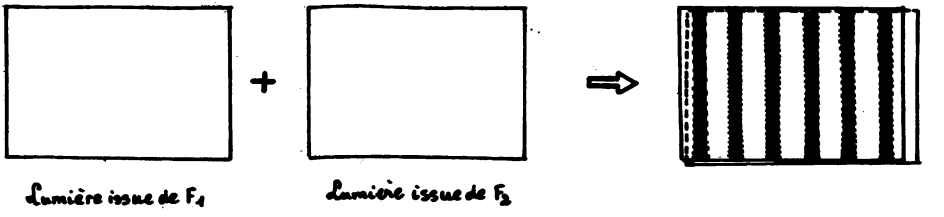
Sur l'écran apparaissent des franges alternativement obscures et lumineuses, parallèles aux fentes F_1 et F_2 et équidistantes.

Ces franges ne sont pas localisées. On peut en effet les observer dans toute la zone de l'espace où les deux faisceaux issus des deux fentes F_1 et F_2 ont une partie commune.



c/ Interprétation.

Dans les conditions particulières de cette expérience (une première fente étroite éclairant en lumière monochromatique deux autres fentes très étroites), de la lumière ajoutée à de la lumière peut donner de l'obscurité (les franges obscures). Ce qu'on peut illustrer ainsi:



On peut rapprocher ce phénomène de celui des interférences mécaniques à la surfece de l'eau où les mouvements vibratoires issus de deux sources synchrones de vibrations donnent de l'immobilité.

On explique les franges obscures en attribuant à la lumière un caractère ondulatoire: les ondes lumineuses se propagent à partir de la fente source F. Les fentes F_1 et F_2 sont alors deux sources secondaires reproduisant avec un certain retard les vibrations issues de F. Elles sont

nécessairement synchrones et cohérentes et peuvent donner lieu à un phénomène d'interférences lumineuses. Les franges obscures correspondent à la superposition d'ondes lumineuses en opposition de phase et les franges brillantes à la superposition d'ondes lumineuses en phase.

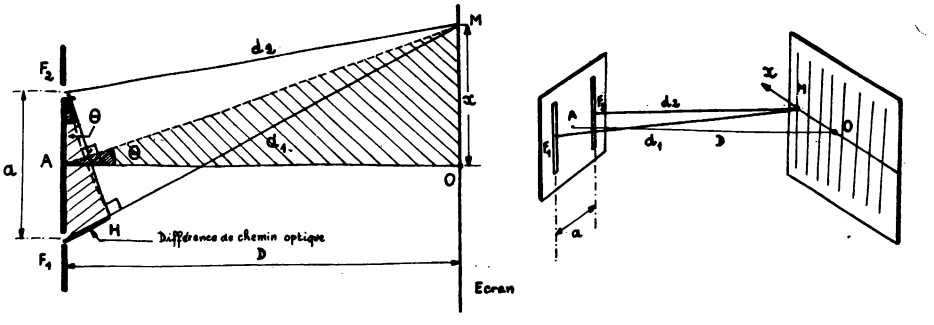
2°) Le calcul de l'interfrange.

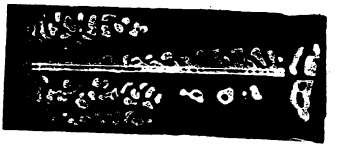
a/ Définition.

L'interfrange, i , est la distance qui sépare les centres de deux franges brillantes consécutives ou les centres de deux franges sombres consécutives.

Soit a = F_1 F_2, l'écartement des fentes; D = OA, la distance des fentes à l'écran d'observation. OA est la médiatrice de F_1 F_2 .

Un point M de l'écran est repéré par OM = x. M est à la distance d_1 de F_1 et à la distance d_2 de F_2.





fentes d'young en ...

Nous nous proposons de déterminer les valeurs de x correspondant à des franges brillantes et celles correspondant à des franges obscures. Nous en déduirons l'interfrange i ;

b/ Calcul de la différence de chemin optique.

Soit $d_1 = F_1 M$ le chemin optique entre F_1 et M et $d_2 = F_2 M$ le chemin optique entre F_2 et M. La différence de chemin optique est la différence:

$$\delta = d_1 - d_2 = F_1 M - F_2 M$$

Traçons l'arc de cercle de centre M et de rayon d_2 ; il coupe $F_1 M$ en H. On a $HM = F_2 M$. La différence de chemin optique s'écrit donc :

$$\delta = F_1 M - F_2 M = F_1 M - HM = F_1 H$$

$$\delta = F_1 H$$

Dans tout montage d'Young, la distance des fentes à l'écran, D, est de l'ordre du mètre et l'écartement des fentes, a, est de l'ordre du millimètre (La figure ne respecte pas les proportions). On peut donc faire un certain nombre d'approximations :

- On confond l'arc de cercle $\overset{\frown}{F_2 H}$ avec le segment de droite $\overline{F_2 H}$,

- Le segment de droite MA est orthogonal à $\overset{\frown}{F_2 H}$ (parce qu'il passe par le centre M). On peut considérer que MA est perpendiculaire au segment de droite $\overline{F_2 H}$.

- Les deux angles hachurés sont égaux à θ , car leurs côtés sont perpendiculaires deux à deux.

- Enfin, l'angle θ étant très petit (parceque D est de l'ordre du mètre et x de l'ordre du centimètre), on a:

$$\sin\theta \simeq \operatorname{tg}\theta \simeq \theta \text{ compté en radians.}$$

Dans le triangle $F_1 F_2 H$: $F_1 H = F_1 F_2 \sin\theta$

$$\delta = a \sin\theta \simeq a\theta$$

Dans le triangle AOM : $\operatorname{tg}\theta \simeq \theta = \frac{OM}{OA} = \frac{x}{D}$

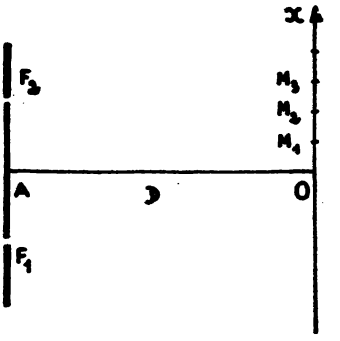
Portons $\theta = \frac{x}{D}$ dans l'expression $\delta = a.\theta$. On obtient

$$\boxed{\delta = a \frac{x}{D}}$$

c/ Points de l'axe Ox appartenant à des franges brillantes.

L'éclairement d'un point du champ d'interférences est maximal s'il reçoit des vibrations en phase en provenance des deux fentes. La différence des chemins optiques est alors égale à un nombre entier de longueurs d'onde, comme nous l'avons établi pour les interférences mécaniques:

$$\delta = d_1 - d_2 = k\lambda. \qquad k \in \mathbb{Z}$$



En particulier, sur l'axe Ox; on a:

$$\frac{ax}{D} = k\lambda \Longleftrightarrow \boxed{x = k \frac{\lambda D}{a}}$$

- Si $k = 0$, $x = 0$. C'est le point O appartenant à la frange d'ordre 0 ou frange centrale brillante.

- Si $k = 1$, $x = \frac{\lambda D}{a}$. C'est le point M_1 appartenant à la frange brillante d'ordre 1.

- si $k = 2$, $x = \frac{\lambda D}{a}$. C'est le point M_2 appartenant à la frange brillante d'ordre 2. Etc.

L'interfrange, distance séparant deux centres de franges brillantes vaut donc :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$

Dans un système d'interférences en lumière monochromatique, l'interfrange est proportionnel à la longueur d'onde de la radiation utilisée, proportionnel à la distance des sources à l'écran et inversement proportionnel à l'écartement des sources.

d/ Points de l'axe Ox appartenant à des franges obscures

L'éclairement d'un point du champ d'interférences est nul s'il reçoit des vibrations en opposition de phase en provenance des deux sources. La différence des chemins optiques est alors égale à un nombre impair de demi-longueurs d'onde.

$$\delta = d_1 - d_2 = (2k' + 1)\frac{\lambda}{2} \qquad k' \in Z$$

En particulier, sur l'axe Ox :

$$a\frac{x}{D} = (2k' + 1)\frac{\lambda}{2} \Longleftrightarrow \boxed{x = (2k' + 1)\frac{D}{2a}}$$

- Si $k' = 0$, $x = \frac{1}{2}\frac{\lambda D}{a}$. C'est le point équidistant de O et M_1 , appartenant à la première frange obscure.

- Si $k' = 1$, $x = \frac{3}{2}\frac{\lambda D}{a}$. C'est le point équidistant de M_1 et M_2 , appartenant à la deuxième frange obscure. Etc .

On peut grouper les deux formules précédentes en une seule :

$$x = p \frac{\lambda D}{a}$$

- p entier: les franges sont brillantes.
- p demi-entier: les franges sont obscures.

Deux franges obscures consécutives sont distantes de l'interfrange $i = \lambda D/a$.

Chaque frange obscure est équidistante des deux franges brillantes qui l'encadrent.

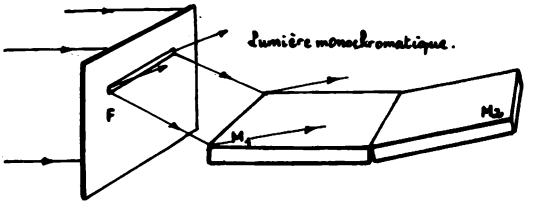
3°) Les miroirs de Fresnel.

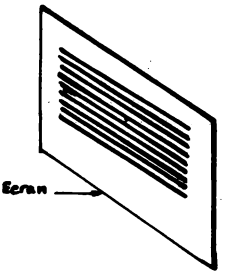
Le dispositif des fentes d'Young nous a permis d'établir le principe d'obtention de phénomènes d'interférences: la lumière issue d'une source unique (la fente F), suit deux chemins différents (en passant par F_1 et F_2), puis elle se recombine et interfère.

Plusieurs autres dispositifs permettent la division de la lumière et sa recombinaison, en particulier celui des miroirs de Fresnel.

a/ Le dispositif.

Il est formé de deux miroirs plans M_1 et M_2, dont les surfaces réfléchissantes forment entre elles un angle très voisin de 180°.



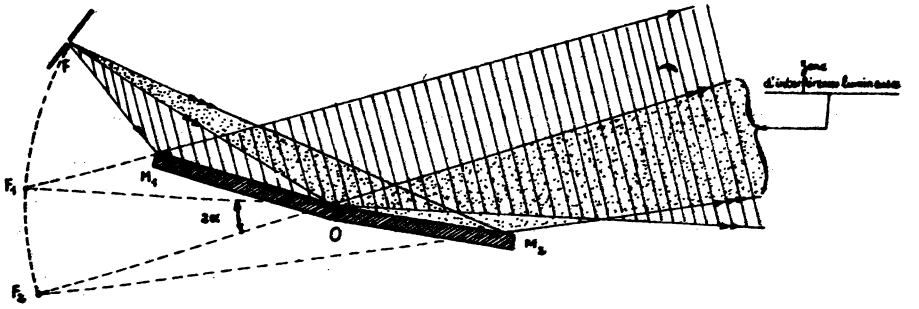


Une fente F, très étroite, parallèle à l'arête commune des deux miroirs est éclairée en lumière monochromatique. Elle donne un faisceau de diffraction dont une

partie est réfléchie par le miroir M_1 et une autre partie par le miroir M_2. Les deux faisceaux réflechis ont une partie commune dans laquelle on peut observer des franges d'interférences parallèles à la fente F.

b/ Construction des faisceaux lumineux.

La partie hachurée du faisceau se réfléchit en semblant provenir de F_1 , image virtuelle de F donnée par M_1 , la partie grisée du faisceau se réfléchit en semblant provenir de F_2 , image virtuelle de F donnée par M_2 .

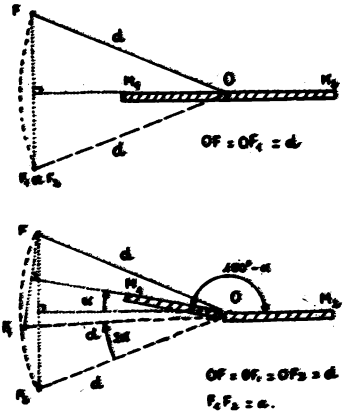


c/ Ecartement des images virtuelles.

La distance de la fente F à l'arête commune des miroirs est d et l'angle des plans des miroirs $180° - \alpha$.

Déterminons l'écartement des images virtuelles F_1 et F_2 en fonction de α et d.

Supposons que les surfaces réfléchissantes des miroirs sont initialement dans un même plan. Les deux images virtuelles sont confondues (première figure).



Le miroir M_2 restant fixe, on fait tourner le miroir M_1 d'un petit angle α autour de l'arête commune dont la trace dans le plan de figure est O. L'image virtuelle F_1 tourne alors de l'angle 2α (programme d'optique de 4 ième année).

Soit d la distance de O aux images F_1 et F_2 . L'angle 2α étant très petit (de l'ordre de un degré), nous assimilerons l'arc de cercle $\overset{\frown}{F_1 F_2}$ au segment de droite $\overline{F_1 F_2}$:

$$a = \overline{F_1 F_2} \simeq \overset{\frown}{F_1 F_2} = 2\alpha\, d$$

$$\boxed{a = 2\alpha\, d}$$

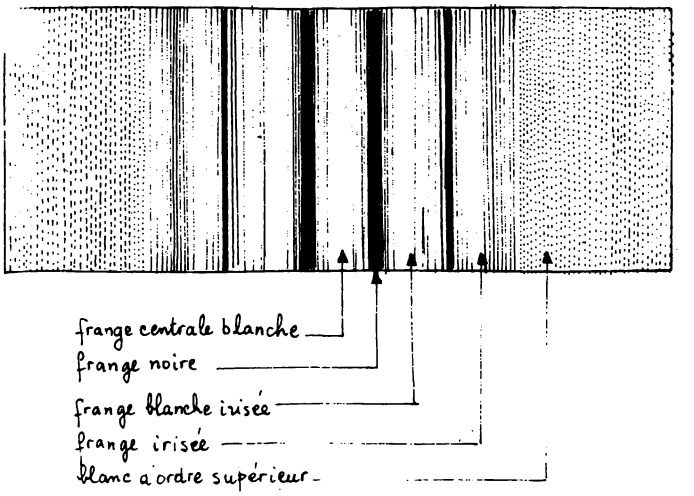
Les images virtuelles F_1 et F_2 jouent le même rôle que les fentes d'Young. En particulier, si l'on appelle D leur distance à l'écran d'observation, les calculs de la différence de chemin optique et de l'interfrange conduisent aux mêmes formules que pour le dispositif d'Young.

III-INTERFERENCES EN LUMIERE BLANCHE.

1°) Description du champ d'interférences.

Si l'on éclaire en lumière blanche un dispositif interférentiel (fentes d'Young ou miroirs de Fresnel), on observe successivement en partant du centre de l'écran :

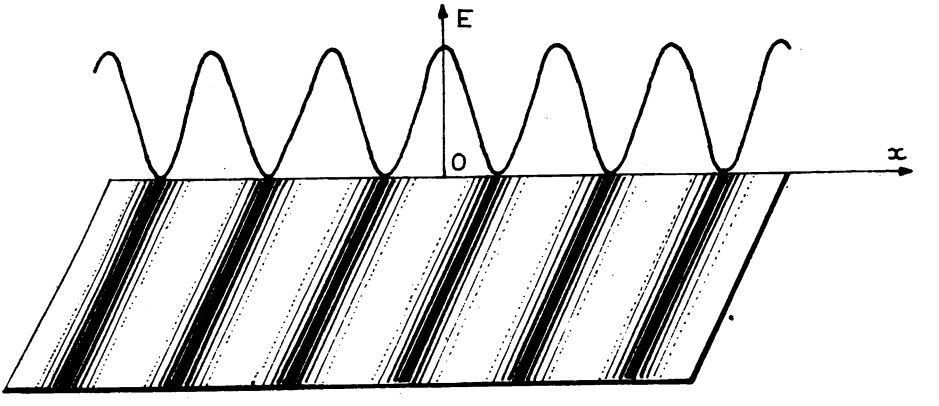
- une frange centrale blanche ;
- une frange noire ;
- une frange blanche bordée de rouge et de violet: c'est une frange irisée ;
- une ou deux franges très irisées ;
- une teinte uniforme d'un blanc sale, appelée blanc d'ordre supérieur.



2°) Interprétation.

a/ Eclairement de l'écran en lumière monochromatique.

Dans un système d'interférences en lumière monochromatique, lorsqu'on se déplace du centre d'une frange brillante au centre d'une frange obscure voisine, on passe graduellement du maximum d'éclairement à l'éclairement nul. Au système d'interférences nous avons associé dans la figure ci-dessous la courbe d'éclairement en fonction de x, distance au centre de l'écran.

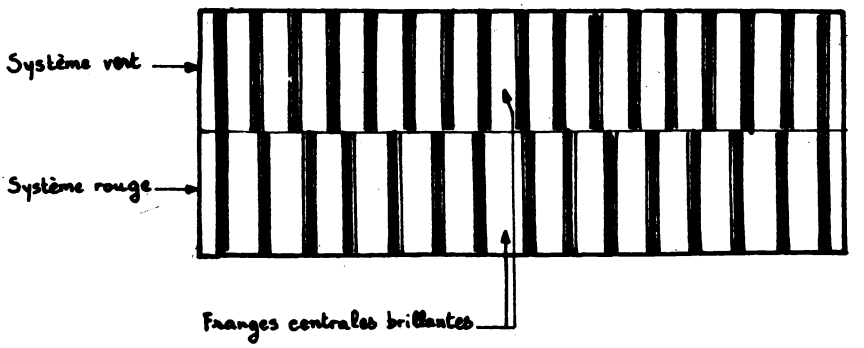


Courbe d'éclairement $E = f(x)$. Les maximums correspondent aux centres des franges brillantes et les valeurs nulles aux centres des franges obscures.

b/ Eclairement de l'écran avec deux couleurs.

Supposons l'écran éclairé à sa partie supérieure en lumière verte ($\lambda_v \simeq 0{,}55\,\mu m$) et à sa partie inférieure en lumière rouge ($\lambda_R \simeq 0{,}64\ \mu m$). Il suffit pour cela de réaliser l'expérience en lumière blanche et de couvrir la partie supérieure de l'écran par un filtre vert et sa partie inférieure par un filtre rouge.

L'aspect de l'écran est représenté sur la figure ci-dessous :



On observe la coïncidence des franges centrales brillantes des deux système. Les premières franges noires sont légèrement décalées, parce que l'interfrange rouge est supérieur à l'interfrange vert.

En effet: $\lambda_R > \lambda_V \Longleftrightarrow \lambda_R \frac{D}{a} > \lambda_V \frac{D}{a}$

Le décalage augmente jusqu'à ce qu'une frange noire d'un système se superpose à une frange brillante de l'autre. C'est l'anticoïncidence. Plus loin, il y a coïncidence de la septième frange noire du système rouge avec la huitième du système vert.

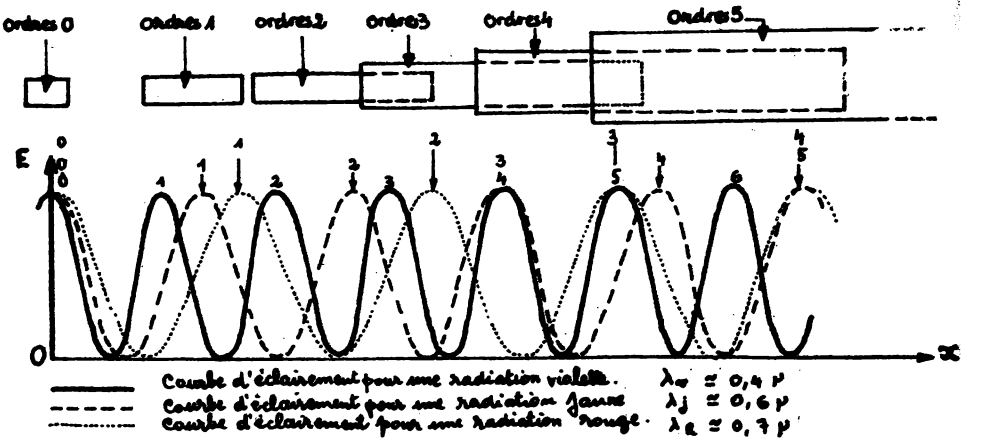
Nous voyons qu'à l'exception des franges centrales, si deux franges brillantes ou noires coïncident elles sont nécessairement d'ordres différents.

Si l'écran reçoit simultanément les deux radiations sur toute sa surface, les deux systèmes précédents se

superposent. La frange centrale est brillante (jaune, car l'addition du rouge et du vert donne du jaune); elle est suivie d'une frange noire étroite. A l'anticoïncidence, il n'y a plus de franges noires, mais des franges alternativement rouges et vertes. A la coïncidence, l'aspect est le même qu'au centre de l'écran.

c/ Eclairement de l'écran en lumière blanche.

La lumière blanche est la superposition d'une infinité de radiations monochromatiques de longueurs d'onde comprises entre 0,40 µm et 0,75 µm. Chaque radiation donne son propre système d'interférences avec son propre interfrange. Pour représenter la distribution des franges et leur superposition, utilisons les courbes d'éclairement:



Les courbes d'éclairement ont été tracées pour trois radiations: une violette, une jaune et une rouge. Il y en a en fait une infinité. La figure étant symétrique par rapport aux franges centrales, nous n'avons représenté qu'un seul côte de l'écran.

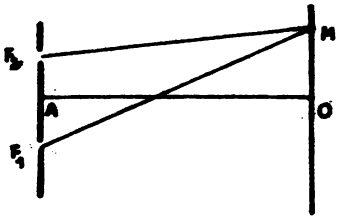
Toutes les franges centrales brillantes d'ordre zéro se superposent au centre de l'écran. La frange centrale est donc blanche. Les franges d'ordre 1 sont décalées. La seconde frange brillante est donc bordée de violet vers l'intérieur et de rouge vers l'extérieur. Les franges d'ordre 2 et d'ordre 3 commencent à se chevaucher.

Plus loin, en un point donné de l'écran, se superposent de nombreuses franges brillantes de différentes couleurs et de nombreuses franges obscures correspondant à d'autres radiations. Le résultat est un blanc impur puisqu'il ne comporte pas toutes les couleurs du spectre.

l'appelle blanc d'ordre supérieur car on l'observe des points de l'écran ou les ordres d'interférences sont élevés.

Exercice:

On réalise un système d'interférences en lumière blanche sur un écran placé à 2 m de deux sources cohérentes synchrones F_1 et F_2 distantes de 1 mm. Calculer le nombre de franges obscures qui se superposent en un point M situé à 5 mm de la frange centrale. Calculer les longueurs d'onde des radiations correspondantes.



Posons $F_1F_2 = a$, $AO = D$ et $OM = x$.

La différence de chemin optique au point M est :

$$F_1M - F_2M = a\,\frac{x}{D}$$

Les radiations éteintes ont une longueur d'onde λ telle que :

$$\frac{a\,x}{D} = (2k + 1)\,\frac{\lambda}{2}$$

avec $\frac{a\,x}{D} = \frac{1.10^{-3} \times 5.10^{-3}}{2} = 2{,}5.10^{-6}$ m;

$$(2k + 1)\,\frac{\lambda}{2} = 2{,}5\ \mu m \quad (1)$$

Les longueurs d'onde absentes sont celles qui satisfont à la relation (1) et qui sont comprises entre 0,40 μm et 0,75 μm.

$$0{,}40\ \mu m \leqslant \lambda < 0{,}75\ \mu m \Rightarrow 0{,}40\ \mu m \leqslant \frac{5}{2k+1} \leqslant 0{,}75\ \mu m$$

Cette double inégalité conduit à :

$k \leqslant 5{,}75$ avec k entier.

$k \geqslant 2{,}8$ avec k entier.

Il y a trois valeurs possibles pour k : $k \in (3,4,5.)$

En portant ces valeurs dans la relation (1), on obtient les valeurs correspondantes des longueurs d'onde abscentes :

$\lambda_3 = \frac{5}{7} = 0{,}714\ \mu m$; $\lambda_4 = \frac{5}{9} = 0{,}555\ \mu m$; $\lambda_5 = \frac{5}{11} = 0{,}455\ \mu m$.

1°) Obtention d'interférences.

Pour obtenir des interférences lumineuses, il faut que la lumière issue d'une source unique (fente très fine F) suive deux chemins différents avant de se recombiner.

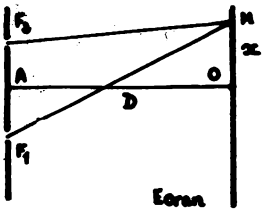
Avec le dispositif d'Young, elle passe par deux fentes F_1 et F_2 , qui sont deux sources synchrones et cohérentes.

Avec les Miroirs de Fresnel, la lumière issue de la fente source F se réfléchit sur deux miroirs et donne deux images virtuelles F_1 et F_2 qui jouent le même rôle que les fentes d'Young.

2°) La lumière est un phénomène vibratoire.

La diffraction de la lumière à travers une fente étroite et les phénomènes d'interférences ne s'expliquent que si l'on attribue à la lumière un caractère ondulatoire.

3°) Différence de chemin optique.



En un point M de l'écran, la différence de chemin optique est :

$$\delta = F_1M - F_2M = \frac{a\,x}{D}$$

Elle ne dépend que de la géométrie du dispositif et non de la radiation utilisée.

Pour des miroirs de Fresnel d'angle $(180° - \alpha)$ et dont l'arête commune est à la distance d de la fente, l'écartement des images virtuelle est:

$$a = 2\alpha\, d$$

4°) L'interfrange en lumière monochromatique.

L'interfrange, distance entre les centres de deux franges brillantes voisines ou de deux franges sombres voisines, est proportionnel à la longueur d'onde de la radiation utilisée, proportionnel à la distance des fentes à l'écran et inversement proportionnel à l'écartement

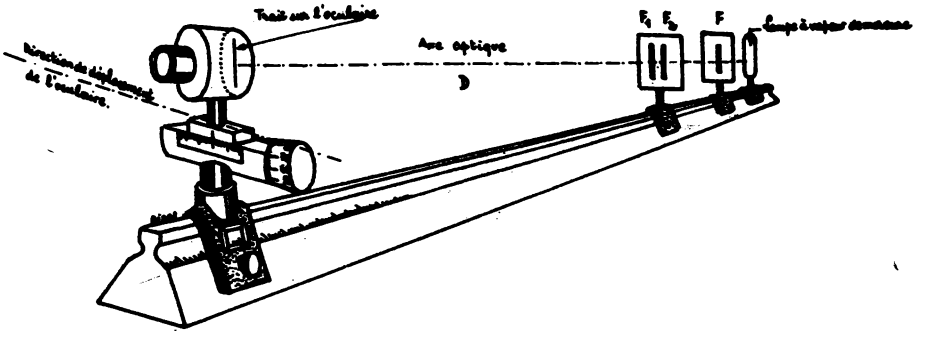
des fentes.

$$i = \lambda \frac{D}{a}$$

5°) Interférences en lumière blanche.

A cause du décalage progressif des systèmes d'interférences des différentes radiations, on observe une frange blanche centrale, une frange noire, des franges irisées et le blanc d'ordre supérieur.

1 - On réalise des franges d'interférences à l'aide du dispositif d'Young représenté sur la figure ci-dessous, éclairé par une lampe à vapeur de mercure.



L'oeil est surtout sensible à deux radiations de cette lampe :

- la radiation jaune, de longueur d'onde $\lambda_1 = 0{,}578 \mu m$
- la radiation verte, de longueur d'onde λ_2 .

Un premier filtre ne laisse passer que la radiation jaune. Les franges sont observées dans un plan situé à la distance D des fentes à l'aide d'un oculaire muni d'un fin trait, parallèle aux franges et placé dans le plan d'observation. Grâce à une vis micrométrique, l'oculaire peut subir des déplacements perpendiculaires à l'axe optique, mesurés à l'aide d'un vernier au 1/100 mm.

1°) On superpose le trait de l'oculaire au centre d'une première frange sombre. La graduation correspondante est 3,44 mm ± 0,03 mm. On l'amène ensuite au centre de la trente et unième frange sombre, qui correspond à la graduation 25,16 mm ± 0,03 mm. Calculer l'interfrange i_1 du système d'interférences en lumière jaune ainsi que son incertitude absolue.

2°) On remplace le premier filtre par un second qui ne laisse passer que la radiation verte. On mesure de la même façon l'interfrange i_2.

- Première frange sombre : graduation 4,04 mm ± 0,03 mm.
- Trente et unième frange sombre : graduation 24,56 mm ± 0,03 mm.

a/ Calculer i_2 ainsi que son icertitude absolue.

b/ En déduire la longueur d'onde λ_2 de la radiation verte et son incertitude absolue.

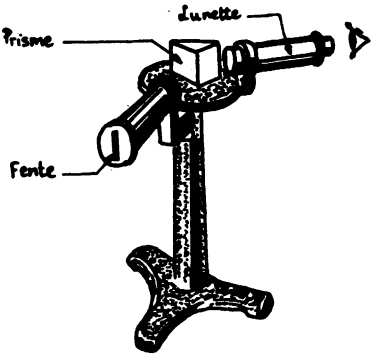
3°) On retire le filtre, de sorte que les fentes sont éclairées par les deux radiations simultanément.

a/ Quel est l'aspect du champ d'interférences ?

b/ A quelle distance x du centre du champ d'interférences une frange jaune coïncide-t-elle à nouveau avec une frange verte?

4°) Le dispositif est maintenant éclairé en lumière verte de longueur d'onde λ_2. On remplace l'oculaire par un spectroscope dont on place la fente sur la huitième frange sombre à partir de la frange brillante centrale. (le spectroscope est essentiellement formé d'une fente qui reçoit la lumière à analyser et d'un prisme qui disperse la lumière passant par la fente). Puis, sans modifier la position du spectroscope, on éclaire les fentes d'Young en lumière blanche. Combien le spectre observé à travers la lunette du spectroscope comporte-t-il de cannelures noires ?

(Le spectroscope effectue la séparation de toutes les couleurs pénétrant à travers la fente et il laisse un espace noir lorsqu'une radiation est absente, c'est-à-dire pour les franges noires occupant la position du champ où l'on a placé la fente.

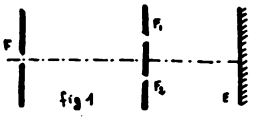


On observe donc un spectre lumineux, allant du rouge au violet, rayé de cannelures noires).

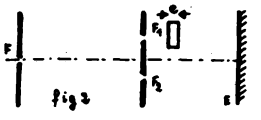
Quelles sont les longueurs d'onde correspondant à ces cannelures ? Le domaine visible s'étend de 0,400 µm à 0,750 µm.

2- Deux fentes fines et parallèles F_1 et F_2 , perpendiculaires au plan de figure, sont éclairées en lumière monochromatique, de longueur d'onde λ = 0,546 µm par une fente lumineuse qui leur est parallèle, F, située à 1 m de F_1F_2, sur la médiatrice de F_1 F_2. Un écran plan E, parallèle au plan contenant F_1 et F_2 , est placé à 2 mètres de ce dernier, comme l'indique la figure 1.

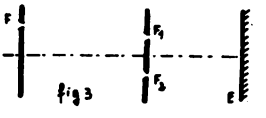
1°) Décrire succintement le phénomène observé sur l'écran E et préciser l'orientation des franges.



2°) Calculer la distance entre deux franges brillantes consécutives, sachant que la distance F_1F_2 est égale à 1 mm.



3°) Que deviendrait le système de franges si l'on couvrait l'une des fentes d'une petite lame transparente à faces parallèles d'indice 1,5 et d'épaisseur 8 µm? (figure 2). (Cette question est hors programme).



4°) On retire la lame et on déplace la fente source F de 1 cm parallèlement à elle même dans le plan parallèle à celui de F_1 et F_2 . Comment le système de franges est-il modifié ? (Figure 3). (Cette question est hors programme).

5°) F est de nouveau sur la médiatrice de F_1F_2. Que se passerait-il si on remplaçait la source de lumière monochromatique par une source de lumière blanche ? Quelles seraient les radiations éteintes en un point de l'écran situé à 1 cm de l'intersection de la médiatrice de F_1F_2 avec l'écran ? On admettra que les longueurs d'onde du spectre visible vont de 0,40µm à 0,80µm.

(Baccalauréat).

3 - Une fente, source de lumière monochromatique, S, est disposée parallèlement à l'arête commune, O, de deux miroirs de Fresnel OM_1 , OM_2 , à une distance de 60 cm de cette arête ; l'angle des faces réfléchissantes des miroirs est égal à (π - 0,0025) radians.

On observe les franges sur un écran parallèle au plan des images de S, à une distance de 2,40 mètres de O. Les conditions expérimentales sont telles que les rayons réfléchis par les bords, M_1 et M_2 , des miroirs ne coupent pas ceux réfléchis par l'arête commune, O.

1°) Dessiner le schéma du dispositif, hachurer le champ d'interférences.

2°) Quelles sont la longueur d'onde et la fréquence de la radiation utilisée, lorsque l'interfrange mesure 0,60 millimètre ?
Célérite de la lumière dans l'air: c = 300 000 km/s.

3°) Calculer la longueur de la zone où apparaissent les franges sur l'écran et le nombre de franges de chaque sorte.

4°) Si la lumière de S était composée de deux radiations de longueurs d'onde 0,45 micron et 0,63 micron, à quelle distance du milieu de la frange centrale la première coïncidence des deux franges brillantes se produirait-elle ?

5°) Si la source emet de la lumière blanche (longueurs d'onde comprises entre 0,40 micron et 0,80 micron),

quelles sont les longueurs d'onde des radiations pour lesquelles il y a une frange obscure à 4 millimètres du milieu de la frange centrale ?

N.B. Les questions 4° et 5° du problème peuvent être traitées indépendamment.

Remarque : cet énoncé ancien emploie « micron », mais le terme correct est micromètre (µm).

(Baccalauréat).

4 - Les caractéristiques d'un dispositif d'Young sont les suivantes :
Ecartement des fentes: a = F_1F_2 = 1,00 m, distance des fentes à l'écran D = 2,00 m.

1°) Un point M de l'écran est situé aux distances d_1 de F_1 et d_2 de F_2 . Les sources étant éclairées par une radiation de fréquence ν ont pour équation $s = s_0 \sin 2\pi\nu t$.

a/ Exprimer les équations des vibrations issues de F_1 et F_2 et qui se superposent au point M.

b/ x étant la distance du point M au centre de l'écran, exprimer le déphasage $\Delta\varphi$ de ces deux vibrations en fonction de a, x, D et de la longeur λ de la radiation.

2°) Le dispositif est éclairé par deux radiations monochromatiques: une jaune de longueur d'onde λ_1 = 0,578 µm et une verte de longueur d'onde λ_2 = 0,546 µm. On peut distinguer une frange jaune d'une frange verte quand la distance de leurs centres est supérieure à un cinquième de l'interfrange. A partir de quel ordre d'interférence pourra-t-on faire cette distinction ?

Chapitre 25

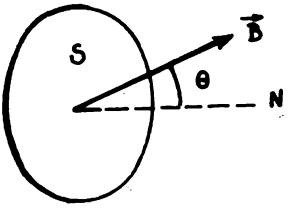
LE COURANT ALTERNATIF

A/ GENERALITES SUR LE COURANT ALTERNATIF.

1°) Rappels de quelques notions fondamentales.

a/ Flux d'induction.

Soit une surface d'aire S, placée dans un milieu où le vecteur induction constant, $\vec{B}$, fait un angle θ avec la normale à la surface. On appelle flux d'induction magnétique Φ à travers la surface le produit :



$$\Phi = B.S.\cos\theta$$

L'unité internationale de champ magnétique est le Tesla (T) ; l'unité de flux d'induction est le Weber. (Wb).

Le wéber est le flux d'induction magnétique qui traverse une surface de 1 m^2 placée normalement aux lignes d'induction d'un champ uniforme de 1 tesla.

b/ La force électromotrice d'induction.

Toute variation de flux à travers une spire donne naissance à une force électromotrice d'induction :

$$E = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

où $\Delta\Phi$ est la variation de flux pendant la durée Δt . E est alors la valeur moyenne de la force électromotrice d'induction. Si le flux d'induction, variable, s'exprime par la fonction $\varphi(t)$, la force électromotrice instantanée est :

$$e = - \frac{d\varphi}{dt}$$

c/ Le courant induit.

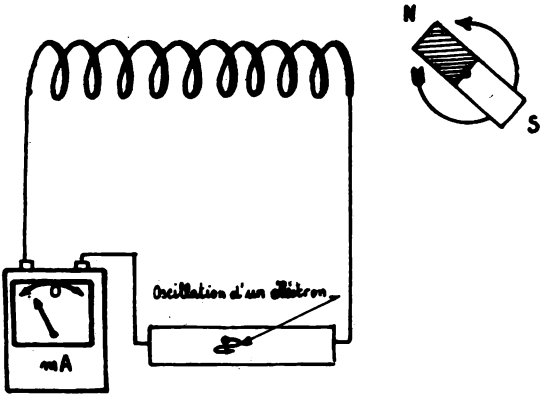
Si le circuit est fermé, la force électromotrice d'induction provoque le passage d'un courant induit.

D'après la loi de Lenz, le courant induit est de sens tel que le flux qu'il produit à travers le circuit fermé s'oppose à la variation du flux inducteur.

2°) Principe de l'alternateur.

On crée les courants alternatifs industriels à partir de phénomènes d'induction produits dans des alternateurs. Le principe de l'alternateur est donné par le circuit suivant :

Un aimant droit tourne devant une bobine reliée à un milliampèremètre. Le pôle nord puis le pôle sud de l'aimant passent alternativement devant la bobine. L'aiguille du millimampèremètre dévie alternativement à droite et à gauche, montrant le passage d'un courant qui circule alternativement dans un sens puis dans l'autre.



Les variations périodiques du flux d'induction créé par l'aimant à travers la bobine (flux entrant dû au pôle nord et flux sortant dû au pôle sud) font apparaître une force électromotrice d'induction alternative aux extrémités de la bobine et par suite une courant alternatif dans le circuit fermé.

Le courant électrique est un déplacement d'ensemble des électrons libres ou électrons de conduction du métal. En l'abscence de force électromotrice, les électrons de conduction s'agitent de façon désordonnée en tous sens. Il s'agit de l'agitation thermique. Mais ils occupent en moyenne toujours la même position. On peut donc les considérer comme immobiles. Le déplacement supplémentaire, dû à une force électromotrice est extrêmement lent: de l'ordre du millimètre chaque seconde. Si la force électromotrice est alternative (pour le courant industriel elle est

alternative sinusoïdale, de période égale à un cinquantième de seconde), les électrons ne peuvent qu'osciller sur place autour d'une position d'équilibre moyenne. C'est ce que nous avons représenté dans une portion grossie du circuit.

Chaque oscillation d'un électron libre est transmise de proche en proche aux électrons voisins, à la façon d'un ébranlement le long d'une corde: il y a propagation d'un signal avec une très grande vitesse puisqu'elle est très voisine de celle de la vitesse de la lumière dans le vide.

C'est la vitesse du signal ($v \simeq 300\,000$ km/s) que l'on appelle vitesse de l'électricité. Il ne faut pas l'assimiler à la vitesse des électrons qui est très faible (de l'ordre du millimètre par seconde). De même, on ne peut pas confondre vitesse de propagation d'un ébranlement le long d'une corde et vitesse de déplacement d'un point de la corde lorsqu'il reçoit l'ébranlement.

En résumé :

Un courant alternatif est la propagation des vibrations sur place des électrons libres d'un conducteur.

3°) Cas particulier: le courant alternatif sinusoïdal.

Si la force électromotrice crée par l'alternateur est sinusoïdale, de la forme :

$$e = E_m \sin \omega t$$

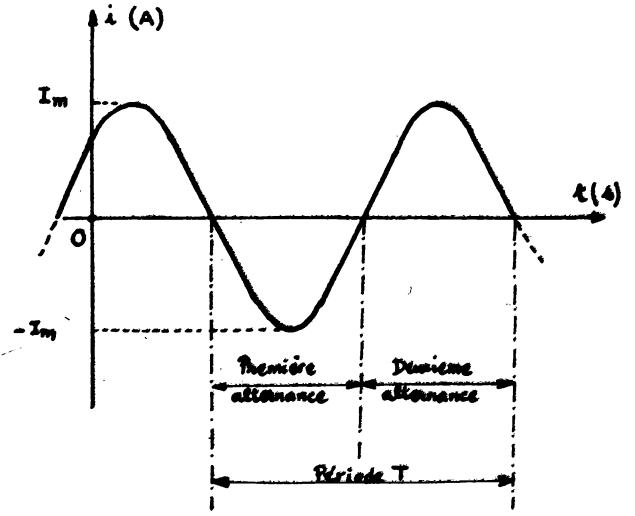
le courant électrique est alternatif sinusoïdal. Son intensité est la fonction sinusoïdale du temps :

$$\boxed{i = I_m \sin (\omega t + \varphi)}$$

- i est l'intensité instantanée du courant ;
- I_m est la valeur maximale de l'intensité ;
- ω est la pulsation du courant ;
- φ est sa phase initiale ;

En général, la force électromotrice e et l'intensité i ne sont pas en phase. Le déphasage φ entre ces deux grandeurs dépend de la nature du circuit.

Représentons les variations de l'intensité en fonction du temps :



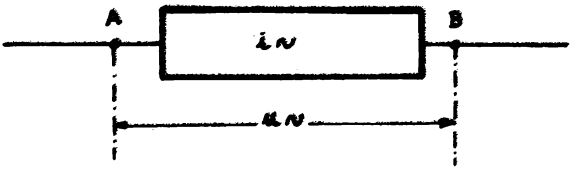
Une période du courant comprend deux alternances: pendant la première alternance, le courant circule dans un sens et il circule en sens inverse pendant la seconde alternance.

La fréquence du courant alternatif sinusoïdal industriel est N = 50 hertz.

Comme pour toutes les grandeurs sinusoïdales, pulsation, période et fréquence sont liées par :

$$\omega = \frac{2\,\Pi}{T} = 2\Pi\,N$$

4°) Intensité et tension instantanées.



Entre les extrémités A et B d'une portion de circuit parcourue par un courant d'intensité instantanée $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_1)$, existe une tension $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_2)$, alternative sinusoïdale, de même pulsation que l'intensité, mais qui généralement n'est pas en phase avec l'intensité i, sauf si la portion de circuit AB est une résistance pure.

Dans ce cas, la loi d'Ohm des courants continus s'applique sans modification aux valeurs instantanées :

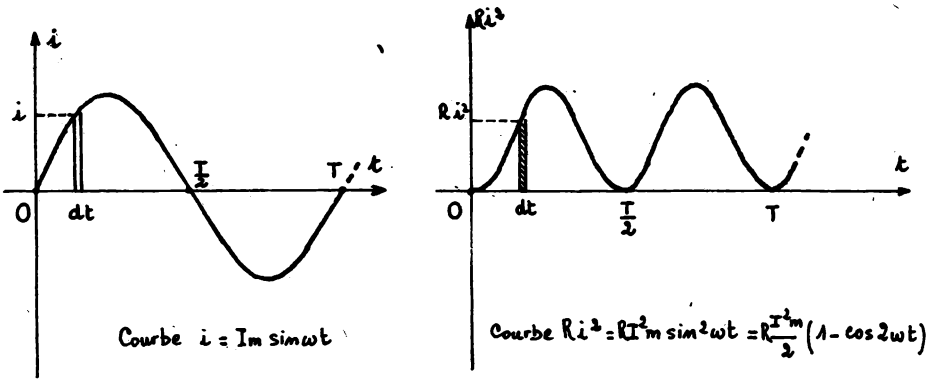
$$u = R.i = R.I_m \sin(\omega t + \varphi_1) = U_m \sin(\omega t + \varphi_1).$$

u et i en phase.

5°) Les valeurs efficaces. (Rappel).

a/ L'intensité efficace.

L'intensité efficace d'un courant alternatif est l'intensité I du courant continu qui passant pendant la même durée dans le même conducteur, y produirait le même dégagement de chaleur.



Déterminons la quantité de chaleur apparue par effet Joule dans une résistance R au cours d'une durée égale à la période T du courant. On ne peut appliquer la loi de Joule que pour un courant d'intensité constante. Nous considérons donc une durée très petite, dt, pendant laquelle l'intensité du courant peut être considérée comme constante. Pendant ce temps, le dégagement de chaleur élémentaire est :

$$dW = Ri^2 . dt$$

(Il est représenté par l'aire de la surface hachurée sur la seconde figure ci-dessus).

Le dégagement de chaleur pendant la durée T est égal à la somme de tous les dégagements de chaleur élémentaires. Il est donné par l'intégrale définie:

$$W = \int_0^T Ri^2 \cdot dt$$

avec $i^2 = I^2_m \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} I^2_m (1 - \cos 2\omega t)$.

L'intégrale devient :

$$W = \frac{RI^2m}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t)\, dt = \frac{RI^2m}{2} \int_0^T dt - \frac{RI^2m}{2} \int_0^T \cos 2\omega t.\, dt$$

La première intégrale vaut $\frac{RI^2m}{2} T$. La deuxième: $\frac{-1}{2\omega} \times [\sin 2\omega t]_0^T$ est nulle. En effet, pour $t = 0$, $\sin 0 = 0$ et pour $t = T = \frac{2\Pi}{\omega}$, $\sin 4\Pi = 0$. La quantité de chaleur dégagée pendant une période est donc :

$$W = \frac{RI^2m}{2} T \quad (1)$$

Soit I l'intensité du courant continu qui dégagerait la même quantité de chaleur pendant la même durée T. D'après la loi de Joule :

$$W = RI^2 T \quad (2)$$

L'égalité des relations (1) et (2) permet d'exprimer la valeur efficace d'un courant alternatif en fonction de son intensité maximale :

$$\boxed{I = \frac{Im}{\sqrt{2}}}$$

Par exemple, l'intensité efficace d'un courant sinusoïdal de valeur maximale Im = 1 ampère, est I = 0,7 ampère.

b/ Tension efficace.

On exprime de même la valeur efficace d'une tension alternative sinusoïdale en fonction de sa valeur maximale :

$$U = \frac{Um}{\sqrt{2}}$$

c/ Lecture des ampèremètres et voltmètres.

Les ampèremètres et voltmètres utilisés en courant alternatif sinusoïdal sont directement gradués en valeurs efficaces.

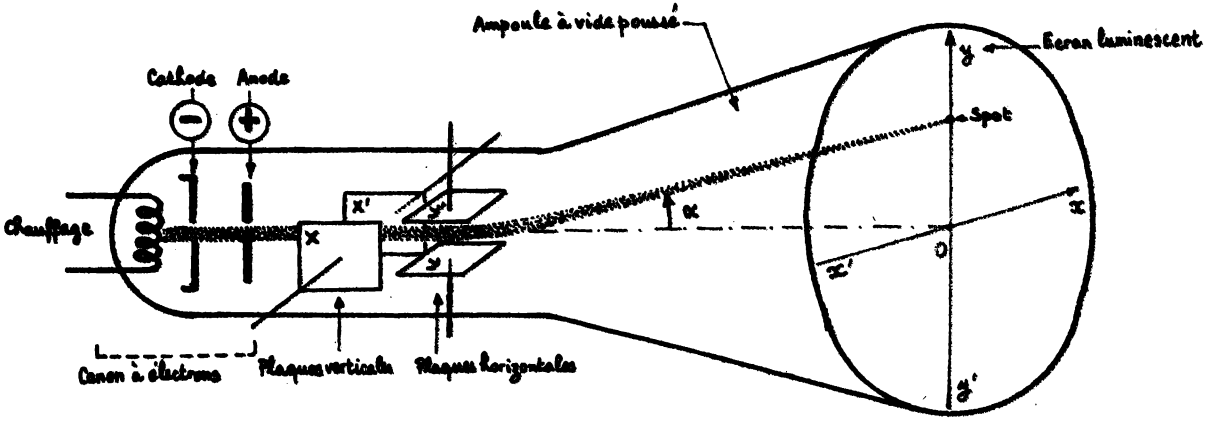
Lorsqu'on parle de l'intensité ou de la tension d'un courant alternatif, sans autre précision, il s'agit toujours des valeurs efficaces.

II- Utilisation de l'oscilloscope cathodique.

L'organe principal de l'oscilloscope cathodique est une ampoule dans laquelle on a fait un vide poussé.

L'une des extrémités de l'ampoule est revêtue d'une substance qui peut être rendue luminescente lorsqu'elle est heurtée par des électrons.

L'autre extrémité contient le canon à électrons, fonctionnant comme une diode par effet thermoélectronique (nous y reviendrons au chapitre intitulé "effet thermoélectronique"). Les électrons sont émis par un filament chauffé et sont accélérés entre une cathode et une anode.



A l'intérieur du tube se trouvent deux condensateurs plans :

- L'un a ses plaques X' et X orientées verticalement ;

- L'autre a ses plaques Y' et Y orientées horizontalement.

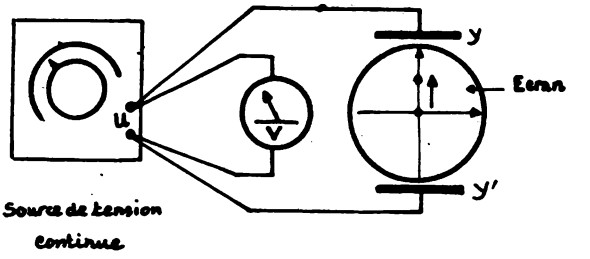
Le faisceau d'électrons passe entre les plaques de ces deux condensateurs avant de heurter l'écran où il dessine un point lumineux ou "spot".

1°) <u>L'oscilloscope cathodique fonctionne comme un volmètre</u>.

Nous démontrerons ultérieurement que si l'on applique une tension U entre les plaques d'un

de ces condensateurs, le champ électrique produit, proportionnel à U, dévie le faisceau d'électrons d'un angle α proportionnel à la tension. On peut le vérifier expérimentalement en appliquant une tension constante U, simultanément aux bornes d'un voltmètre et entre les plaques Y' et Y d'un oscilloscope cathodique. Si l'on fait croître la tension U, l'aiguille du voltmètre dévie et l'on vérifie que le déplacement du spot est proportionnel à la tension appliquée.

$$y = K.U$$



Même constatation si l'on applique une tension U' entre les plaques verticales X' et X. On vérifie que le déplacement x du spot est tel que :

$$x = K' . U'$$

L'oscilloscope cathodique joue donc le rôle d'un voltmètre.

2°) Le balayage horizontal ou base de temps.

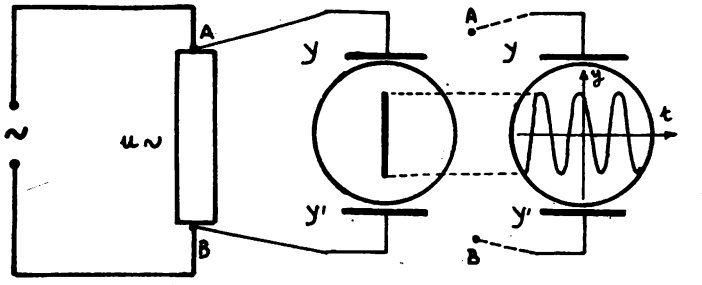
Un dispositif appliqué aux plaques verticales X, X' permet d'obtenir une déviation horizontale proportionnelle au temps, suivant la loi x = K.t. Mais le spot sort très vite des limites de l'écran. Le dispositif appliqué aux plaques le ramène à intervalles de temps égaux dans les limites de l'écran.

Ce dispositif permet donc au spot de se déplacer sur l'axe x' Ox à vitesse constante et de revenir de façon quasi instantanée sur la gauche de l'écran lorsqu'il a atteint l'extrémité droite. On peut faire varier à volonté la vitesse du spot. Le dispositif est la "base de temps" ou dispositif de balayage horizontal.

3°) Etude d'une tension variable.

Supposons que la tension aux extrémités A et B d'une portion de circuit soit sinusoïdale. Lorsqu'on relie ces extrémités en dérivation aux plaques Y' et Y, le spot subit un déplacement rectiligne sinusoïdal, dont la première partie de la figure montre la trajectoire. Pour avoir plus de renseignements sur la tension, on introduit le balayage horizontal. Une sinusoïde se dessine sur l'écran, montrant que la tension A et B est du type

$$u = Um \sin (\omega t + \varphi)$$



En conclusion :

Pour étudier à l'oscilloscope cathodique une tension u (t) entre les extrémités A et B d'une portion de circuit, on branche cette portion de circuit en dérivation entre les plaques Y' et Y de l'oscilloscope.

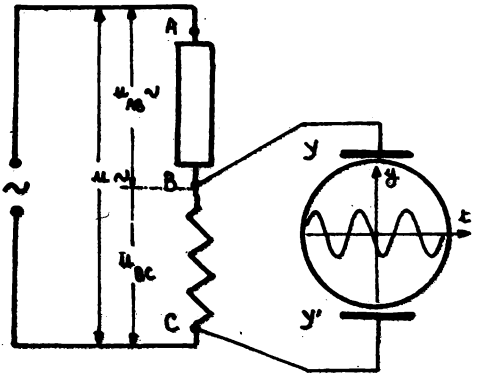
4°) Etude d'une intensité variable.

Rappelons la propriété énoncée au paragraphe I, 4° : Dans une résistance pure la tension u et l'intensité i sont en phase et liées par u = Ri.

Si la portion de circuit est une résistance pure, on la branche en dérivation entre les plaques Y' et Y de l'oscilloscope. La courbe observée est u (t).Au coefficient R près, c'est aussi i (t). Si la portion de circuit AB n'est pas une résistance pure (elle comporte des bobines, des condensateurs), la tension u et l'intensité i ne sont pas en phase.

Dans ce cas, on prolonge AB par une résistance BC suffisamment faible pour que son influence sur l'ensemble du circuit soit négligeable. Dans la portion BC, la ten-

sion u_{BC} et l'intensité (qui est la même pour tout le circuit) sont en phase. La courbe observée est u_{BC} (t), mais elle donne également les variations de i en fonction du temps.



En conclusion:

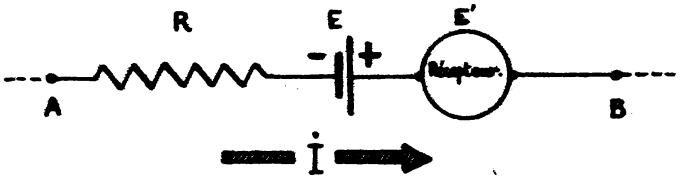
Pour étudier à l'oscilloscope cathodique l'intensité i (t) entre les extrémités A et B d'une portion de circuit quelconque, on branche une résistance de cette portion de circuit entre les plaques Y et Y' de l'oscilloscope. Si la portion de circuit ne comporte pas de résistance pure, on la prolonge par une résistance de faible valeur que l'on branche en dérivation entre les plaques de l'oscilloscope.

B/ LOIS D'OHM EN COURANT ALTERNATIF.

Rappel: la loi d'Ohm en courant continu.

Ecrire la loi d'Ohm entre deux points d'une portion de circuit revient à comptabiliser les diminutions du potentiel électrique entre ces points.

Supposons que la portion de circuit soit parcourue dans le sens du courant. Le courant traverse successivement une résistance R, un générateur de force électromotrice E dans lequel il entre par la borne négative, un récepteur de force contre-électromotrice E'.



Le potentiel diminue dans tous les éléments de circuit qui consomment de l'énergie :

- il diminue de la quantité RI dans la résistance ;
- il diminue de la quantité E' dans le récepteur .

En revanche, le potentiel augmente de E dans le générateur qui produit de l'énergie. Cela revient à dire qu' il diminue de (- E).

La diminution totale de potentiel entre A et B s'écrit donc :

$$U_{AB} = RI + E' - E$$

U, RI, E' et E s'expriment en volts (V).

Problème en courant alternatif.

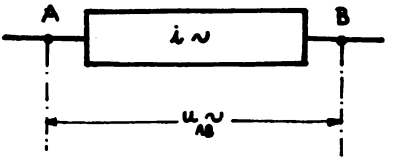
Un courant alternatif sinusoïdal d'intensité $i = Im \sin \omega t$ circule dans la portion de circuit AB.

On se propose de déterminer la tension $u_{AB} = Um \sin$

($\omega t + \varphi$) entre les points A et B. La pulsation de la tension étant la même que celle de l'intensité, il y a que deux facteurs à déterminer :

- la valeur maximale Um

- le déphasage φ entre l'intensité et la tension instantanées.



Principe de résolution.

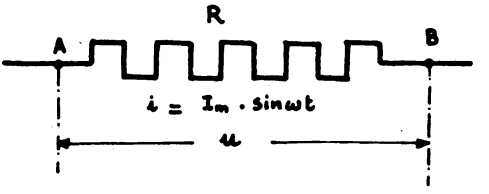
La loi d'Ohm des courants continus s'applique sans modification aux valeurs instantanées u et i de la tension et de l'intensité. En effet, à un instant donné, ces valeurs sont fixes, comme en courant continu.

I - LOI D'OHM POUR UNE RESISTANCE PURE.

Une résistance R non inductive est traversée par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité

$$i = Im \sin \omega t$$

Nous nous proposons de déterminer l'expression de la tension aux extrémités de la résistance.



Appliquons la loi d'Ohm aux valeurs sinstantanées :

$$u = R.i = R.Im \sin\omega t = Um \sin \omega t$$

La tension est donc sinusoïdale et a même période que l'intensité, elle est en phase avec l'intensité.

La valeur maximale de la tension est: Um = R.Im

Utilisons les valeurs efficaces :

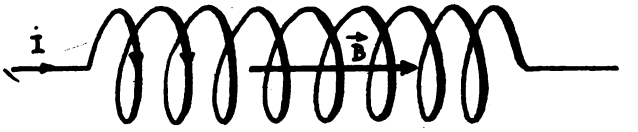
$$U\sqrt{2} = R.I\sqrt{2}$$

$$\boxed{U = R.I}$$

II- LOI D'OHM POUR UNE PORTION DE CIRCUIT AVEC RESISTANCE et inductance.

1°) Industance d'une bobine (Rappel).

Considérons un solénoïde de longueur ℓ, comportant N spires, parcouru par un courant continu d'intensité I.



On a admis en sixième année que l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde vaut :

$$B = 4\Pi .10^{-7} \frac{N.I}{\ell}$$

Le flux d'induction à travers une spire de section S est $\varphi = B.S$ et le flux à travers les N spires est $\Phi = N\varphi = N.B.S$

$$\Phi = 4\Pi .10^{-7} \frac{N^2.S}{\ell} . I$$

Le coefficient $\frac{4\Pi.10^{-7} N^2 . S}{\ell}$ ne dépend que de la construction du solénoïde. C'est son coefficient de self-induction. On l'appelle aussi self ou encore inductance. On le note L. Il s'exprime en henrys.

Le flux créé par le solénoïde est proportionnel à l'intensité qui le traverse :

$$\boxed{\Phi = L.I}$$

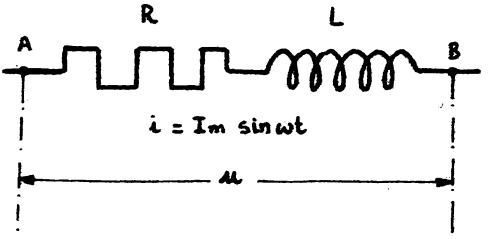
L en heurys (H)
I en ampères (A)
Φ en Wb

2°) Etude théorique du circuit R.L.

Une portion de circuit comportant une résistance R et une bobine d'inductance L (circuit R,L.), est traversée par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité

$$i = Im \sin \omega t$$

Nous nous proposons de déterminer l'expression de la tension aux extrémités de la portion de circuit.



a/ Application de la loi d'Ohm.

Lorsque l'intensité est i, le flux d'induction créé par la bobine à travers son propre circuit est :

$$\varphi = L.i$$

Ce flux est variable puisque i est variable. Il en résulte une force électromotrice d'induction:

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{d(Li)}{dt} = - L. \frac{di}{dt}$$

Appliquons la loi d'Ohm aux valeurs instantanées, en tenant compte de la force électromotrice (voir rappels en début de chapitre B) :

$$u = Ri - e$$

$$\boxed{u = Ri + L. \frac{di}{dt}}$$

b/ La construction de Fresnel

L'intensité instantanée est i = Im sin ωt. Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\frac{di}{dt} = \omega \, Im \cos \omega t = \omega Im \sin \left(\omega t + \frac{\Pi}{2} \right)$$

La tension instantanée est donc :

$$u = Ri + L. \frac{di}{dt} = RIm \sin \omega t + L\omega \, Im \sin \left(\omega t + \frac{\Pi}{2} \right)$$

Elle est la somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω. C'est donc une fonction sinusoïdale de pulsation ω, de la forme:

$$u = Um \sin (\omega t + \varphi)$$

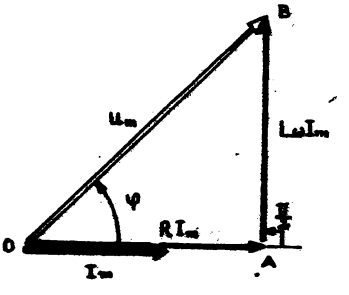
Nous obtiendrons Um et φ par la construction de Fresnel :

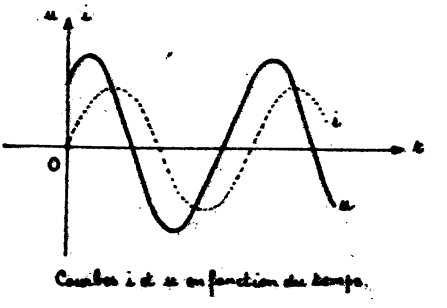
- i est représenté par le vecteur de module Im porté par l'axe de phase ; Ce vecteur servira de référence pour les phases.

- Ri est représenté par le vecteur de module RIm porté par l'axe de phase.

- L. $\frac{di}{dt}$ est représenté par le vecteur de module L ωIm, en avance de $\frac{\Pi}{2}$ sur i.

- Le vecteur somme des deux vecteurs précédents, est un vecteur de module Um, en avance de phase de φ sur le vecteur représentatif de l'intensité.





Courbes i et u en fonction du temps.

La construction de Fresnel indique que :

Dans un circuit comportant une résistance et une inductance, la tension est en avance de phase sur l'intensité.

c/ Relation entre valeurs efficaces. Calcul du déphasage.

Dans le triangle rectangle OAB:

$$U_m^2 = R^2 I_m^2 + L^2 \omega^2 I_m^2 \text{ d'où } I_m = \frac{U_m}{R^2 + L^2\omega^2}$$

On passe aux valeurs efficaces en divisant les valeurs maximales par $\sqrt{2}$. On obtient :

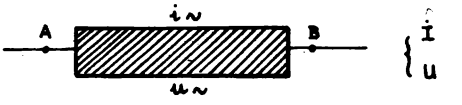
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

Le déphasage entre la tension et l'intensité est donné par sa tangente:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB}{OA} = \frac{L\omega I_m}{RI_m} = \frac{L\omega}{R}$$

d/ L'impédance de la portion de circuit.

Considérons une portion quelconque de circuit, traversée par un courant sinusoïdal de valeur instantanée i et de valeur efficace I, La tension aux extrémités de la portion de circuit est u et sa valeur efficace est U.



L'impédance d'une portion de circuit est le rapport de la valeur efficace de la tension entre ses extrémités à la valeur efficace de l'intensité qui le traverse.

$$Z = \frac{U}{I}$$

U s'exprimant en volts et I en ampères, l'unité d'impédance est l'Ohm (Ω).

Appliquons la définition de l'impédance au circuit R,L pour lequel :

$$\frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

R, $L\omega$ et Z en ohms

$$Z \qquad \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

e/ Autre expression du déphasage.

Si l'on a calculé numériquement l'impédance de la portion de circuit, on peut exprimer le déphasage en fonction de l'impédance et de la résistance. Dans la construction de Fresnel :

$$\cos\varphi = \frac{OA}{OB} = \frac{RIm}{Um} = \frac{RI}{U} = \frac{RI}{ZI} = \frac{R}{Z}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z}}$$

f/ Cas particuliers.

Dans le cas où la portion de circuit a une résistance négligeable (inductance pure) :

$$\text{tg}\,\varphi = \infty \Longrightarrow \varphi = \frac{\Pi}{2}$$

La tension dans une inductance pure est en quadrature avance sur l'intensité.

Dans le cas d'une résistance pure non inductive, L = 0. On a alors :

$$\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad Z = R$$

L'impédance d'une résistance non inductive est égale à sa résistance. La tension et l'intensité sont en phase, comme nous l'avons établi au paragraphe I.

En résumé.

Si un circuit (R,L) est parcouru par un courant d'intensité :

$$i = Im. \sin \omega t$$

La tension aux extrémités de de ce circuit est

$$u = Um. \sin (\omega t + \varphi) \text{ avec } \varphi > 0$$

elle est donc en avance de phase sur l'intensité. On a :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

$$tg\ \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

$$Z \ (\Omega) = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

3°) Etude expériementale à l'oscilloscope bicourbe.

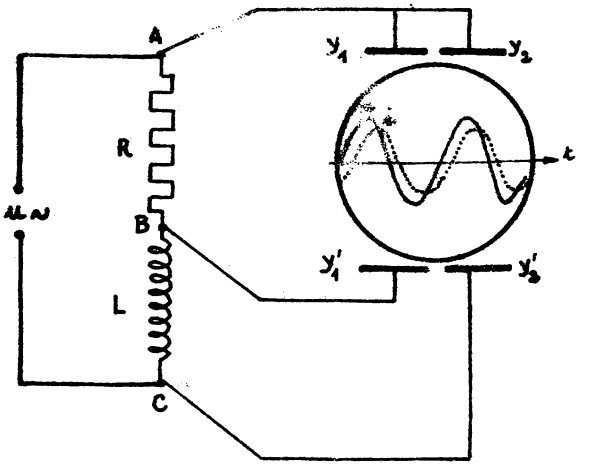
L'osciloscope bicourbe comporte deux séries de plaques horizontales, Y_1, Y_1' et Y_2 , Y_2' .

On réalise le montage ci-dessous :

-Les plaques Y_1 et Y_2' sont branchées en dérivation aux extrémités de la résistance : elles donnent la courbe i (t);

-Les plaques Y_2 et Y_2' sont branchées en dérivation aux extrémités de la portion de circuit: elles donnent la courbe u (t).

Sur l'axe du temps, la courbe u (t) a ses maximums à gauche de ceux de la courbe i (t), c'est-à-dire à des instants antérieurs. La tension est donc en avance de phase sur l'intensité.



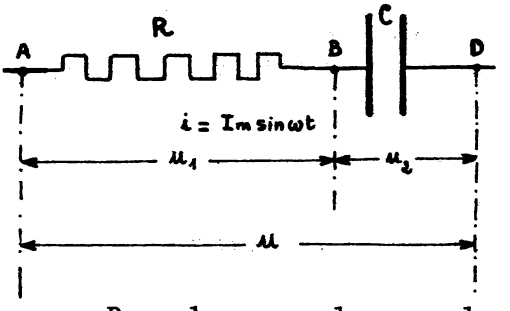
III- LOI D'OHM POUR UNE PORTION DE CIRCUIT AVEC RESISTANCE ET CAPACITE.

1°) Etude théorique du circuit R,C.

Une portion de circuit comportant une résistance R et un condensateur de capacité C (circuit R,C), est traversée par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité

$$i = I_m \sin \omega t$$

Nous nous proposons de déterminer l'expression de la tension aux extrémités de la portion de circuit.



C s'exprime en farads (F)
On utilise surtout le sous-multiple :
1 microfarad = 1 μF = 10^{-6} F

Rappelons que lorsque la charge d'un condensateur de capacité C est Q, la tension entre ses plaques est :

$$U = \frac{Q}{C}$$

Q en coulombs (C)

C en farads (F)

a/ Application de la loi d'Ohm.

Comme en courant continu, la tension instantanée entre les extrémités d'une portion de circuit est la somme des tensions instantanées entre les extrémités des différents éléments de cette portion de circuit.

La tension u entre les extrémités de la portion de circuit est la somme :

- de la tension $u_1 = Ri$ aux extrémités de la résistance ;

- de la tension $u_2 = \frac{q}{C}$ aux extrémités du condensateur, relation dans laquelle q est sa charge à l'instant t.

$$u = u_1 + u_2$$

$$\boxed{u = Ri + \frac{q}{C}}$$

b/ La construction de Fresnel.

En courant continu, lorsqu'un courant d'intensité I circule pendant la durée t, la charge qui traverse une section du fil est

$$Q = I.t$$

On ne peut appliquer cette relation en courant alternatif que pendant une durée dt très petite au cours de laquelle l'intensité peut être considérée comme constante. La charge qui traverse une section du fil est alors dq, telle que :

$$dq = i.dt$$

La charge ayant circulé pendant une durée t finie est la somme de toutes les charges élémentaires :

$$q = \int_0^t i.dt$$

On peut donc exprimer la loi d'Ohm aux valeurs instantanées sous la forme :

$$u = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i.dt$$

L'intensité instantanée étant $i = Im \sin \omega t$, on a:

$$\frac{1}{C}\int_0^t i.dt = \frac{1}{C}\int_0^t Im \sin \omega t.dt = -\frac{Im}{C\omega} \cos \omega t + K$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i.dt = \frac{Im}{C\omega} \sin \left(\omega t - \frac{\Pi}{2} \right) + K$$

La constante d'intégration est nulle, car la tension totale u est sinusoïdale et sa valeur moyenne est nulle. La tension instantanée s'exprime donc par :

$$u = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i.dt = RIm \sin \omega t + \frac{Im}{C\omega} \cdot$$

$$\sin \left(\omega t - \frac{\Pi}{2} \right)$$

Etant la somme de deux fonctions sinusoïdales de pulsation ω , c'est une fonction sinusoïdale de pulsation ω , de la forme :

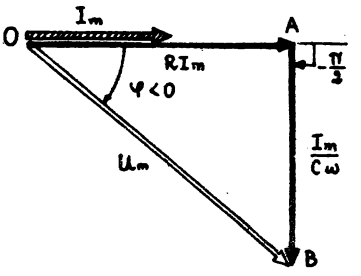
$$u = Um \sin (\omega t + \varphi)$$

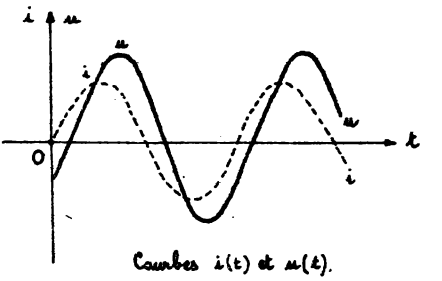
Nous obtiendrons Um et φ par la construction de Fresnel :

- i est représenté par le vecteur de module Im porté par l'axe de phase. Ce vecteur servira de référence pour les phases.

- Ri est représenté par le vecteur de module RIm, en phase avec i.

- $\int i.dt = \frac{Im}{C\omega} . \sin (\omega t - \frac{\Pi}{2})$ est représenté par le vecteur de module $\frac{Im}{C\omega}$, en retard de $\frac{\Pi}{2}$ sur l'intensité.





Courbes $i(t)$ et $u(t)$.

La construction de Fresnel indique que le vecteur somme des vecteurs de module RIm et $\frac{Im}{C\omega}$ est un vecteur de module Um, en retard de phase sur le vecteur représentatif de l'intensité. Par conséquent :

> Dans une portion de circuit comportant une résistance et une capacité, la tension est en retard de phase sur l'intensité.

c/ Relation entre valeurs efficaces. Calcul du déphasage

Dans le triangle rectangle OAB :

$$U_m^2 = R^2 I_m^2 + \frac{I_m^2}{C^2\omega^2} \quad \text{d'où} \quad I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}}$$

Même relation entre valeurs efficaces :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \qquad R \text{ et } \frac{1}{C\omega} \text{ en Ohms}$$

Le déphasage entre la tension et l'intensité est donné par sa tangente :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB}{OA} = -\frac{I_m}{C\omega} \cdot \frac{1}{R.I_m} = -\frac{1}{RC\omega}$$

(le signe moins pour tenir compte de la valeur négative φ.)

d/ L'impédance de la portion de circuit.

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

e/ Autre expression du déphasage.

On démontre exactement de la même façon que pour le circuit R,L la relation :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$$

f/ Cas particulier

Si la portion de circuit ne comporte qu'un condensateur, on obtient les résultats suivants en posant R = 0 dans les relations précédentes :

$$\text{tg}\,\varphi = -\infty \Rightarrow \varphi = -\frac{\Pi}{2}$$

La tension aux bornes d'un condenstateur est en quadrature retard sur l'intensité.

L'impédance du condensateur est $Z = \frac{1}{C\omega}$

En résumé.

Si un circuit (R,C) est parcouru par un courant d'intensité

$$i = Im \cdot \sin \omega t.$$

la tension aux extrémités de ce circuit est

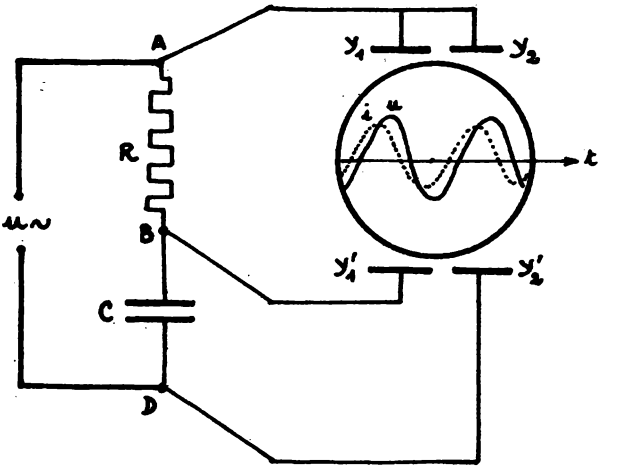
$$u = Um. \sin (\omega t + \varphi) \text{ avec } \varphi < 0$$

elle est donc en retard de phase sur l'intensité. On a :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \qquad \text{tg}\varphi = \frac{-1}{RC\omega} \qquad Z\ (\Omega) = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

2°) Etude expérimentale à l'oscilloscope bicourbe.

Le montage est le même que celui du circuit R,L, mais on remplace la bobine par un condensateur. On vérifie que les sommets de la courbe u(t) sont sur l'axe du temps à la droite de ceux de la courbe i(t), ce qui signifie qu'ils sont atteints à des instants ultérieurs. La tension est donc en retard de phase sur l'intensité.



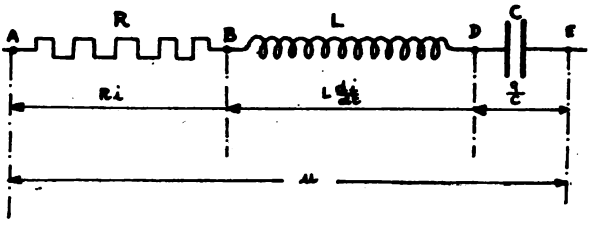
IV LOI D'OHM POUR UN CIRCUIT AVEC RESISTANCE, INDUCTANCE ET CAPACITE.

1°) Etude théorique du circuit (R,L,C).

Une portion de circuit comportant une résistance R, une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C (circuit R,L,C), est traversée par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité

$$i = Im \sin \omega t$$

Nous nous proposons d'étudier la tension aux extrémités de cette portion de circuit.



a/ Application de la loi d'Ohm.

La tension instantanée entre les extrémités de la portion de circuit est la somme des tensions instantanées des différents éléments de la portion de circuit. Compte tenu des résultats établis pour les circuits (R,L), et (R,C), l'expression de la tension instantanée est :

$$u = Ri + L.\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

ou

$$u = Ri + L.\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{o}^{t} i.dt$$

b/ La construction de Fresnel.

Si l'intensité instantanée est $i = Im \sin\omega t$, la tension est :

$$u = RIm \sin \omega t + L\,\omega Im \sin\left(\omega t + \frac{\Pi}{2}\right) + \frac{Im}{C\,\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\Pi}{2}\right)$$

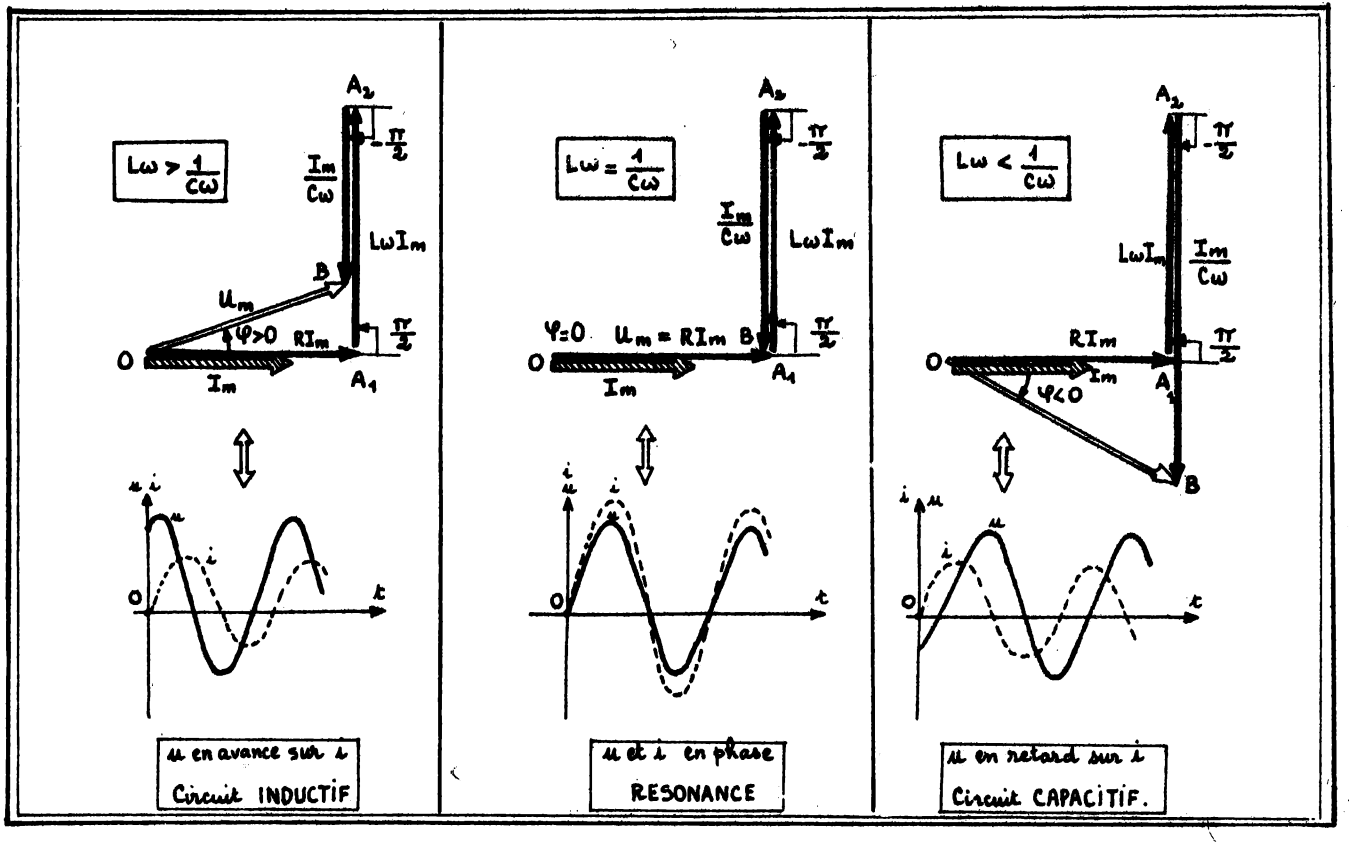
La tension u est la somme de trois fonctions sinusoïdales de même pulsation ω. Elle est donc sinusoïdale, de pulsation ω . Son vecteur de Fresnel est la somme de trois vecteurs:

- Le vecteur de module RIm représentant la fonction Ri. Il est en phase avec le vecteur de module Im représentant l'intensité i.

- Le vecteur de module LωIm, représentant la fonction $L\frac{di}{dt}$, en quadrature avance sur le vecteur de module Im.

- Le vecteur de module $\frac{Im}{C\omega}$, représentant la fonction $\frac{1}{C}\int_{o}^{t} i.dt$, en quadrature retard sur le vecteur de module Im.

Il faut envisager trois cas de figures suivant les valeurs respectives des modules LωIm et $\frac{Im}{C\,\omega}$:


Lω > 1/Cω
A₂
-π/2
Im/Cω
LωIm
B
Um
φ>0
RIm
π/2
O
Im
A₁
u i
u
i
t
u en avance sur i
Circuit INDUCTIF
Lω = 1/Cω
φ=0
Um = RIm
u et i en phase
RESONANCE
Lω < 1/Cω
φ<0
u en retard sur i
Circuit CAPACITIF.

- Si $L\omega Im > \frac{Im}{C\omega}$ ou $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, la tension est en avance de phase sur l'intensité. Le circuit se comporte comme un circuit R,L. C'est un circuit inductif.

- Si $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, la tension et l'intensité sont en phase. C'est la résonance. Nous y reviendrons au paragraphe suivant.

- Si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, la tension est en retard de phase sur l'intensité. Le circuit se comporte comme une circuit R,C. C'est un circuit inductif.

c/ Relation entre valeurs efficaces; déphasage; impédance.

Dans l'un des triangles rectangles OA_1B des circuits inductif ou capacitif, on a

$$OB^2 = OA_1^2 + A_1B^2$$

$$U_m^2 = R^2 I_m^2 + (L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega})^2$$

On en déduit les relations suivantes :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \quad (\Omega)$$

Le déphasage est exprimé en fonction de sa tangente :

$$tg\varphi = \frac{A_1B}{OA_1} = \frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})\, Im}{RIm}$$

$$\operatorname{tg} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

R, $L\omega$ et $\frac{1}{C\omega}$ en ohms

d/ Cas particuliers

Partant des expressions de l'impédance et du déphasage d'un circuit R,L,C, on retrouve toutes les expressions démontrées dans les paragraphes II et III.

Pour obtenir les expressions relatives au circuit R, L, on pose $C = \infty$ car un condensateur de capacité infinie est l'équivalent d'un condensateur dont on a relié les armatures, ce qui revient à le supprimer du circuit.

e/ Autre expression du déphasage.

Dans l'un des triangles OA_1B: $\cos\varphi = \frac{OA_1}{OB} = \frac{RIm}{Um} = R\frac{I}{U} = \frac{R}{Z}$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

f/ Réactance d'un circuit R,L,C.

L'expression de l'impédance d'un circuit R,L,C fait intervenir la quantité.

$$L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

qu'on appelle la réactance de la portion de circuit. Elle s'exprime en ohms.

2°) La résonance électrique.

a/ Condition de résonance.

L'intensité I dans un circuit R,L,C alimenté sous une tension de valeur efficace constante U, est liée à l'impédance par:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

L'intensité est maximale lorsque l'impédance est minimale. Il y a alors résonance électrique. Ceci a lieu lorsque la réactance du circuit est nulle:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

On peut exprimer la condition de résonance sous la forme:

$$\boxed{LC\omega^2 = 1}$$

ou, en remplaçant par son expression en fonction de la période: $\omega = 2\Pi/T$

$$\boxed{T = 2\Pi\sqrt{L.C.}}$$ (formule de Thomson).

b/ Propriétés d'un circuit en résonance

- L'intensité efficace est maximale.

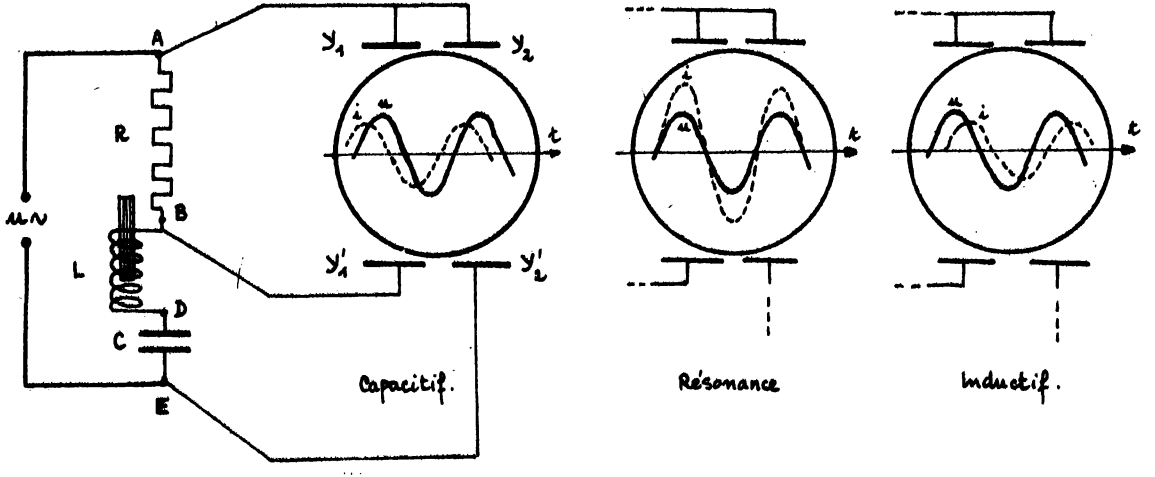
- L'impédance du circuit est égale à sa résistance. En effet, la réactance étant nulle, on a:

$$Z = \sqrt{R^2} = R$$

- La tension et l'intensité sont en phase :

$$tg\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = 0 \quad (L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0).$$

c/ Vérification expérimentale à l'oscilloscope bicourbe.



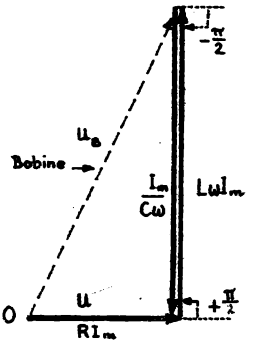
- Première figure: $L\omega < \frac{1}{C\omega}$: u est en retard sur i. Le circuit est capacitif. On enfonce progressivement un noyau de fer doux dans la bobine pour faire croître L. Le déphasage diminue et l'intensité croît.

- Deuxième figure: $L\omega = \frac{1}{C\omega}$: u et i sont en phase et l'intensité passe par un maximum: c'est la résonance.

- Troisième figure: $L\omega > \frac{1}{C\omega}$: u est en avance sur i et l'intensité décroît. Le circuit est inductif.

d/ Les possibilités de surtension à la résonance.

A la résonance, l'impédance est égale à la résistance du circuit. La valeur efficace de la tension entre les extrémités de toute la portion de circuit est égale à la valeur efficace de la tension entre les extrémités de la résistance:



$$U = R.I$$

Les tensions efficaces entre les extrémités de l'inductance et entre les armatures du condensateur sont égales:

$$L\omega I = \frac{1}{C\omega}$$

Ces deux tensions peuvent être beaucoup plus grandes que la tension appliquée aux extrémités de tout le circuit. Il y a surtension aux bornes de la bobine et surtension entre les armatures du condensateur qui peut ainsi se décharger à travers l'isolant et être détruit.

On ne doit pas être surpris que la tension efficace aux bornes d'un élément du circuit puisse être supérieure à la tension efficace aux bornes de tout le circuit. Rappelons que la tension instantanée totale est la somme des tensions instantanées partielles. Cette propriété ne s'applique pas aux valeurs efficaces.

Application numérique.

Un circuit R,L;C comprend une résistance de 10 ohms, un condensateur de 15 microfarads et une inductance. Il est alimenté par un courant sinusoïdal de fréquence 50 hertz sous une tension efficace de 110 volts. Pour quelle valeur de l'inductance obtient-on la résonance ? Quelle est alors la tension aux bornes de cette inductance ?

D'après la condition de résonance.

$L = \frac{1}{C\omega^2}$ avec $C = 1{,}5.10^{-5}$ F; $\omega = 2\Pi N = 3{,}14.10^2$ rd/s

$L = 0{,}68$ henry.

La tension aux bornes de l'inductance est:

$U_L = L\omega I$ avec $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R}$ puisque $Z = R$ à la résonance.

$$U_L = L\omega \frac{U}{R} = 0{,}68 \times 3{,}14 \cdot 10^2 \quad \frac{110}{10}$$

$$\underline{U = 2\,350 \text{ volts}}.$$

C'est également la tension efficace aux bornes du condensateur.

La tension maximale dans l'inductance est donc :

$$(U_L)_m = U_L \sqrt{2} = 3\,320 \text{ V} \qquad \underline{(U_L)_m = 3\,320 \text{ volts}}$$

Cet exemple numérique montre que la tension aux bornes de l'inductance ou du condensateur est plus de vingt fois supérieure à la tension appliquée aux bornes du circuit.

V/ Utilisation de la notation complexe.

1°) Expression complexe de la loi d'Ohm

Soit $i = Im \sin \omega t$ l'intensité instantanée dans un circuit R,L,C. La loi d'Ohm s'écrit:

$$\boxed{u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt}$$

c'est-à-dire:

$$u = RIm \sin \omega t + L\omega Im \sin \left(\omega t + \frac{\Pi}{2} \right) + \frac{Im}{C\omega}$$

$$\sin \left(\omega t \quad \frac{\Pi}{2} \right).$$

Représentons cette somme de fonctions par des nombres complexes;

- $i = Im \sin \omega t$ est représenté par $\underline{i} = Im \, e^{j\omega t}$

$-\frac{di}{dt} = \omega Im \sin\left(\omega t + \frac{\Pi}{2}\right)$ est représenté par $\omega Im \times e^{j\omega t} \times e^{j\frac{\Pi}{2}}$

dans cette relation, $Im\, e^{j\omega t}$ est l'intensité complexe $\underline{i}$ et $e^{j\frac{\Pi}{2}} = \cos\frac{\Pi}{2} + j \sin\frac{\Pi}{2} = j$.

$\frac{di}{dt}$ est donc représenté par $j\omega\, \underline{i}$

$-\int i\, dt = \frac{Im}{C\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\Pi}{2}\right)$ est représenté par $\frac{Im}{C\omega} e^{j\omega t} \times e^{-j\frac{\Pi}{2}}$

avec $Im\, e^{j\omega t} = \underline{i}$ et $e^{-j\frac{\Pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\Pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\Pi}{2}\right) = -j = \frac{1}{j}$

$\int i\, dt$ est donc représenté par $\frac{1}{j\omega}\,\underline{i}$ ou $-\frac{j}{\omega}\,\underline{i}$

L'expression complexe de la loi d'Ohm est donc:

$$\underline{u} = R\underline{i} + j L\omega \underline{i} + \frac{1}{jC\omega}\,\underline{i}$$

- à l'intensité i on associe l'intensité complexe $\underline{i}$
- à la tension u on associe la tension complexe $\underline{u}$
- à l'opérateur $\frac{d}{dt}$ on associe $j\omega$
- à l'opérateur $\int dt$ on associe $\frac{1}{j\omega}$ (ou $-\frac{j}{\omega}$)

2°) L'impédance complexe

Dans l'expression complexe de la loi d'Ohm, mettons $\underline{i}$ en facteur:

$$\underline{u} = (R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega})\,\underline{i} = [R + j\,(L\omega - \frac{1}{C\,\omega})]\,\underline{i}$$

On obtient entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$ une relation de la forme :

$$\underline{u} = z\,\underline{i} \Longleftrightarrow z = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

Le nombre complexe z est l'impédance complexe du circuit R,L,C.

$$z = R + j\,(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega})$$

Dans la relation $z = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$, $\underline{u}$ est la tension complexe associée à $U_m \sin(\omega t + \varphi)$. On a donc: $\underline{u} = U_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}$

$$z = \frac{U_m\, e^{j\omega t}.e^{j\varphi}}{I_m\, e^{j\omega t}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j\varphi} = \frac{U}{I}.e^{j\varphi} = Z.e^{j\varphi}$$

$$z = Z\, e^{j\varphi}$$

3°) Impédance et déphasage entre tension et intensité.

Cette expression de l'impédance complexe montre que:

- L'impédance du circuit est égale au module de l'impédance complexe;

- Le déphasage entre tension et intensités instantanées est égal à l'argument de l'impédance complexe.

a/ Impédance du circuit.

Le module de :

$z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ est $Z = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Imag } .z)^2}$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

b/ Déphasage entre u et i.

L'argument de :

$z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ est φ tel que: $\text{tg}\,\varphi = \frac{\text{Imag } z}{\text{Re } z}$

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

On retrouve les résultats établis par la construction de Fresnel.

4°) Cas particuliers.

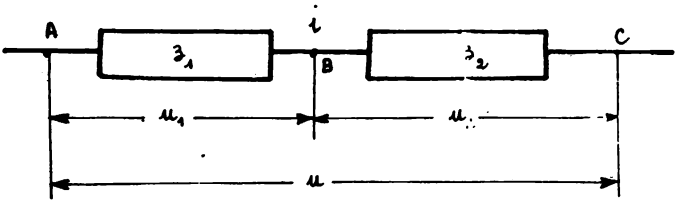
Portion de circuit	Impédance complexe
R, L, C.	$z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$
R, L.	$z = R + jL\omega$
R, C.	$z = R + \frac{1}{jC\omega}$
L	$z = jL\omega$
C	$z = \frac{1}{jC\omega}$
R	$z = R$

Exercice:

A partir de ces expressions de l'impédance complexe, retrouver les expressions de l'impédance et du déphasage et comparer avec les résultats obtenus par la construction de Fresnel.

5°) Eléments montés en série.

Soient u_1 et u_2 les tensions instantanées aux bornes de deux éléments montés en série; z_1 et z_2 leurs impédances complexes.



D'après la loi d'Ohm, la tension instantanée totale est la somme des tensions instantanées partielles:

$$u = u_1 + u_2$$

En notation complexe:

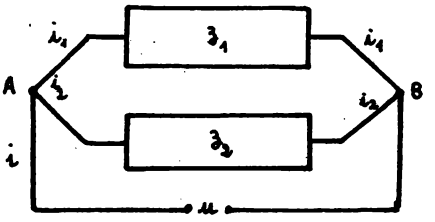
$$\underline{u} = \underline{u_1} + \underline{u_2} = z_1 \underline{i} + z_2 \underline{i} = (z_1 + z_2)\underline{i} = z \underline{i}$$

$$\boxed{z = z_1 + z_2}$$

L'impédance complexe d'une portion de circuit formée d'éléments montés en série est égale à la somme des impédances complexes de chacun d'eux.

6°) Eléments montés en parallèle (programme d'option uniquement).

Soient z_1 et z_2 les impédances complexes de deux éléments montés en série; u la tension commune aux bornes de ces éléments; i_1 et i_2 les intensités respectives.



L'intensité principale est la somme des intensités dérivées:

$$i = i_1 + i_2$$

En notation complexe :

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$$

avec $\underline{i}_1 = \frac{\underline{u}}{z_1}$ et $\underline{i}_2 = \frac{\underline{u}}{z_2}$

$$\underline{i} = \underline{u} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{\underline{u}}{z}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2}$$

L'inverse de l'impédance complexe d'une portion de circuit formée d'éléments montés en dérivation est égale à la somme des inverses des impédances complexes de chacun d'eux.

C/ PUISSANCE MOYENNE. FACTEUR DE PUISSANCE

I PUISSANCE MOYENNE.

1°) Puissance en courant continu.

La puissance mise en jeu en courant continu dans une portion de circuit parcourue par un courant d'intensité I sous une tension U est

$$P = U.I$$

U en volts
I en ampères
P en watts (W)

En courant continu, la puissance est constante.

2°) Définition de la puissance moyenne en courant alternatif.

En courant alternatif, la tension instantanée u et l'intensité instantanée i varient au cours du temps. Le produit de ces deux grandeurs, u.i, est donc variable. On ne peut donc définir qu'une valeur moyenne de la puissance, de la façon suivante:

La puissance moyenne P d'une courant alternatif est le quotient de l'énergie W libérée pendant une période par la durée T de cette période:

$$P = \frac{W}{T}$$

W en joules
T en secondes
P en watts

3°) Calcul de la puissance moyenne.

L'énergie électrique consommée pendant une durée dt très courte, pendant laquelle la tension et l'intensité instantanées peuvent être considérées comme constantes est:

$$dW = ui \cdot dt$$

avec $i = Im \sin \omega t$ et $u = Um \sin (\omega t + \varphi)$

$$dW = UmIm.\ \sin\omega t.\ \sin(\omega t + \varphi)\ dt$$

$$dW = 2UI\ [\sin\omega t.\sin(\omega t + \varphi)]\ dt$$

Remplaçons $2\sin\omega t.\ \sin(\omega t + \varphi)$ par $\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)$

On vérifie en effet par application de la relation

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2}$$

que $\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi) = -2\sin(\omega t + \varphi).\sin(-\omega t)$

$$= 2\sin(\omega t + \varphi).\sin\omega t.$$

$$dW = UI\ [\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]\ dt$$

L'énergie consommée pendant une période est la somme des énergies élémentaires dW:

$$W = UI\cos\varphi \int_0^T dt - UI \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)\,dt$$

- La première intégrale vaut $UI[\cos\varphi].T$

- La deuxième intégrale: $\frac{UI}{2\omega}\ [\sin(2\omega t + \varphi)]_0^T$ est nulle. Il suffit en effet de vérifier que la primitive prend la même valeur pour $t = 0$ et $t = T = 2\pi/\omega$

L'énergie consommée pendant une période est donc:

$$W = UI\ [\cos\varphi].T$$

et la puissance moyenne, obtenue en divisant cette expression par T :

$$\boxed{P = UI\ \cos\varphi}$$

4°) Energie consommée.

L'énergie consommé pendant une période est W = PT. Si l'on veut calculer l'énergie consommée pendant une durée t quelconque, on considérera que cette durée, toujours grande devant la période, contient un nombre entier de périodes :

$$t = kT$$

L'énergie consommée est $W = k.PT = P.kT = Pt$

$$\boxed{W = P.t}$$

5°) Puissance réelle, puissance apparente, facteur de puissance.

a/ Puissance réelle.

La puissance $P = UI.\cos\varphi$ est réellement consommée dans le circuit. On l'appelle puissance réelle et elle s'exprime en watts.

b/ Puissance apparente.

Le produit U.I des valeurs efficaces est la puissance apparente. Elle s'exprime en volts-ampères (V.A). On la note Pa.

c/ Facteur de puissance.

Le facteur $\cos\varphi$ est le facteur de puissance du circuit Il est toujours égal ou inférieur à un.

Nous avons démontré dans les paragraphes précédents la relation :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z}}$$

6°) L'énergie électrique se transforme en énergie thermique.

Dans l'expression de la puissance moyenne $P = UI \times \cos\varphi$, remplaçons U par Z.I et le facteur de puissance par l'expression encadrée ci-dessus. On obtient :

$$P = ZI.\ I.\ \frac{R}{Z} = RI^2$$

$$\boxed{P = RI^2}$$

Dans un circuit quelconque, la puissance est uniquement consommée dans la résistance du circuit. L'énergie se transforme en énergie thermique par effet Joule.

En d'autres termes, une inductance pure ou un condensateur ne consomment pas d'énergie;

II- INTERET D'AVOIR UN FACTEUR DE PUISSANCE ELEVE.

Soient A et B deux utilisateurs consommant la même puissance réelle P et payant de ce fait la même somme à la S.T.E.G. Le facteur de puissance chez A est $\cos\varphi_A$ et celui de B est $\cos\varphi_B$.

U, est la tension imposée par la S.T.E.G (par exemple 220 volts efficaces). Ecrivons que A et B consomment la même puissance:

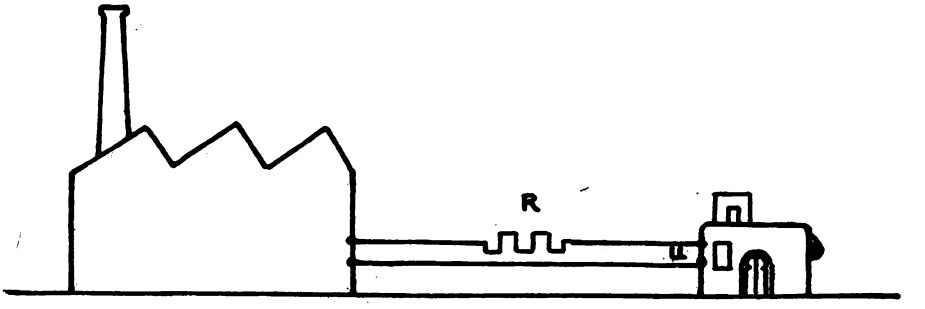
$$P = UI_A \cos\varphi_A = UI_B \cos\varphi_B$$

d'où

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{\cos\varphi_A}{\cos\varphi_B}$$

Si, par exemple $\cos\varphi_B > \cos\varphi_A$, alors $I_A > I_B$

Pour une même puissance consommée, c'est chez l'abonné dont le facteur de puissance est le plus faible que l'intensité efficace est la plus élevée.



Cette intensité doit circuler de la centrale à la maison de l'utilisateur sur une ligne dont la résistance totale est R. On appelle perte en ligne l'énergie consommée par effet Joule pendant le transport de l'électricité.

Les pertes en lignes dont est responsable l'abonné A sont supérieures à celles provoquées par l'abonné B:

$$RI_A^2 > RI_B^2$$

L'abonné A coûte plus cher à la société que l'abonné B alors que tous deux reçoivent la même facture.

Il y a donc intérêt d'effectuer une installation dont le facteur de puissance soit le plus proche possible de l'unité, en compensant les inductances par des capacités (dans les téléviseurs par exemple).

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 25

I - LOIS D'OHM EN COURANT ALTERNATIF.

1°) Problème.

L'intensité et la tension instantanées sont deux fonctions sinusoïdales qui ne sont généralement pas en phase.

- Si l'intensité s'exprime par $i = Im \sin \omega t$

- La tension s'exprime par $u = Um \sin (\omega t + \varphi)$

Supposons i connu. On pose les questions suivantes:

- Déterminer la valeur efficace U (ou maximale $Um = U\sqrt{2}$) de la tension;

- Déterminer le déphasage φ entre tension et intensité;

- Déterminer l'impédance de la portion de circuit, définie par :

$$Z = \frac{U}{I}$$

Ne pas oublier que:

On peut effectuer à l'aide des valeurs instantanées les mêmes opérations qu'en courant continu:

- Addition des tensions instantanées partielles;

- Application de la loi d'Ohm.

Ces mêmes opérations sont absolument impossibles avec les valeurs maximales (ou efficaces), car elles ne représentent qu'une partie des grandeurs sinusoïdales: leur module. Il manque la phase.

2°) Loi d'Ohm pour un circuit R,L,C.

Soit i l'intensité instantanée. On a:

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt.$$

Dans la construction de Fresnel, une inductance pure provoque pour la tension une avance de $\Pi/2$ sur l'intensité et une capacité provoque un retard de $\Pi/2$.

3°) Impédance, déphasage pour un circuit R,L,C.

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \qquad tg\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

Dans ces expressions, $R, L\omega, \frac{1}{C\omega}$ s'expriment en ohms

L'impédance Z s'exprime en ohms.

La quantité $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ est la réactance de la portion de circuit.

Les tensions efficaces aux bornes de la résistance, de l'inductance et du condensateur sont respectivement: RI, $L\omega I$ et $\frac{I}{C\omega}$

4°) Cas particuliers.

a/ Circuit R,L

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \qquad tg\varphi = \frac{L\omega}{R} > 0$$

Dans un circuit R,L: $\varphi > 0$: la tension est en avance de phase sur l'intensité.

Pour une inductance pure:

$$Z = L\omega \; ; \quad \operatorname{tg}\varphi = \infty \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\Pi}{2}$$

Dans une inductance pure, la tension est en quadrature avance sur l'intensité.

b/ Circuit R,C

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{RC\omega} < 0$$

Dans un circuit R,C, $\varphi<0$: la tension est en retard de phase sur l'intensité.

Pour un condensateur: $Z = \frac{1}{C\omega}$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\infty \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{\Pi}{2}$$

Aux bornes d'un condensateur, la tension est en quadrature retard sur l'intensité.

II- RESONANCE ELECTRIQUE D'UN CIRCUIT R,L,C.

La condition de resonance est:

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \iff LC\omega^2 = 1$$

A la résonance:

- L'intensité efficace est maximale;
- L'impédance est égale à la résistance;
- L'intensité est en phase avec la tension;
- Les tensions efficaces aux bornes de l'inductance et du condensateur sont égales. Elles peuvent être beaucoup plus élevées que la tension efficace aux bornes de tout le circuit (surtension).

III- UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES.

1°) Expression complexe de la loi d'Ohm.

- A l'intensité instantanée $i = I_m \sin\omega t$; on associe l'intensité complexe $\underline{i} = I_m e^{j\omega t}$

- A la tension instantanée $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, on associe la tension complexe

$$\underline{u} = U_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} ;$$

- A l'opérateur $\frac{d}{dt}$, on associe $j\omega$;

- A l'opérateur $\int dt$, on associe $\frac{1}{j\omega}$ (ou $-\frac{j}{\omega}$)

- A la loi d'Ohm $u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$

on associe l'expression complexe:

$$\underline{u} = R\underline{i} + jL\omega\underline{i} + \frac{1}{jC\omega}\underline{i}$$

ou encore:

$$\underline{u} = \left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\underline{i}$$

2°) Impédance complexe.

L'expression complexe de la loi d'Ohm est la forme $\underline{u} = z\,\underline{i}$ où z est l'impédance complexe de la portion de circuit.

$$z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

On a aussi:

$$z = Z e^{j\varphi}$$

L'impédance de la portion de circuit est égale au module de l'impédance complexe.

Le déphasage entre tension et intensité est égal à l'argument de l'impédance complexe.

3°) Eléments en série.

L'impédance complexe est la somme des impédances complexes de chaque élément:

$$z = z_1 + z_2 + \text{etc.}$$

- L'impédance complexe d'une résistance pure est R
- L'impédance complexe d'une inductance pure est $jL\omega$
- L'impédance complexe d'un condensateur est

$$\frac{1}{jC\omega} \quad \text{ou} \quad \frac{-j}{C\omega}$$

En utilisant la loi d'addition des impédances complexes, on peut retrouver l'impédance complexe de n'importe quel circuit série.

Exemples

circuit R,L	$z = R + jL\omega$
circuit R,C	$z = R + \frac{1}{jC\omega}$
circuit R,L,C	$z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$

IV- PUISSANCE MOYENNE. FACTEUR DE PUISSANCE.

1°) Puissance moyenne.

La puissance moyenne d'un courant alternatif est le quotient de l'énergie libérée pendant une période par la durée T de cette période.

U et I étant les valeurs efficaces de la tension et de l'intensité et φ le déphasage entre les valeurs instantanées, la puissance s'exprime par:

$$P = UI \cos\varphi$$

2°) Puissance apparente.

C'est le produit $P_a = U.I.$ Elle s'exprime en volts-ampères (V.A)

3°) Facteur de puissance.

C'est le facteur $\cos\varphi$. On a $\cos\varphi = \frac{R}{Z}$

4°) Consommation d'énergie.

Dans un circuit R,L,C, seule la résistance consomme de l'énergie.

EXERCICES

1/A. Un circuit comprend en série : une bobine (R,L) et un condensateur variable (C) alimentés par une tension sinusoïdale de valeur efficace U = 100 V et de pulsation ω inconnue.

1°)

a/ Donner l'expression théorique de l'intensité efficace I en fonction de U, R, L, C et ω .

b/ Etude théorique sommaire de la courbe I = f(C)

Pour quelle valeur de C l'intensité efficace atteint-elle un maximum ? Quelle est sa valeur lorsque C = 0 microfarad, ce qui équivaut à un circuit ouvert ? Quelle est sa valeur lorsque C tend vers l'infini, ce qui revient à relier les deux armatures ?

2°) On fait varier la capacité du condensateur et on mesure pour chaque valeur de C l'intensité efficace. On relève les valeurs du tableau ci-dessous :

C (μF)	I (A)
0,0	0,000
5,0	0,302
8,0	0,790
10,0	1,000
12,0	0,850
15,0	0,700
20,0	0,540
30,0	0,430
40,0	0,390
∞	0,302

a/ Tracer la courbe I = f(C) pour C $\in$ [0 μF, 40,0 μF]

Echelles : 1 cm pour 0,10 A et 1 cm pour 2,00 μF.

b/ Déduire cette courbe et du tableau de variations les valeurs numériques de R, de l'impédance Z_B de la bobine, de L ω, de L et de la pulsation ω du courant.

B. Pour déterminer ces grandeurs par une autre méthode, on fixe la valeur de C à 5,00 μF. On relève l'intensité du courant : I = 0,302 A et les tensions U = 100 V aux bornes du circuit : U_B = 100 V aux bornes de la bobine et U_C = 190 V aux bornes du condensateur.

1°) Déterminer Z_c, impédance du condensateur et la pulsation ω .

2°) Tracer sur papier millimétré la construction de Fresnel pour les tensions à l'échelle de 10 cm pour 100 V (on commencera par tracer U_c dont on connait le module la direction et le sens).

3°) Déduire de la construction de Fresnel les valeurs de R et de L. Mesurer le déphasage φ entre la tension aux bornes du circuit et l'intensité ; mesurer le déphasage φ_B entre la tension aux bornes de la bobine et l'intensité.

C. La bobine et le condensateur C = 5,00 µF sont montés en parallèle et alimentés sous la tension U = 100 V ; (ω = 316 rd/s). Déterminer :

1°) Les intensités I_c dans le condensateur et I_B dans la bobine.

2°) L'intensité principale I' et le déphasage φ' entre la tension et l'intensité.

N.B.
La question C est réservée au programme d'option.

2/
1°) Un condensateur de capacité C = 20 µF est monté en série avec une bobine à noyau de fer doux, de résistance R = 6,8 ohms et d'inductance L = 0,23 henry, une résistance pure R' = 72 ohms et un ampèremètre de résistance 6,0 ohms.

On établit aux bornes de l'ensemble une tension alternative sinusoïdale de fréquence N = 50 hertz et de valeur efficace 12 volts.

Calculer :

a/ L'intensité lue sur l'ampèremètre ;
b/ La tension efficace U_B aux bornes de la bobine ;
c/ La tension efficace $U_{R'}$ aux bornes de la résistance R' ;
d/ Le déphasage entre intensité et tension aux bornes du circuit.

2°) En enfonçant le noyau de fer doux dans la bobine, on fait augmenter son inductance et on lit l'intensité correspondante sur l'ampèremètre :

L (H)	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
I (10^{-2} A)	0,94	11,2	13,2	14,1	13,4	11,5	9,6	8,0	6,8

a/ Tracer la courbe I = f(L) pour L ϵ [0,20H, 1,00 H] .
Echelles : 1,5 cm pour 0,10 H et 1 cm pour 1.10^{-2} A.
Interpréter cette courbe.

b/ On veut étudier à l'aide d'un oscilloscope cathodique bicourbe le déphasage entre la tension aux extrémités du circuit et l'intensité. Représenter et commenter le montage.

c/ Représenter et commenter les trois types de dispositions relatives des deux courbes sur l'écran de l'oscilloscope. A quelles valeurs de L correspondent-elles ?

d/ Calculer théoriquement la valeur de l'inductance à la résonance et la valeur correspondante de l'intensité.

3/
1°) Une différence de potentiel alternative de fréquence F = 50 hertz et de valeur efficace U = 200 volts est appliquée aux bornes M et P d'un circuit comportant une résistance pure R_1 = 10 ohms en série avec une bobine de résistance R_2 et d'inductance L_2 . On mesure entre les bornes M et N de la résistance pure une différence de potentiel V_1 = 100 volts et entre les bornes N et P de la bobine une différence de potentiel V_2 = 135 volts.
En déduire :

a/ La valeur de la résistance R_2 , de l'inductance L_2 et de l'impédance de la bobine ;

b/ Le facteur de puissance de l'ensemble et la puissance absorbée entre M et P.

2°) On alimente sous la différence de potentiel alternative U' = 50 volts, F = 50 hertz, une bobine de résistance r = 6,0 ohms et une réactance telle que 12 ohms en série avec un condensateur de capacité γ inconnue.

On mesure aux bornes de ce condensateur une différence de potentiel V = 60 volts.

En déduire :

a/ Les deux valeurs possibles de la capacité γ ;

b/ Dans le cas de la plus petite des valeurs possibles pour Y, le facteur de puissance de l'ensemble du montage et la puissance consommée.

N.B.

Représenter le diagramme de Fresnel pour chaque partie du problème.

(Baccalauréat, partiel).

4/

1°) Entre les extrémités d'une bobine B, on applique successivement

- une tension continue de 100 volts; l'intensité du courant dans la bobine est alors 5 ampères ;

- une tension alternative sinusoïdale

$u = 120\sqrt{2} \sin 314\ t$;

- l'intensité efficace du courant alternatif qui parcourt la bobine est alors I = 3,2 ampères.

Calculer l'inductance L de la bobine.

2°) La même bobine B est montée en série avec une résistance pure R' = 10 ohms; aux bornes de l'ensemble, on applique la tension u précédente.

Déterminer l'expression de l'intensité instantanée.

3°) On monte en série la bobine B, la résistance R' et un condensateur C; aux extrémités de ce circuit, on applique la tension u; on constate alors que l'intensité qui parcourt le circuit est en avance de phase de $\Pi/6$ sur la tension.

Faire le schéma du montage.

Calculer la capacité c du condensateur.

4°) On désire que l'intensité soit en phase avec la tension u. Déterminer :

- la capacité c_o à donner au condensateur pour obtenir ce résultat ;

- la valeur de la tension efficace U aux bornes de la bobine B quand u et i sont en phase.

(Baccalauréat).

5/ Entre deux bornes A et B, on maintient une différence de potentiel $v_A - v_B = u = U\sqrt{2} \cos 2\Pi ft$ (on prendra f = 50 hertz et U = 110 volts).

Première partie

Une bobine de résistance R_o connue (R_o = 40 ohms) et d'inductance L_o inconnue est branchée entre A et B.

L'intensité efficace du courant est I_o = 2,0ampères

a/ Calculer l'inductance L_o de la bobine

b/ Donner l'expression de l'intensité instantanée i_o en fonction du temps t.

c/ Calculer la puissance moyenne absorbée par la bobine.

Deuxième partie

On considère maintenant une bobine dont on ne connaît ni la résistance, R, ni l'inductance, L. On se propose de déterminer ces deux grandeurs. Pour cela, on réalise le montage suivant : entre les bornes A et B, on branche en série, dans l'ordre, une résistance connue, r = 25 ohms, et la bobine à étudier. On appelle C le point de connexion de la résistance à la bobine.

On dispose alors de trois voltmètres : V entre les bornes A et B; V_1 entre A et C; V_2 entre C et B.

Ils indiquent respectivement les valeurs efficaces, U = 110 volts, U_1 = 45,5 volts et U_2 = 80 volts, des trois différences de potentiel.

$v_A - v_B = u$, $v_A - v_C = u_1$, $v_C - v_B = u_2$

On admettra que le branchement des trois voltmètres n'apporte que des perturbations négligeables dans le circuit.

On appelera i la valeur instantanée de l'intensité du courant.

a/ Faire un schéma du montage.

b/ Construire le diagramme de Fresnel relatif à cette expérience, en indiquant les valeurs représentant les trois différences de potentiel u, u_1 et u_2 .

c/ Calculer l'impédance de la bobine

d/ Déterminer l'angle de déphasage entre u_2 et i et dire quelle est celle de ces deux grandeurs qui est en

avance sur l'autre.

e/ Calculer les valeurs des grandeurs R et L.

f/ Calculer la puissance moyenne consommée par la bobine.

g/ Calculer la puissance moyenne consommée par l'ensemble constitué par la résistance et la bobine.

(Baccalauréat).

6/

A. Un circuit comprend, en série, une résistance R = 50 ohms, une inductance L = 1 henry et une capacité C = 100 microfarads. On maintient entre ses extrémités une tension de la forme $u = U_m \sin \omega t$.

1°) Construire point par point, en fonction de la pulsation ω, la courbe représentant les variations du rapport I/U, de l'intensité efficace à la tension efficace et celles du déphasage tension-intensité. On prendra successivement pour la pulsation les valeurs suivantes, exprimées en radians par seconde :
0, 50, 100, 150, 200, 250.

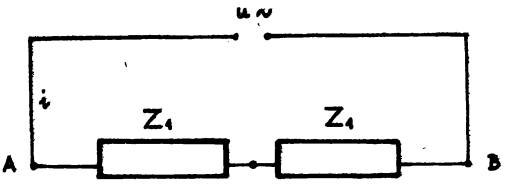
Sur les mêmes graphiques, on donnera également l'allure de ces courbes dans le cas particulier d'une résistance nulle (R = 0).

2°) La tension efficace d'alimentation étant U= 220volts, construire le diagramme de Fresnel pour la pulsation ω = 200 rd/s et donner l'expression de l'intensité instantanée, i, correspondante. Que devient ce diagramme et quelle nouvelle valeur i, l'intensité instantanée prend-elle dans le cas particulier de la résonance ($\omega = \omega_o$) ?

B. Le circuit série précédent constitue l'impédance Z_1. La tension efficace d'alimentation maintenue entre les bornes A et B est toujours U = 220 volts.

1°) Deux impédances identiques à Z_1 sont alors montées en série entre les bornes A et B. Montrer que ces deux impédances peuvent être remplacées par une impédance unique, Z, dont on précisera les caractéristiques

En déduire les valeurs de l'intensité efficace du courant et du déphasage tension-intensité pour la pulsation 220 rd/s et pour la pulsation ω_0 qui provoquait la résonance dans la question A,2°).



2°) On branche maintenant, en série entre les bornes A et B, n impédances identiques à Z_1 . Quelles sont alors les valeurs de l'intensité efficace du courant et du déphasage tension-intensité pour les pulsations 200 rd/s et ω_0 ?

(Baccalauréat)

Remarque :

pour la question B de ce problème il est conseillé d'utiliser les impédances complexes.

7/

A. Une bobine est montée en série avec un ampèremètre de résistance négligeable. Cet ensemble est alimenté

a/ En courant continu sous une différence de potentiel de 24 volts; l'ampèremètre indique alors une intensité de 4,8 ampères ;

b/ En courant alternatif de fréquence 50 hertz sous une différence de potentiel efficace de 110 volts ; l'ampéremètre indique dans ce cas une intensité efficace de 11 ampères.

En déduire :

1°) La résistance de cette bobine ;

2°) Son inductance.

B. Dans une seconde expérience, la même bobine est alimentée en courant alternatif à la fréquence de 400 hertz sous une différence de potentiel efficace de 220 volts.

1°) Quelle est l'intensité efficace qui la parcourt alors?

2°) Quelle capacité un condensateur ajouté en série dans

ce cas devrait-il avoir, pour obtenir le phénomène de résonance ?

3°) Calculer la différence de potentiel efficace qui serait alors obtenue aux bornes du condensateur.

C. On monte maintenant en série,

a/ La bobine précédente ;

b/ Une lampe à incandescence sans inductance ni capacité, portant les indications : 110 volts, 75 watts ;

c/ Un condensateur de capacité microfarads.

L'ensemble ainsi constitué est alimenté en courant alternatif de fréquence 400 hertz sous une tension croissante jusqu'à ce que la différence de potentiel efficace aux bornes de la lampe ait pour valeur 110 volts. On demande alors de calculer

1°) L'intensité efficace traversant les appareils ;

2°) La différence de potentiel efficace nécessaire aux bornes de l'ensemble ;

3°) La valeur de l'angle de déphasage de l'intensité par rapport à la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble ;

4°) Pour quelle autre valeur de la fréquence les appareils précédents, montés en série sous la même différence de potentiel efficace qu'à la question 2°) du paragraphe C/, seront traversés par le même courant efficace qu'à la question 1°) du paragraphe C/. Quelle est alors la valeur de l'angle de déphasage de l'intensité par rapport à la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble ?

(Baccalauréat).

Chapitre 26

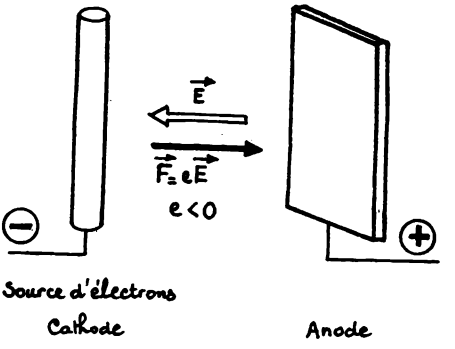
L'EFFET THERMOELECTRONIQUE

I - L'ENERGIE D'EXTRACTION D'UN ELECTRON

Un électron de conduction, mobile à l'intérieur d'un métal ne peut en franchir spontanément la surface.

En effet, l'électron est une charge négative, en intéraction électrique avec l'ensemble des charges électriques du métal : il subit les forces de répulsion des autres électrons et les forces d'attraction des noyaux, chargés positivement. L'ensemble de ces forces le maintiennent dans le métal.

Il ne peut franchir la surface du métal que s'il reçoit une certaine quantité d'énergie, supérieure ou égale à une quantité fixe W_o, appelée énergie d'extraction, dépendant de la nature du métal.



Lorsqu'un électron quitte le métal, celui-ci, qui était initialement neutre, prend une charge positive égale en valeur absolue à celle de l'électron, car il possède un proton en excès. Et l'électron retourne au métal. Si l'on veut éloigner un électron de la source d'électrons, il faut le placer dans un champ électrique convenable. Pour cela, on porte la source à un potentiel négatif. Elle devient cathode et repousse l'électron que l'on capte à l'aide d'une plaque positive (anode). Pour extraire un électron d'un métal et l'éloigner, il faut remplir deux conditions :

- Fournir une énergie supérieure ou égale à l'énergie d'extraction W_o
- Etablir un champ électrique qui éloignera l'électron

du métal.

II- EMISSION D'ELECTRONS PAR LES CORPS METALLIQUES CHAUFFES

1°) Définition

L'énergie qui permet à un électron de quitter un métal peut lui être fournie de plusieurs façons, par exemple sous forme thermique.

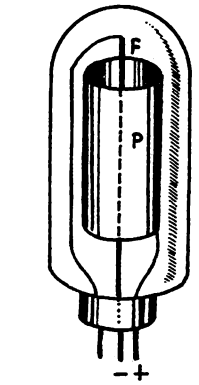
> L'effet thermoélectronique est l'émission d'électrons par les métaux portés à haute température.

Cet effet a été mis en évidence par Edison en 1884 alors qu'il cherchait à perfectionner la lampe à incandescence.

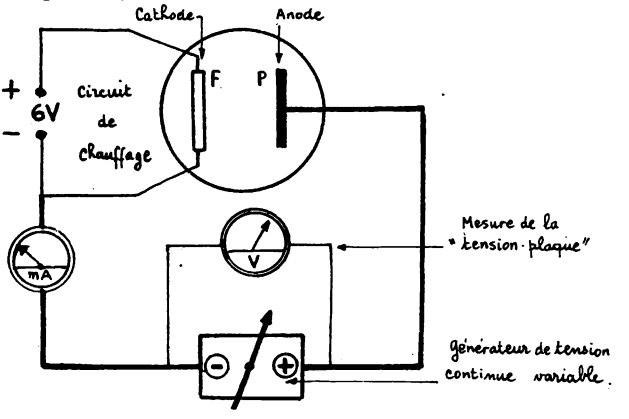
2°) Effet thermoélectronique dans la diode

La diode est une ampoule de verre à vide poussé (pression de l'ordre du millionième de millimètre de mercure), contenant deux électrodes).

- Une cathode émettrice d'électrons. C'est un filament F, porté à haute température par effet joule.
- Une anode ou plaque P, collectrice d'électrons.



Diode à chauffage direct
La plaque entoure le filament.



Montage pour l'étude de la diode.

La plaque est reliée au filament par le "circuit plaque" constitué d'un milliampèremètre et d'un générateur maintenant entre l'anode et la cathode une tension.

$$U = V_A - V_C$$

Lorsque l'on chauffe la cathode et qu'on la porte à un potentiel négatif par rapport à l'anode, les deux conditions d'extraction et d'éloignement des électrons sont réunies. Le milliampèremètre décèle un courant circulant du filament à la plaque dans le circuit, ce qui correspond à un courant d'électrons en sens contraire : du filament à la plaque dans le vide de la lampe et de la plaque au filament dans le circuit.

En revanche, si l'on inverse les polarités en rendant le filament positif et la plaque négative, le courant ne passe plus, parce que les électrons émis par effet thermoélectronique sont attirés par le filament dès leur sortie du métal.
En résumé :

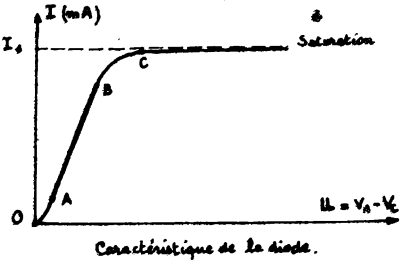
- Si $V_A - V_C > 0$, le courant passe dans la diode.

- Si $V_A - V_C < 0$, le courant ne passe pas.

Dans une diode à vide le courant ne peut circuler que dans un sens.

III-LA CARACTERISTIQUE DE LA DIODE

1°) Influence de la tension de plaque



Caractéristique de la diode.

Pour une température de chauffage donnée, on donne à la tension plaque des valeurs croissantes, on mesure les valeurs correspondantes de l'intensité et on trace la courbe

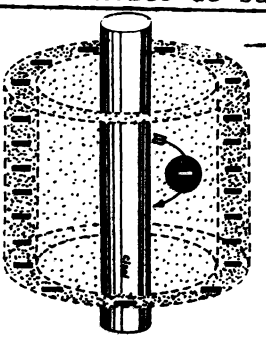
$$I = f(V_A - V_C)$$

appelée caractéristique de la diode. Nous distinguerons deux parties essentielles :

- de O à C, l'intensité croît en même temps que la tension. On remarquera entre O et C la partie rectiligne AB où les variations d'intensité sont proportionnelles aux variations de tension. C'est dans ce domaine de la caractéristique que l'on utilise les lampes à vide en électronique.

- au delà de C, l'intensité reste constante quelle que la tension de plaque. L'intensité atteint une valeur maximale I_s, appelée, intensité de saturation.

Interprétation de l'intensité de saturation

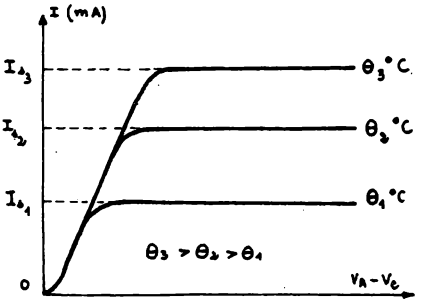


Pour une température de chauffage donnée, l'agitation thermique permet à un certain nombre d'électrons par unité de temps de franchir la surface du métal (N électrons par seconde), un peu à la façon d'une évaporation de molécules à travers la surface libre d'un liquide.

Mais le métal prend une charge positive, égale en valeur absolue à la charge négative expulsée. C'est pourquoi, en l'abscence de la tension plaque $V_A - V_C$, les électrons retournent vers le filament. Il s'établit un équilibre au cours duquel le nombre d'électrons expulsés est égal au nombre d'électrons réabsorbés, de sorte que le filament s'entoure d'un nuage d'électrons de densité constante.

Si l'on établit une tension plaque positive $V_A - V_C$, parmi les N électrons émis chaque seconde, une fraction traverse l'ampoule jusqu'à la plaque et le reste retourne au filament. Si la tension augmente, la fraction d'électrons attirés par la plaque augmente, jusqu'au moment où, pour une certaine valeur de la tension, tous les électrons émis chaque seconde ont la possibilité de traverser. Si la tension augmente encore, le nombre d'électrons qui franchissent le vide ne peut plus augmenter. L'intensité de saturation est atteinte.

2°) Influence de la température



Si l'on trace la caractéristique de la diode pour des valeurs croissantes de la température de chauffage du filament, on constate que l'intensité de saturation augmente.

Interprétation

Elever la température du filament revient à augmenter l'agitation thermique dans le métal et à faire croître le nombre d'électrons qui traversent la surface du métal à chaque seconde. L'intensité de saturation est donc une fonction croissante de la température du fil.

3°) En résumé

- Les électrons ne peuvent être expulsés du filament que s'il est porté à haute température. C'est l'effet thermoélectronique.

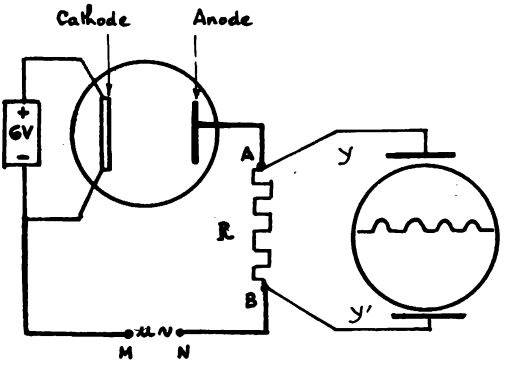
- Les électrons ne peuvent traverser la diode que si la tension plaque $V_A - V_C$ est positive.

- L'intensité du courant de saturation est une fonction croissante de la température du filament.

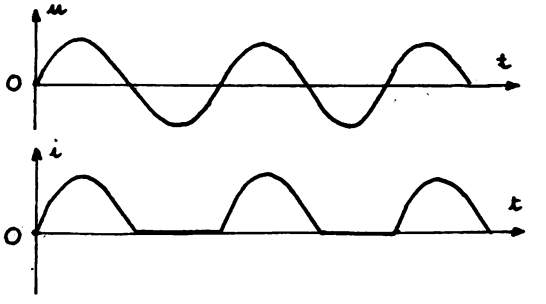
IV- LA DIODE, REDRESSEUR DE COURANT, OU LAMPE "VALVE"

Les électrons émis par le filament ne peuvent traverser la diode que si la tension plaque $U = V_A - V_C$ est positive. C'est pourquoi, si l'on applique entre la plaque et le filament une tension sinusoïdale, le courant ne peut circuler dans le circuit plaque que pour une seule alternance, celle au cours de laquelle la tension $u = V_A - V_C$ est positive.

On obtient un courant redressé, variable en intensité, circulant toujours dans le même sens. Ci-dessous, **en haut**, un montage permettant [illegible] le courant redressé à l'aide d'un oscilloscope, en bas, courbes représentant la tension appliquée en fonction du temps et l'intensité dans le circuit en fonction du temps.

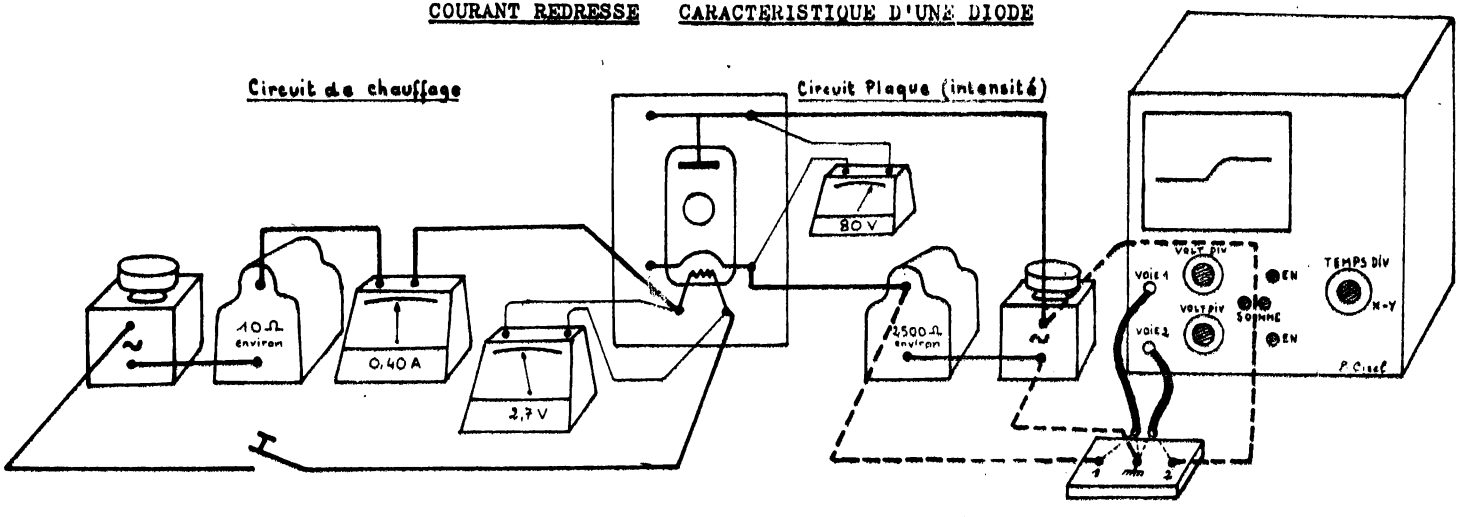


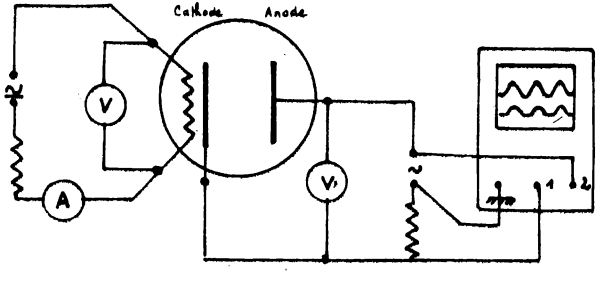
Si l'on branche les plaques Y'Y en dérivation aux bornes M et N du générateur, on observe la sinusoïde $u(t)$.



Courbes $u(t)$ et $i(t)$ pour une diode.

COURANT REDRESSE CARACTERISTIQUE D'UNE DIODE





- Pour observer la courbe $u_p = f(t)$, tension appliquée entre les électrodes, appuyer sur le bouton EN de la voie 2 ∿∿∿

- Pour observer la courbe $i_p = f(t)$, intensité dans le circuit plaque, appuyer sur le bouton EN de la voie 1 ∿∿∿

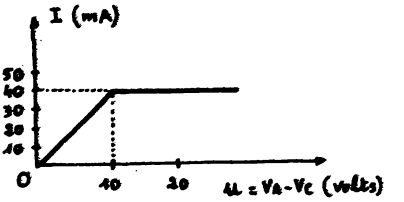
- Pour observer les deux courbes simultanément, appuyer sur les deux boutons EN et sur les deux boutons SOMME.

- Pour observer la caractéristique de la diode, $i = f(u)$ appuyer sur le bouton X-Y du circuit de TEMPS DIV. On privilégie alors le balayage externe.

1/

1°) La caractéristique d'une diode est la courbe I = f(U) I est l'intensité anodique et U = V_A - V_c la différence de potentiel entre l'anode et la cathode.

a/ Faire un schéma du montage.



b/ La caractéristique est assimilable au schéma ci-contre Quelle est la résistance interne ρ de la diode? (La résistance d'une diode est définie comme le rapport de la variation de la tension à la variation correspondante de l'intensité dans la partie rectiligne de la caractéristique, avant d'atteindre la saturation).

2°) La source de tension V_A - V_c est remplacée par une tension sinusoïdale u = Um sinωt, de valeur maximale Um = 10 volts et de pulsation ω = 314 rd/s.

a/ Représenter la courbe i = f (t) pout t ∈ [0,2T].

b/ Calculer la valeur efficace I de l'intensité de ce courant, c'est-à-dire l'intensité d'un courant continu ayant les même effets thermiques que le courant i pendant la même durée.

2/ L'étude expérimentale d'une diode à vide a donné les résultats suivants pour des tensions continues croissantes appliquées entre l'anode et la cathode et une tension de chauffage du filament constante:

U volts	⩽ 0	5	10	15	20	25	30	35	40	50
I (mA)	0	8,0	20,0	32,5	45,0	53,0	57,0	60,0	61,0	62,0

1°) Faire un schéma représentant le circuit complet permettant d'obtenir ces résultats, en précisant le sens du

courant.

2°) Tracer la courbe I = f (U) donnant la caractéristique statique de la diode. Interpréter l'allure du graphe.

3°) Déduire la valeur du rapport $\frac{\Delta U}{\Delta I}$ correspondant à la partie rectiligne du graphe en précisant l'unité avec laquelle on l'exprime.

4°) La diode est soumise à une tension alternative sinusoïdale de la forme $u = 20\sqrt{2}\sin 314t$. Tracer la courbe donnant pendant une période (dont on calculera la valeur) l'intensité du courant en milliampères, en fonction du temps. Préciser sur le graphe les coordonnées des points remarquables. (Toutes les résistances sont supposées négligeables par rapport à celle de la diode calculée précédemment).

(Baccalauréat tunisien, juin 1975, partiel).

Chapitre 27

ACCELERATION DES ELECTRONS PAR UN CHAMP ELECTRIQUE

I - ACTION D'UN CHAMP ELECTRIQUE SUR UN FAISCEAU D'ELECTRONS

L'électron

C'est l'une des particules stables formant l'atome.

Sa masse est : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

Il porte la charge électrique élémentaire négative que nous noterons.

$e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ coulomb. Donc: $e < 0$

Pour la valeur absolue de cette charge, nous écrirons :

$$|e| = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{coulomb}$$

Symboles de l'électron

Dans les réactions chimiques, l'électron est symbolisé par e^- . Par exemple : $Zn \rightleftarrows Zn^{++} + 2e^-$

Dans les réactions nucléaires (dernier chapitre), il est symbolisé par ${}^{0}_{-1}e$. Le zéro indique que sa masse est négligeable devant celle d'un nucléon et le -1 indique qu'il porte la charge électrique élémentaire. Exemple :

$${}^{227}_{89}Ac \longrightarrow {}^{227}_{90}Th + {}^{0}_{-1}e$$

Actinium ⟶ Thorium + électron

1°) Passage des électrons entre la cathode et l'anode de l'oscilloscope cathodique

Rappelons le schéma de l'ampoule d'un oscilloscope cathodique :

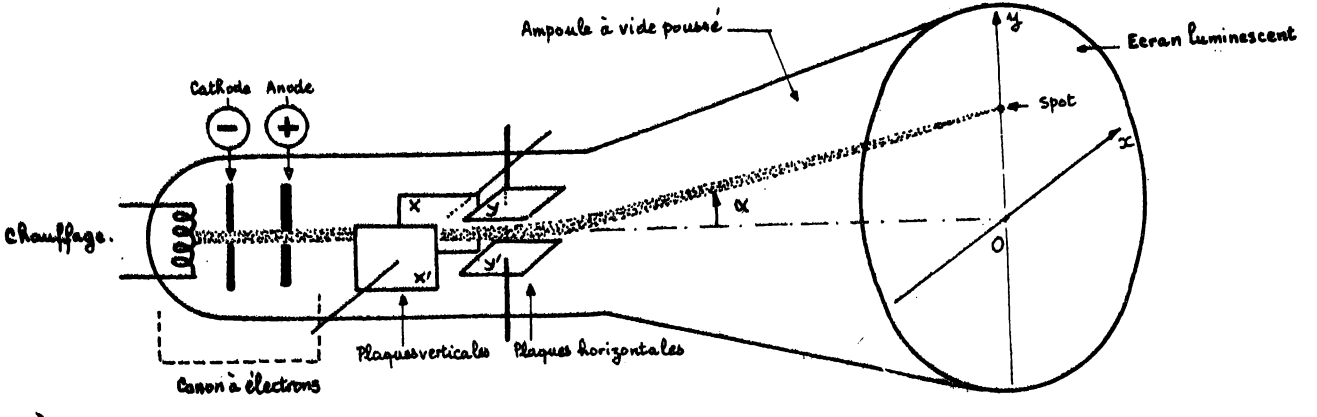
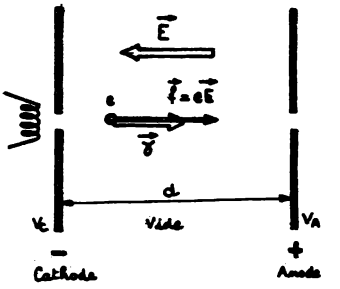


Schéma simplifié d'une ampoule d'oscilloscope

Les électrons sont émis et accélérés dans le canon à électrons. Un filament émet les électrons par effet thermoélectrique. Ils sont ensuite accélérés entre une cathode et une anode percées chacune d'un trou pour permettre leur passage. Nous assimilerons ces deux électrodes aux plaques d'un condensateur plan entre lesquelles règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$, dirigé vers les potentiels décroissants, c'est-à-dire de l'anode vers la cathode.



Soit $U = V_A - V_C$ la différence de potentiel entre anode et cathode et d leur écartement. E, U et d sont liés par :

$$E = \frac{U}{d}$$

E en volts par mètre (V/m)

U en volts

d en mètres.

a/ Comparaison entre la force électrique et le poids

Dans le champ électrique uniforme $\vec{E}$, l'électron est soumis à la force constante $\vec{f} = e \cdot \vec{E}$

de sens contraire à celui de $\vec{E}$ puisque la charge de l'électron est négative.

Supposons que E = 1000 V/m. L'intensité de la force électrique est :

$$f = |e| \cdot E = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1000 = 1{,}6 \cdot 10^{-16} \text{ N}$$

Le poids de l'électron vaut :

$$p = mg = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9{,}80 \simeq 9{,}0 \cdot 10^{-30} \text{ N}$$

Effectuons le rapport de ces deux forces :

$$\frac{f}{P} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-16}}{9{,}0 \cdot 10^{-30}} = 1{,}8 \cdot 10^{13} \iff f = 1{,}8 \cdot 10^{13} \cdot p$$

Cet exemple numérique montre que la force électrique est très grande par rapport au poids. Ceci est général, de sorte qu'on ne tient jamais compte du poids d'un électron placé dans un champ électrique.

b/ L'accélération d'un électron

L'électron est donc soumis à la seule force électrique $\vec{f} = e \cdot \vec{E}$. Il prend une accélération constante qui vaut, d'après la relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{f}}{m} = \frac{e.\vec{E}}{m}$$

En module :

$$\gamma = \frac{|e|}{m} E = \frac{|e|}{m} \frac{U}{d}$$

Application numérique

Avec E = 1000 V/m, on calcule : $\gamma = 1{,}8 \cdot 10^{14}$ m/s^2 Cette valeur énorme tient au fait que la masse de l'électron est extrêmement faible.

c/ Mouvement d'un électron initialement immobile

L'électron est soumis à une accélération constante. S'il est émis par le filament avec une vitesse initiale négligeable, son mouvement ultérieur est rectiligne uniformément accéléré.

Conclusion

> Placé sans vitesse initiale dans un champ électrique uniforme, un électron prend un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

d/ Energie cinétique de l'électron lorsqu'il atteint l'anode

Rappelons un résultat admis en classe de sixième année :

Le travail d'une force électrique agissant sur une charge électrique de valeur algébrique q, passant du potentiel V_M au potentiel V_N est égal à: $W = q(V_M - V_N)$

Pour déterminer l'énergie cinétique de l'électron au niveau de l'anode, appliquons le théorème de l'énergie cinétique pour le déplacement de la cathode à l'anode :

variation de l'énergie cinétique = travail de la force électrique :

$Ec_A - Ec_c = e(V_A - V_c)$ avec $V_A - V_c = -U$

$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = e(-U) = -e\,U = |e|\,U$ (car $-e = |e|$)

$$\boxed{\frac{1}{2} mv^2 = |e|\,U}$$

Cette expression montre que l'énergie cinétique atteinte par l'électron au niveau de l'anode est proportionnelle à la différence de potentiel entre anode et cathode. Elle ne dépend pas de l'écartement des électrodes.

e/ L'électron-volt

Supposons que U = 100 volts. L'électron acquiert une énergie :

$$W = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 100 = 1{,}6 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Elle est très petites par rapport au joule, unité internationale d'énergie. Pour caractériser les énergies de particules, le joule ne convient pas ; on préfère utiliser une unité spécifique : l'électron-volt, défini ainsi:

> L'électron-volt est l'énergie cinétique acquise par un électron accéléré par une différence de potentiel de un volt.

1 électron-volt = 1 e.V = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.1 V

$$\boxed{1 \text{ e.V} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}$$

Les multiples fréquemment employés sont :

Le Méga électron-volt : 1 MeV = 10^6 e.V

Le Giga électron-volt : 1 GeV = 10^9 é.V

f/ La vitesse de l'électron accéléré par une tension U

De l'expression de l'énergie cinétique on déduit celle de la vitesse :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2|e|\,U}{m}}}$$

Expression numérique

$$v = \sqrt{\frac{2.1{,}6 \;.\; 10^{-19} \;.U}{9{,}1 \;.\; 10^{-31}}} = \sqrt{35{,}2.10^{10}U} = 5{,}93.10^{5}\sqrt{U} \text{ m/s}$$

On peut utiliser la formule :

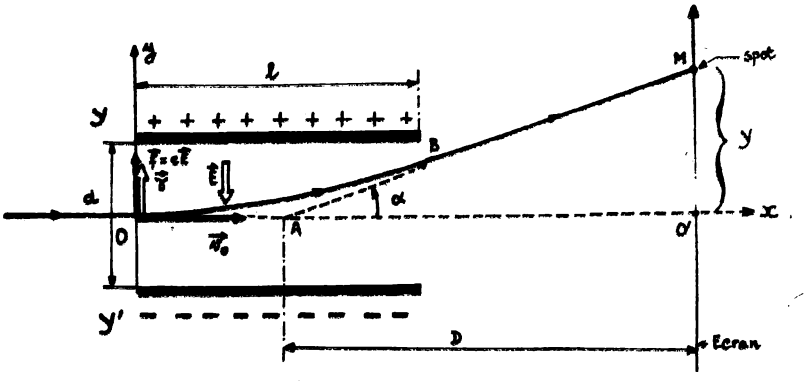
$$v \simeq 600\sqrt{U} \quad \text{km/s}$$

Par exemple, pour U = 100 volts :

$$v = 600 \;.\; 10 = 6000 \text{ km/s}$$

2°) Le passage des électrons entre les plaques horizontales

Après avoir traversé l'anode, l'électron entre dans une région où le champ électrique est nul. Son poids est la seule force à laquelle il est soumis. Il n'est donc plus négligeable. Mais sa vitesse est très élevée et l'on considère que sa trajectoire est rectiligne. Il atteint ainsi le point O situé entre les plaques horizontales avec une vitesse v_o égale à la vitesse acquise au niveau de l'anode.



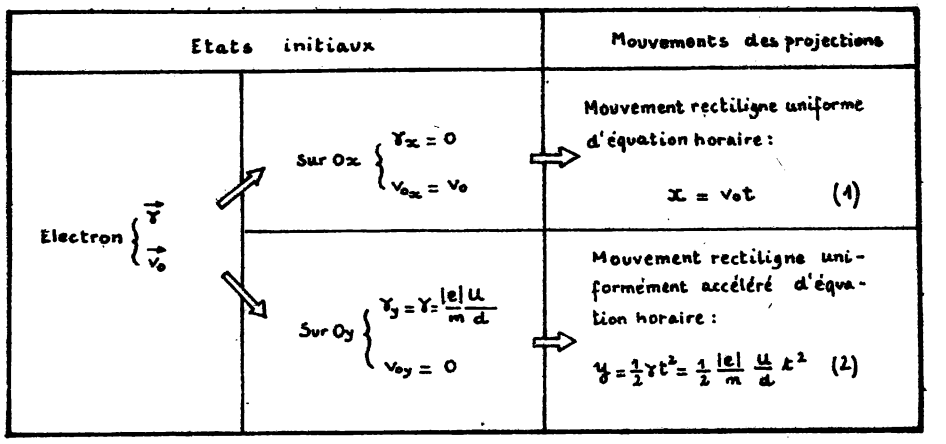
a/ Trajectoire de l'électron pour une vitesse initiale $\vec{v}_o$ perpendiculaire au champ électrique

La tension appliquée entre les plaques est U, le champ électrique est $E = \frac{U}{d}$ et la force électrique, $\vec{f} = e.\vec{E}$. Lorsque l'électron pénètre au point O, les conditions initiales sont donc :

- une vitesse initiale $\vec{v}_o$ dirigée suivant l'axe Ox ;
- une accélération $\vec{\gamma}$ dirigée suivant l'axe Oy, de module

$\frac{|e|}{m} \cdot \frac{U}{d}$

Ecrivons les équations des mouvements projetés sur les axes :



L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant t entre les équations (1) et (2) :

$$y = \frac{1}{2} \frac{|e| \cdot U}{m v_o^2 \; d} x^2$$

$x \in [0, \ell]$

ℓ : longueur des plaques.

La trajectoire d'un électron pénétrant dans un champ électrique uniforme avec une vitesse initiale perpendiculaire au champ électrique est une portion de parabole.

b/ La déviation

A la sortie des plaques, au point B, le champ électrique est nul et l'électron poursuit sa trajectoire en ligne droite. Cette droite fait avec l'axe Ox un angle α tel que tg α est égal à la valeur de la dérivée de y par rapport à x pour $x = \ell$, abscisse du point B.

$$\text{tg}\,\alpha = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = \ell}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{|e| \; U}{m v_o^2 \; d}$$

c/ Le déplacement du "spot" sur l'écran

D'après une propriété des paraboles, la tangente au point B, d'abscisse ℓ, coupe l'axe Ox au point A d'abscisse $\frac{1}{2}\ell$. Appelons D = AO' la distance du milieu des plaques à l'écran de l'oscilloscope. Le déplacement du spot sur l'écran est :

$$Y = D \operatorname{tg}\alpha = \frac{|e|}{m v_o^2} \times \frac{U}{d} \cdot \ell \cdot D$$

$|e|$, m, d, D, ℓ sont des constantes. Pour une tension entre l'anode et la cathode du canon à électrons fixe, la vitesse v_o est également constante. Le déplacement du spot peut s'écrire sous la forme :

$$Y = K \cdot U$$

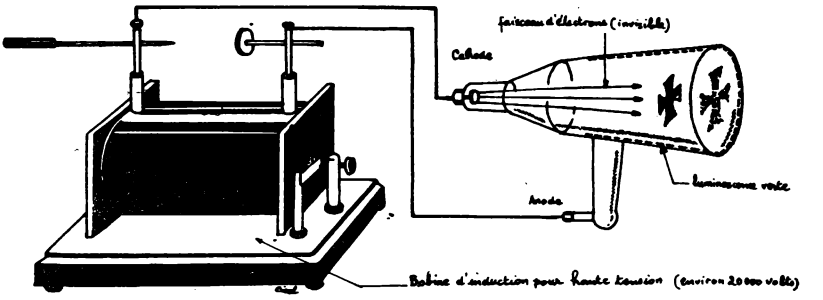
Il est proportionnel à la tension appliquée entre les plaques. L'oscilloscope cathodique permet donc d'étudier la tension aux bornes d'une portion de circuit.

II- PROPRIETES DES FAISCEAUX D'ELECTRONS

A partir des années 1870, l'Anglais Crookes réalise une série d'expériences qui, à une époque où l'on pensait tout connaître de la physique, devaient conduire en une trentaine d'années aux découvertes des rayons X, des électrons, de la radioactivité et par la suite l'étude approfondie de l'atome.

L'appareil qu'il utilisait, le "Tube de Crookes", produisait un rayonnement mystérieux que l'on appela "rayons cathodiques" parce qu'il était émis par la cathode de l'appareil. En fait, nous savons depuis le début de ce siècle que les faisceaux cathodiques sont des faisceaux d'électrons.

Le tube de Crookes est une ampoule de verre renfermant un gaz sous faible pression (1/100 de millimètre de mercure), muni de deux électrodes. Lorsque la différence de potentiel entre l'anode et la cathode est de l'ordre de 10 000 volts, la cathode émet un faisceau d'électrons perpendiculaire à sa surface. L'expérience montre que toute les parties du tube, sauf au voisinage de la cathode sont au potentiel de l'anode, si bien que sa position est sans importance.



L'extraction d'électrons de la cathode est possible, car les deux conditions : énergie d'extraction et champ accélérateur sont réunies. En effet, dans le gaz résiduel existent des ions positifs. Ce sont des molécules ionisées par des photons de très haute énergie provenant de l'espace (rayons cosmiques). Les ions positifs se précipitent sur la cathode négative et grâce à leur énergie cinétique lui arrachent des électrons qui traversent l'ampoule. A leur tour, en heurtant des molécules du gaz résiduel, ils en ionisent un certain nombre qui se précipitent sur la cathode et le processus se poursuit.

Le tube de Crookes n'a plus aucune utilisation scientifique. Il sert uniquement à montrer au lycée quelques propriétés des faisceaux d'électrons, parmi lesquelles :

1°) La luminescence

Les faisceaux d'électrons accélérés provoquent la luminescence de nombreuses substances. Sous le choc des électrons, le verre s'illumine en vert, le revêtement interne du tube de télévision en blanc etc.

2°) Trajectoire rectiligne et déviation par les champs

En l'abscence de champ électrique ou magnétique, la position de l'ombre d'une croix placée dans le tube montre que les électrons se déplacent en ligne droite, quelle que soit la position de l'anode. Mais si l'on place le tube dans un champ électrique externe, ou dans l'entrefer d'un aimant, l'ombre se déplace prouvant ainsi que le faisceau d'électrons a été dévié.

3°) Ils ne traversent pas la matière

L'existence de l'ombre prouve que les électrons sont arrêtés par la matière.

4°) L'énergie cinétique des électrons

L'énergie cinétique des électrons est suffisamment grande pour être transmise à un petit moulinet placé sur deux rails horizontaux à l'intérieur du tube de Crookes.

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 26

I - ACCELERATION D'UN ELECTRON DANS UN CHAMP ELECTRIQUE UNIFORME

Dans un champ électrique uniforme, $\vec{E}$, l'électron

- est soumis à une force électrique constante $\vec{f} = e.\vec{E}$, de sens contraire à celui de $\vec{E}$;
- il prend l'accélération constante

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{f}}{m} = \frac{e}{m}\vec{E}$$

Si le champ est créé par un condensateur plan caractérisé par U et d, le module de l'accélération est :

$$\gamma = \frac{|e|}{m}\frac{U}{d}$$

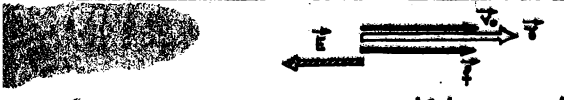
II- MOUVEMENT DE L'ELECTRON

L'étude est la même que pour les mouvements des points matériels dans le champ de pesanteur terrestre.

Pour un électron ou une particule électrisée (proton par exemple), on ne tient jamais compte du poids.

Les conditions initiales sont essentielles.

1°) Vitesse initiale nulle ou de même sens que la force



Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

Si la vitesse initiale et la force électrique sont de sens contraires (cas non abordé dans le cours) le mouvement est rectiligne uniformément varié, avec deux phases : une retardée, une accélérée.

2°) Vitesse initiale quelconque

On étudie les mouvements des projections sur les axes du mouvement.

L'étude faite en cours ($\vec{v}_o$ perpendiculaire à $\vec{E}$) n'est qu'un cas particulier. C'est pourquoi on ne doit pas apprendre les formules établies. Il faut savoir les redémontrer rapidement.

3°) Cas d'une particule chargée positivement

La force électrique et le champ ont même sens. Refaire toute l'étude.

III-ENERGIE CINETIQUE

Elle s'exprime en électrons-volts :

$$1 \text{ eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ joule.}$$

On l'obtient par application du théorème de l'énergie cinétique :

Variation de Ec = travail de la force électrique = $e(V_M - V_N)$

- e : valeur algébrique de la charge ;
- V_M : potentiel de départ ;
- V_N : potentiel d'arrivée.

Si e est exprimé en coulombs et V en volts, Ec est en joules.

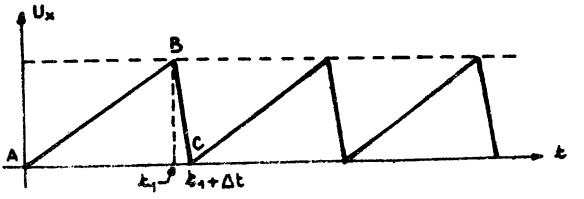
Si on prend pour unité de charge celle de l'électron (charge de l'électron = 1 unité), Ec s'exprime directement en électrons-volts.

Chapitre 7

EXERCICES

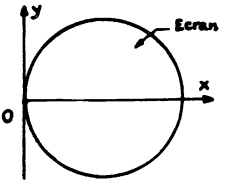
1/

1°) Le "balayage" ou "base de temps" d'un oscilloscope cathodique s'obtient en appliquant entre ses plaques verticales une tension Ux en dents de scie, comme celle que représente la figure ci-dessous :



De A à B, la tension croît proportionnellement au temps ($t \in [0, t_1]$). De B à C, pendant la durée Δt négligeable devant t_1, la tension s'annule brusquement.

On démontre en cours que le déplacement du spot sur l'écran est proportionnel à la tension appliquée entre les plaques : $X = K \cdot U_x$. A l'instant $t = 0$ s, le spot est au point O. Quelle est la nature de son mouvement dans l'intervalle de temps $t \in [0, t_1 + \Delta t]$?



2°) Une diode est alimentée par une tension sinusoïdale $u = U_m \sin \omega t$, de valeur maximale $U_m = 10$ volts et de pulsation $\omega = 314$ rd/s. Sa résistance interne est $\rho = 250$ ohms (il s'agit de la diode de l'exercice 1 du chapitre 25). On intercale dans le circuit de la diode une résistance R = 250 ohms, dont les extrémités sont reliées aux plaques horizontales de l'oscilloscope. Faire un schéma du montage.

3°) Dans cette question, on suppose que le balayage ne fonctionne pas. Les caractéristiques des plaques horizontales sont les suivantes :
d = 1 cm ;
longueur : ℓ = 4 cm ;
distance du milieu des plaques à l'écran : D = 40 cm.

Le faisceau d'électron qui pénètre entre les plaques a préalablement été accéléré par une tension U = 200volts dans le canon à électrons.

a/ Avec quelle vitesse v_o les électrons arrivent-ils entre les plaques ? On suppose que leur vitesse initiale dans le canon à électrons est négligeable.

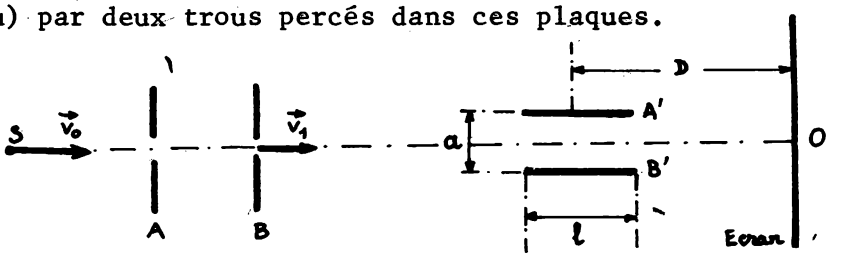
b/ Montrer que le déplacement Y du spot est indépendant de la charge et de la masse de l'électron et qu'il ne dépend que de U_1 et de la tension u_y appliquée entre les plaques. Calculer le déplacement maximal du spot sur l'écran, correspondant à $u_y = U_m$.

c/ Expliquer pourquoi la durée de parcours d'un électron jusqu'à l'écran est indépendante des déviations qu'il subit dans l'oscilloscope.

4°) Les plaques horizontales étant reliées à la résistance R, on établit le balayage. La durée t_1 définie plus haut vaut 4.10^{-2} s. Δt est négligeable. Quelle courbe le spot décrit-il sur l'écran lorsque t varie de 0 à t_1 ?

Le balayage se produit 25 fois par seconde. Expliquer ce que l'on voit sur l'écran, compte tenu de la persistante des impressions rétiniennes.

2/ Une source radioactive émet des particules α , c'est à-dire des noyaux d'hélium portant la charge positive $q = 2.1{,}6 . 10^{-19}$ coulomb et ayant la masse $m = 0{,}67.10^{-26}$kg La source est placée dans un tube où le vide est parfait et les particules quittent la source avec la vitesse v_o = 500 km/s dans la direction de l'axe du tube. Le faisceau traverse l'espace compris entre deux plaques métalliques A et B (disposées perpendiculairement au faisceau) par deux trous percés dans ces plaques.



1°) On applique la différence de potentiel constante U aux plaques pour que la vitesse des particules α à la sortie du deuxième trou soit réduite à v_1 = 400km/s. Préciser la polarité des plaques A et B et calculer la valeur de la différence de potentiel.

2°) Les particules α sortant de la plaque B passent maintenant dans l'espace compris entre deux plaques métalliques A' et B' disposées parallèlement à l'axe du tube. Leur distance est a = 2cm et leur longueur ℓ=4cm La plaque A' est portée à un potentiel positif tel que la différence de potentiel, V, entre A' et B' soit égale à 67 volts. Les particules viennent enfin frapper un écran fluorescent disposé perpendiculairement à l'axe du tube à une distance D = 50 cm du centre des plaques A' et B'.

Calculer la distance, y, qui sépare sur l'écran la tache lumineuse O correspondant à V = 0 et la tache correspondant à V = 67 volts. De quel côté ce déplacement se fait-il par rapport à l'axe SO du système ?

3°) En fait, sur l'écran, il y a une deuxième tache lumineuse, correspondant à une vitesse d'émission de particules α par la source radioactive v_o' différente de v_o . Cette tache est située à 2 mm de la tache O correspondant au potentiel V = O. Calculer v_o'.

N.B. Dans tout le problème on négligera l'influence de la pesanteur terrestre.

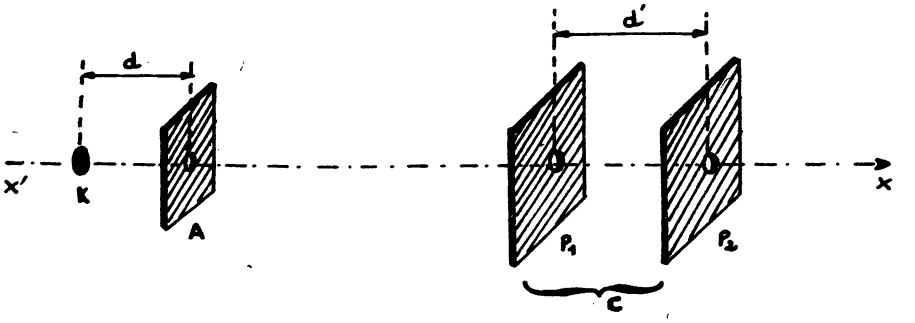
(Baccalauréat algérien, 1969).

3/ On étudie le dispositif de la figure 1. Il comprend les éléments suivantes :

- Une plaque métallique, K, (cathode) qui est chauffée à température élevée.

- Une anode, A, placée à la distance d de la cathode K. L'anode est percée au centre pour permettre aux électrons émis par la cathode de poursuivre leur trajet au-delà de l'anode.

- Un condensateur, C, composé de deux plaques planes et parallèles P_1 et P_2 . Les deux plaques, perpendiculaires à l'axe X'X, sont percées au centre pour permettre le passage des électrons. On appelle d' la distance entre P_1 et P_2 .



L'ensemble du dispositif est placé dans le vide et l'on supposera

a/ que le champ électrique entre K et A est uniforme (donc de module constant) et parallèle à l'axe X'X ;

b/ que le champ électrique entre A et P_1 est nul à chaque instant.

A - ETUDE DE L'ENSEMBLE ANODE ET CATHODE

On appelle m la masse d'un électron et -q sa charge

électrique. On admettra que les électrons émis par la cathode K sortent du métal avec une vitesse nulle. La cathode est portée au potentiel V_A positif et constant.

On étudie le comportement des électrons entre l'anode et la cathode.

1°) Exprimer en fonction de m, q, V_A et d, l'accélération d'un électron situé entre K et A. Quelle est la trajectoire des électrons ? En déduire l'équation du mouvement des électrons entre K et A.

2°) Déterminer la vitesse v_o atteinte par les électrons lorsqu'ils arrivent au niveau de l'anode A.

3°) Retrouver directement l'expression de la vitesse v_o, en utilisant le théorème de l'énergie cinétique, et calculer numériquement cette vitesse avec les données suivantes :

$$m = 9.10^{-31} \text{ kg} \; ; \; q = 1{,}6 \; . \; 10^{-19} \text{C} \; ; \; V_A = 10^3 \text{V}$$

4°) Quelle est la nature du mouvement des électrons entre A et P_4 ? Avec quelle vitesse pénètrent-ils dans le condensateur C ?

B - ETUDE DE L'INFLUENCE DU CONDENSATEUR C SUR LE MOUVEMENT DES ELECTRONS

Les électrons qui ont traversé l'anode A pénètrent dans le condensateur C. On établit entre les armatures P_1 et P_2 du condensateur une différence de potentiel.

$$u = V_{P_2} - V_{P_1} = U\sqrt{2} \cos \omega t$$

qui crée un champ uniforme, variable au cours du temps.

1°) Exprimer l'accélération γ à laquelle est soumis, entre P_1 et P_2 , un électron qui pénètre, à l'instant $t = \theta$, dans le condensateur C. On admettra que la durée du trajet de l'électron est suffisamment brève pour que la force à laquelle est soumis cet électron n'ait pas le temps de varier pendant le trajet de P_1 à P_2 .

Application numérique

Calculer les valeurs de γ suivantes :

γ_1 pour $\theta = 0$, γ_2 pour $\theta = \frac{\Pi}{\omega}$ et γ_3 pour $\theta = \frac{2\Pi}{\omega}$

O[redacted] :

d' = 1cm ; U = 600 V ; $f = \frac{\omega}{2\Pi} = 2.10^7$ hertz.

2°) En appliquant le théorème de l'énergie cinétique,

calculer la vitesse de sortie v_s en P_2 , d'un électron qui a pénétré à l'instant θ dans le condensateur.

Application numérique

Calculer les vitesses respectives de sortie v_1 , v_2 et v_3 des électrons qui ont pénétré dans le condensateur aux instants θ précisés ci-dessus.

3°) A quelle distance, D, de P_2 les électrons animés de la vitesse V_3 rattraperont-ils les électrons sortis de C avec la vitesse v_2 ? On négligera la durée du trajet des électrons entre les armatures P_1 et P_2 .

Application numérique

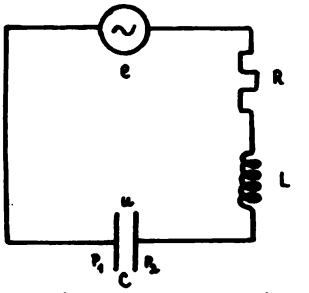
Calculer D avec les données précédentes.

C - ETUDE DE L'ALIMENTATION ELECTRIQUE DU CONDENSATEUR C

1°) Calculer la capacité du condensateur C sachant que les armatures P_1 et P_2 sont des carrés de 50 cm de côté. (On rappelle l'expression, valable en unités SI,

$$C = \frac{10^{-9}}{36\pi} \cdot \frac{S}{d'} ,$$

S étant la surface d'une armature et d' = 10 cm la distance entre les armatures).



2°) On alimente le condensateur C à l'aide du montage de la figure ci-dessus. L est une inductance pure, R est une résistance pure. Construire le diagramme de Fresnel du circuit faisant clairement apparaître la f. é. m., e, aux bornes de l'ensemble. Quelle relation doit-il exister entre L, C et ω pour que la tension u soit en quadrature avec e ? En déduire la valeur de L.

(Baccalauréat).

Chapitre 28

L'EFFET PHOTOELECTRIQUE
NATURE CORPUSCULAIRE DE LA LUMIERE

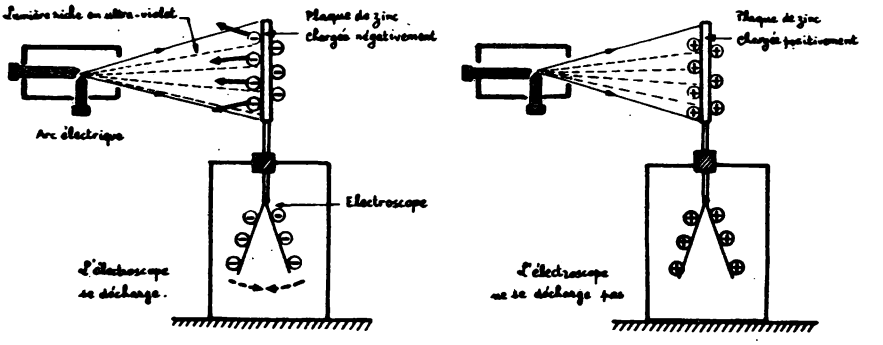
Les expériences de Young et de Fresnel sur les interférences lumineuses, au début du 19ème siècle, avaient révélé la nature de la lumière : il fallait la considérer comme la propagation d'une onde.

Mais en 1887, année où meurt Fresnel, HERTZ (1857-1894) réalise une expérience qui apporta le trouble chez les physiciens pendant plus de quinze ans.

I - LA MISE EN EVIDENCE D'UN SEUIL PHOTOELECTRIQUE

1°) L'expérience de Hertz avec des radiations U.V.

Hertz observe qu'une plaque de zinc, chargée d'électricité négative, solidaire d'un électroscope se décharge rapidement lorsqu'on l'éclaire avec une lumière contenant des radiations ultra-violettes (première figure). La même plaque ne se décharge pas si elle est chargée positivement (deuxième figure).



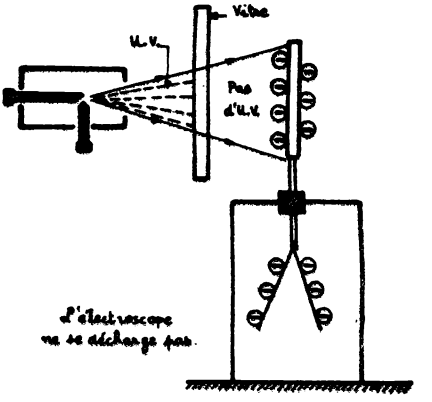
La théorie ondulatoire de la lumière parvient à interpréter cette expérience. Rappelons que pour être expulsé de la surface d'un métal, un électron doit recevoir une énergie au moins égale à son énergie d'extraction W_o (voir chapitre : l'effet thermoélectronique).

On peut donc supposer que l'onde lumineuse fournit progressivement l'énergie aux électrons en les faisant vibrer, jusqu'au moment où ils en ont absorbé suffisamment pour quitter le métal.

- Si la plaque de zinc est chargée négativement, ils sont repoussés et elle se décharge.

- Si la plaque de zinc est chargée positivement, ils sont attirés dès qu'ils quittent le métal et la décharge n'a pas lieu.

2°) La même expérience sans radiations U.V.



Si on intercale entre la source de lumière et la plaque métallique, chargée négativement, une plaque de verre qui absorbe le rayonnement ultra-violet, la décharge n'a pas lieu.

On en conclut que c'est le rayonnement ultra-violet qui provoque l'émission d'électrons par le zinc.

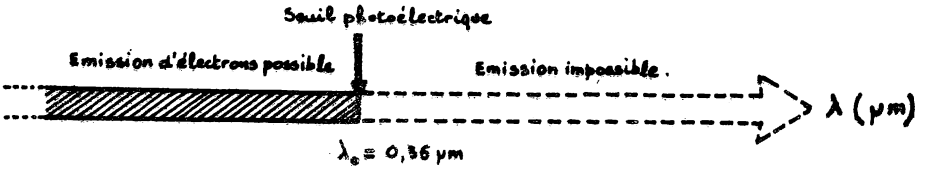
Pour confirmer ce fait, on vérifie qu'une lampe à incandescence puissante, mais dépourvue de rayons U.V. ne permet pas d'extraire d'électrons. En revanche, une lumière de très faible intensité mais contenant des rayons U.V. arrache des électrons au zinc.

3°) Le seuil photoélectrique du zinc

Des expériences quantitatives ont montré que pour le zinc :

- l'émission d'électrons n'est possible que pour des radiations de longueur d'onde $\lambda \leqslant 0{,}36\ \mu m$;

- elle est impossible pour des radiations de longueur d'onde $\lambda > 0{,}36\ \mu m$.



La longueur d'onde λ_o = 0,36 µm est le seuil photoélectrique du zinc.

Chaque métal possède un seuil photoélectrique qui dépend de sa nature. C'est la longueur d'onde λ_o de la radiation au dessus de laquelle l'émission d'électrons par ce métal est impossible.

- Pour le zinc : λ_o = 0,36 µm (domaine U.V.)
- Pour le sodium : λ_o = 0,50 µm (domaine visible)
- Pour le caesium : λ_o = 0,66 µm (domaine visible)

4°) Définition de l'effet photoélectrique

L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par des métaux lorsqu'ils sont éclairés par des radiations de longueur d'onde inférieure à leur seuil photoélectrique λ_o

Tenant compte de la relation entre la longueur d'onde λ et la fréquence ν, ($\nu = \frac{c}{\lambda}$) nous écrirons :

EFFET PHOTOELECTRIQUE { si $\lambda \leqslant \lambda_o$ ou $\nu \geqslant \nu_o$

5°) Echecs de la théorie ondulatoire

L'existence d'un seuil photoélectrique est inexplicable en théorie ondulatoire. En effet, selon cette théorie, l'énergie transportée par la lumière et échangée avec les électrons augmente avec l'intensité du faisceau lumineux. Il suffirait donc d'augmenter l'intensité d'un faisceau lumineux dépourvu d'U.V. pour extraire des électrons du zinc. Or cela n'a pas lieu.

Autre fait inexplicable en théorie ondulatoire : supposons que la radiation utilisée permette l'émission d'électrons, mais que le faisceau lumineux soit très peu intense. La théorie ondulatoire prévoit qu'il faudra une durée importante pour que les électrons absorbent l'énergie qui provoquera leur départ. De plus, l'onde atteignant la surface du métal uniformément, les départs d'électrons devraient avoir lieu à l'instant calculé en tous les points du métal.

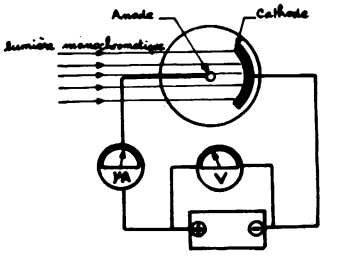
Le résultat réel est tout différent : aux très faibles intensités, les départs d'électrons sont totalement indéterminés. Le premier départ peut même être instantané Le point du métal qui émettra cet électron dépend totalement du hasard.

Tout se passe comme si, au lieu de se répartir uniformément sur la plaque métallique, l'énergie lumineuse s'était brutalement CONCENTREE EN QUELQUES POINTS.

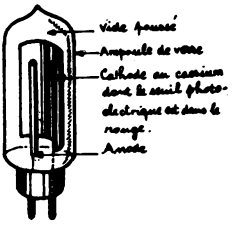
II -L'ENERGIE CINETIQUE MAXIMALE DES PHOTOELECTRONS

1°) La cellule photoélectrique.

C'est une ampoule à vide poussé, contenant une photocathode émettrice d'électrons, portée au potentiel négatif V_c et une anode portée au potentiel positif V_A , servant à capter les photoélectrons.



Montage pour l'étude de la cellule



Une cellule photoélectrique

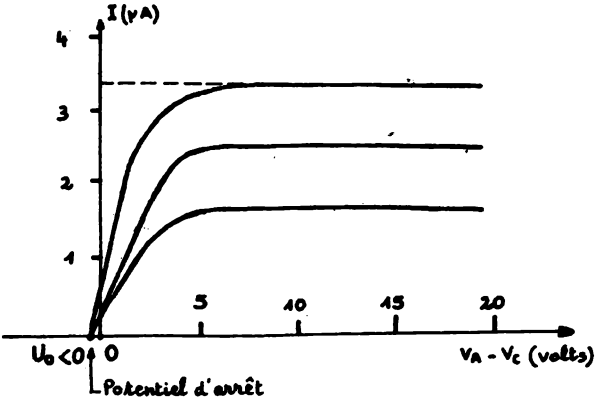
2°) Variation de l'intensité en fonction de $V_A - V_c$.

La photocathode est éclairée par un faisceau de lumière monochromatique d'énergie constante. Le passage des photoélectrons de la cathode à l'anode se traduit dans le circuit par un courant d'intensité I. On mesure ce courant avec un microampèremètre, pour des valeurs croissantes de la tension $V_A - V_c$.

A un éclairement donné correspond l'émission de N électrons par seconde. Pour les faibles valeurs de la tension, une fraction seulement atteint l'anode; les autres retournent à la photocathode.

a/ La saturation.

La fraction d'électrons qui traversent croît lorsque $V_A - V_c$ augmente. Lorsque tous les électrons émis chaque seconde atteignent l'anode, l'intensité ne peut plus croître: c'est la saturation. (l'interprétation est la même que pour la saturation de la diode).



Courbes $I = f(V_A - V_C)$ pour une radiation monochromatique donnée et pour des énergies lumineuses croissantes.

b/ L'intensité pour une tension nulle.

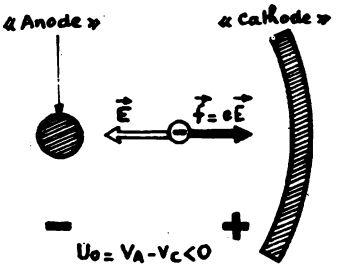
Elle n'est pas nulle, ce qui signifie que certains électrons sont émis avec une énergie cinétique suffisante pour traverser la cellule sans être accélérés par la tension $V_A - V_C$.

3°) La contretension ou potentiel d'arrêt.

Pour freiner ces électrons, on rend la tension $V_A - V_C$ négative. Lorsqu'elle atteint la valeur négative U_o , appelée contretension ou potentiel d'arrêt, plus aucun électron ne parvient à l'anode. Le potentiel d'arrêt U_o arrête donc au voisinage immédiat de l'anode les électrons qui avaient été émis avec l'énergie cinétique maximale.

4°) Calcul de l'énergie cinétique maximale.

La connaissance du potentiel d'arrêt permet de calculer l'énergie maximale des photoélectrons.



Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un électron émis avec la vitesse v et dont la vitesse s'annule au voisinage immédiat de l'anode :

Variation de Ec = travail de la force électrique.

$$0 - \frac{1}{2} mv^2 = e(V_c - V_A) = e(-U_o) = -eU_o.$$

On en déduit l'énergie cinétique maximale et le vitesse correspondante au moment où l'électron est émis:

$$\frac{1}{2} mv^2 = e U_o \qquad v = \sqrt{\frac{2e U_o}{m}}$$

Dans ces deux relations, e et U_o sont deux valeurs algébriques négatives. m est la masse de l'électron.

5°) L'énergie cinétique maximale est indépendante de l'énergie lumineuse.

La théorie ondulatoire laissait penser que plus l'énergie lumineuse monochromatique transportée est grande, plus est élevée l'énergie cinétique maximale des photoélectrons. Or il n'en est rien. Lorsqu'on augmente l'énergie lumineuse, le nombre de photoélectrons augmente, ce qui se traduit par une intensité de saturation plus élevée, mais leur énergie cinétique maximale reste constante. C'est en effet toujours le même potentiel d'arrêt U_o qui annule le courant dans le circuit de la cellule. (Voir courbes $I = f(V_A - V_c)$).

Les phénomènes suivants étaient donc inexplicables en théorie ondulatoire de la lumière, théorie selon laquelle l'énergie lumineuse est transportée progressivement et se répartit uniformément:

- le seuil photoélectrique ;
- la possibilité d'une émission instantanée d'électrons, même aux très faibles éclairements ;
- la constance de l'énergie cinétique maximale des électrons.

III- LES PHOTONS OU QUANTA LUMINEUX D'EINSTEIN. LA NATURE CORPUSCULAIRE DE LA LUMIERE.

En 1905, EINSTEIN résoud l'énigme de l'effet photoé-

lectrique en procédant à une extension d'une hypothèse formulée par PLANCK en 1900:

Il admet que dans un rayonnement de fréquence ν, l'énergie se propage sous forme de paquets d'énergie séparés, appelés photons ou quanta lumineux. L'énergie d'un photon est:

$$W = h\nu$$

h est la constante de Planck, de valeur numérique $6{,}62.10^{-34}$ joule. seconde (J.s) dans le système international. ν s'exprime en hertz et W en joules.

L'énergie de ces "grains de lumière" est donc proportionnelle à la fréquence de la radiation, ou inversement proportionnelle à sa longueur d'onde puisque

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

Ainsi, un photon du violet extrême ($\lambda_v = 0{,}40\,\mu m$) transporte deux fois plus d'énergie qu'un photon du rouge extrême ($\lambda_r = 0{,}80\,\mu m$).

1°) La théorie de l'effet photoélectrique.

Selon Einstein, l'émission d'un photoélectron est due à l'interaction de cet électron avec un unique photon qui lui communique toute son énergie et disparaît dans ce processus.

Les schémas de la page suivante illustrent l'effet photélectrique: l'électron est symbolisé par une petite sphère. Son énergie d'extraction par un mur à franchir. L'énergie du photon est représentée par une barre de hauteur proportionnelle à $h\nu$.

- Figure 1: Le photon a une énergie inférieure à l'énergie d'extraction W_o de l'électron: l'effet photoélectrique est impossible.

- Figure 2: $h\nu_0 = W_o$: l'énergie du photon est égale à l'énergie d'extraction. Le photon lui communique toute son énergie et perd ainsi toute existence. L'électron est émis sans énergie cinétique.

- Figure 3: $h\nu > W_o$: l'énergie du photon est supérieure à l'énergie d'extraction de l'électron. Elle sert à extraire l'électron et à lui communiquer une énergie

cinétique initiale. Le photon perd toute existence. La conservation de l'énergie s'écrit alors:

$$h\nu = W_o + \frac{1}{2} mv^2$$

Cette théorie explique les faits qui restaient énigmatiques en théorie ondulatoire:

a/ Le seuil photoélectrique.

La condition d'extraction est que l'énergie du photon soit supérieure à l'énergie d'extraction de l'électron:

$h\nu \geqslant W_o$ ou $h\nu \geqslant h\nu_o$

$$\nu \geqslant \nu_o$$
$$\text{ou} \quad \lambda \leqslant \lambda_o$$

Il y a donc une longueur d'onde λ_o au dessus de laquelle l'effet photoélectrique est impossible.

b/ L'instantanéité.

Puisqu'un électron est arraché par un unique photon possédant toute l'énergie requise, point n'est besoin d'attendre qu'il y ait accumulation d'énergie.

c/ La constance de l'énergie cinétique maximale.

Augmenter l'énergie monochromatique revient à multiplier les photons et par conséquent les extractions. Mais cela ne change pas l'énergie de chaque électron qui vaut:

$$\frac{1}{2} mv^2 = h\nu - W_o$$

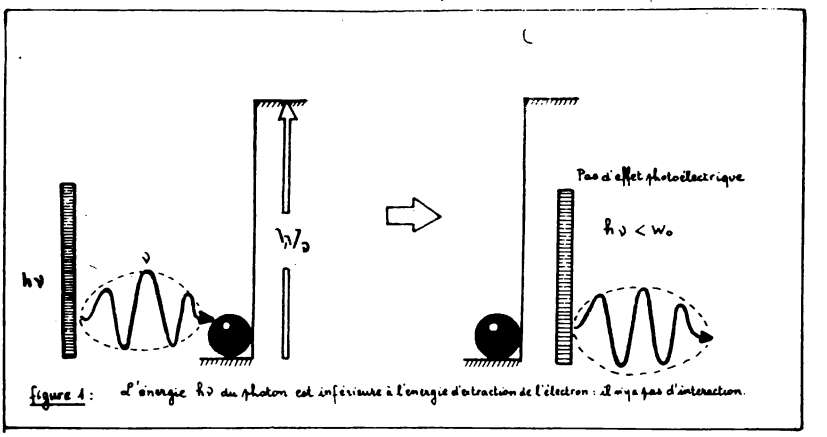


figure 1 : L'énergie hν du photon est inférieure à l'énergie d'extraction de l'électron : il n'y a pas d'interaction.

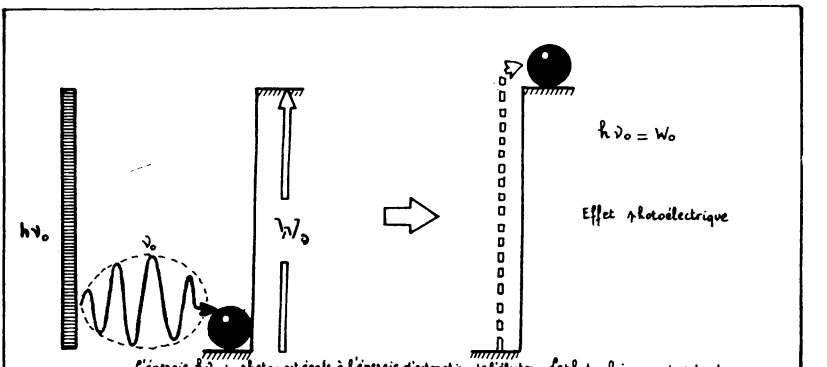


figure 2 : L'énergie hν₀ du photon est égale à l'énergie d'extraction de l'électron. Le photon lui communique toute son énergie et fond ainsi toute existence. Mais l'électron est émis sans énergie cinétique initiale.

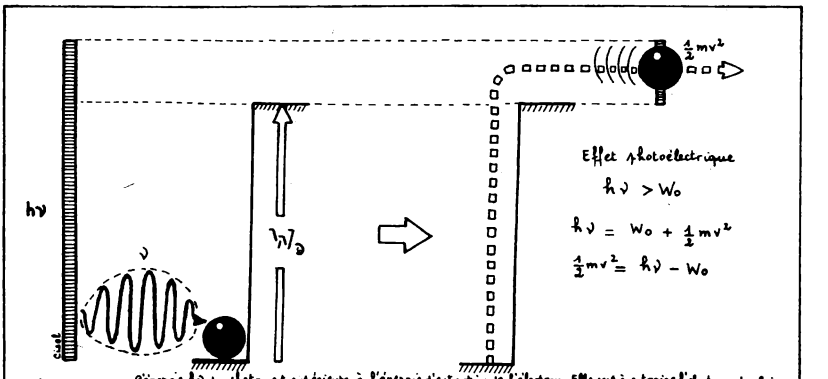


figure 3 : L'énergie hν du photon est supérieure à l'énergie d'extraction de l'électron. Elle sert à extraire l'électron et à lui communiquer une énergie cinétique initiale. Le photon perd toute existence. La conservation de l'énergie s'écrit :

$$h\nu = W_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

3 extraction de l'effet photoélectrique.

L'ESSENTIEL DU CHAPITRE 28

Selon Einstein, la lumière transporte l'énergie sous la forme discontinue de photons ou quanta lumineux. Ce sont des "grains d'énergie lumineuse" se propageant séparément à la vitesse de la lumière.

Un photon associé à une radiation de longueur d'onde λ et de fréquence ν , a pour énergie:

$$W = h\nu$$

- h: constante de Planck. $h = 6{,}62.10^{-34}$ joule. seconde
- ν: fréquence (Hz)
- W: en joules.

L'effet photoélectrique ou émission d'un photoélectron par la matière est due à l'interaction de cet électron avec un unique photon qui lui communique toute son énergie et disparaît dans ce processus.

Cette théorie explique les phénomènes suivants:

1°) L'existence d'un seuil photoélectrique.

Soit W_o l'énergie d'extraction d'un électron pour un métal donné. L'effet photoélectrique n'est possible que si :

$$h\nu \geqslant W_o$$

ou

$$h\nu \geqslant h\nu_o$$

$$\nu \geqslant \nu_o \Longleftrightarrow \lambda \leqslant \lambda_o$$

Seuil photoélectrique

2°) L'instantanéité de l'effet.

Lorsqu'un photon peut interagir avec un électron, l'échange d'énergie est instantané.

3°) La constance de l'énergie cinétique maximale des électrons émis.

Si l'énergie d'un photon est supérieure à l'énergie d'extraction, une partie de cette énergie sert à extraire l'électron et le reste lui communique une énergie cinétique initiale. Il en résulte:

$$h\nu = W_o + \frac{1}{2} mv^2$$

Augmenter l'énergie lumineuse d'un faisceau, c'est augmenter le nombre de photons (en lumière monochromatique). Le nombre d'extractions augmente aussi, mais aucun électron ne peut avoir une énergie cinétique supérieure à :

$$\frac{1}{2} mv^2 = h\nu - W_o$$

EXERCICES CHAPITRE 27

1/ Le potentiel d'arrêt appliqué à une cellule photoélectrique au caesium éclairée en lumière monochromatique est $U_o = -0{,}40$ volt. Calculer en joules puis en électron-volts l'énergie cinétique maximale des électrons. Calculer la vitesse correspondante. On trouvera les caractéristiques de l'électron dans le cours.

2/ Le seuil d'une cellule au caesium est $\lambda_0 = 0{,}66\ \mu m$. Le potentiel d'arrêt est $U_o = -0{,}38$ volt lorsqu'elle est éclairée par la radiation de longueur d'onde $\lambda = 0{,}55 \mu m$. Calculer la constante de Planck.

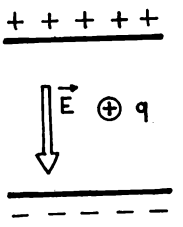
3/ L'énergie cinétique maximale de sortie des photoélectrons est $\frac{1}{2} mv^2 = h\nu - h\nu_0$, définie pour $\nu \geqslant \nu_0$. Tracer sur un même diagramme les courbes représentatives des fonctions $\frac{1}{2} mv^2 = f(\nu)$ pour deux métaux dont les fréquences seuils sont ν_{0_1} et ν_{0_2}

4/ Version originale du problème proposé à la session de contrôle du baccalauréat tunisien. Juin 1976.

Deux expériences de Millikan pour déterminer des constantes physiques.

Remarque : on peut traiter indépendamment les parties A et B

A/ En 1913, Millikan détermine la charge électrique élémentaire au cours d'une série d'expériences dont voici le principe:



Une très petite gouttelette d'huile, de poids $p = 3{,}78.10^{-14}$ newton porte la charge élémentaire positive q (celle du proton). Elle est placée dans le champ électrique uniforme $\vec{E}$ d'un condensateur plan à air. Lorsqu'elle se déplace, elle est soumise à une force résistante due à l'air, de sens opposé à celui de son déplacement et de module R = kv proportionnel à sa vitesse. On donne $k = 3{,}40.10^{-10}$ S.I.

1°) Représenter sur deux figures séparées l'ensemble des forces extérieures agissant sur la gouttelette.

a/ A l'instant initial où sa vitesse est encore nulle;

b/ A un instant ultérieur où elle s'est mise en mouvement sous l'action des forces précédentes.

Montrer que sa vitesse atteint une valeur limite v_ℓ, correspondant à un mouvement rectiligne uniforme.

2°) Lorsque l'intensité du champ électrique est $E = 4{,}00.10^4$ V/m, la vitesse limite est $v_\ell = 1{,}30.10^{-4}$ m/s. En déduire la valeur de la charge électrique élémentaire.

B/ En 1916, Millikan détermine la constante de planck, h, de la manière suivante: de la lumière monochromatique de fréquence ν tombant sur la photocathode (C) d'une cellule photoélectrique lui arrache des électrons qui sont captés par l'anode (A).

1°)
a/ L'énergie d'extraction d'un électron est W_o. Etablir l'expression donnant l'énergie cinétique maximale Ec des électrons à leur sortie de la photocathode, en fonction de h, ν et W_o.

b/ Un potentiel d'arrêt $V_o = (V_A - V_C) < 0$ freine les électrons; ils arrivent sur l'anode avec une vitesse nulle. Enoncer le théorème de l'énergie cinétique; l'appliquer à un électron de charge $e < 0$ se déplaçant de la cathode à l'anode, sachant que le travail de la force électrique est $e(V_C - V_A)$. En déduire une seconde expression de l'énergie cinétique Ec.

c/ Montrer que la fonction $V_o = f(\nu)$ est une fonction affine $V_o = a\nu + b$ dont en déterminera les coefficients a et b.

2°) Les valeurs du potentiel d'arrêt pour diverses radiations sont données dans le tableau suivant:

ν (10^{13} Hz)	V_o (volts)
54,8	- 0,45
69,0	- 1,03
74,0	- 1,24
82,0	- 1,56
96,0	- 2,14
118,0	- 3,04

a/ Tracer sur papier millimétré la courbe $V_o = f(\nu)$. Graduer l'axe des fréquences à partir de $40,0.10^{13}$ Hz. Echelles: 5 cm pour 20.10^{13} Hz et 5 cm pour 1,00 volt.

Prolonger la courbe jusqu'à $V_o = 0$ volt. Quelle est la valeur correspondante ν_o de la fréquence?

b/ Que vaut l'énergie cinétique Ec des électrons à la sortie de la photocathode lorsque $\nu = \nu_0$? Que se passerait-il pour $\nu < \nu_0$?

c/ Déduire de la courbe la valeur du coefficient $\frac{h}{e}$ et celle de la constante de Planck trouvée par Millikan. La charge de l'électron est $e = -1,6.10^{-19}$ coulomb.

3°)
a/ Donner en joules et en électrons-volts l'énergie d'extraction W_o du métal de la photocathode.

b/ La masse de l'électron est $m = 9,10.10^{-31}$ kg. Quelle est la vitesse des électrons à leur sortie de la photocathode lorsqu'elle est éclairée par une lumière de fréquence $\nu = 118,0.10^{13}$ herts ?

(Baccalauréat tunisien, juin 1976)

5/ A/ 1°)
a/ Ecrire l'expression de l'énergie communiquée à une charge électrique e (coulombs) par une différence de potentiel U (volts).

b/ Evaluer en joules l'équivalent d'un électron-volt.

2°) Pour le lithium (symbole chimique Li), la longueur d'onde de la radiation au dessus de laquelle il n'y a plus émission photoélectrique se situe à 5 200 Å.

Une plaque de lithium placée dans le vide est éclairée par une radiation monochromatique de longueur d'onde 0,405µm.Calculer

a/ Le travail d'extraction d'un électron en joules et en électrons-volts.

b/ L'énergie cinétique d'un électron en joules et en électrons-volts;

c/ La vitesse avec laquelle les électrons sont éjectés de la plaque.

3°) La plaque de lithium, éclairée par une radiation monochromatique de longueur d'onde 0,405µm, est incorporée dans une cellule photoélectrique. Pour quelle différence de potentiel cette émission s'arrêtera-t-elle ?

4°) La plaque de lithium étant placée comme cathode dans la cellule photoélectrique, on établit entre anode et cathode une différence de potentiel de 50 volts. L'énergie électrique communiquée à un électron se transforme intégralement en énergie cinétique.

Calculer la vitesse des électrons arrivant sur l'anode.

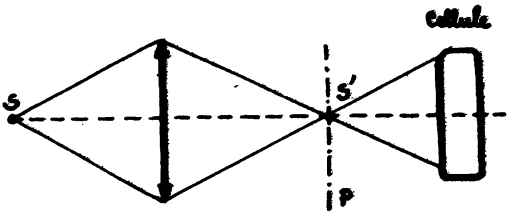
B/

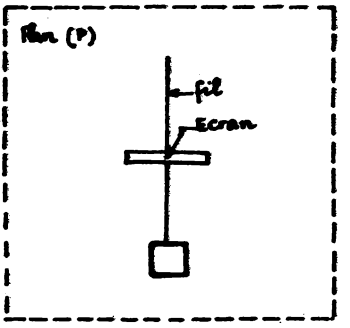
1°) La cellule photo-électrique est placée dans un circuit comprenant, en série, une source de tension constante, une grande résistance et un galvanomètre très sensible. L'intensité du courant lue sur le galvanomètre est 1,6 A. Calculer le nombre des électrons émis par la cellule pendant une seconde.

2°) On réalise le montage indiqué sur les deux figures. Dans le plan (P) parallèle à la cellule, on place un fil de masse négligeable suspendu à un ressort à boudin dont les allongements sont proportionnels aux forces de traction.

Le fil ne passe pas par S'. Il en résulte que la cellule est alors éclairée.

On suspend au fil une masse de 50 g. Dans le plan (P), on place sur le fil un petit écran opaque de telle façon que, lorsque le fil est au repos, la cellule ne soit plus éclairée.





Le fil étant au repos, on tire verticalement vers le bas de façon à obtenir un allongement suffisant pour que l'écran n'intercepte plus le faisceau lumineux, puis on abandonne la masse à elle même.

La cellule est reliée à un dispositif d'amplification qui agit sur un inscripteur traçant une courbe dont les ordonnées sont proportionnelles au courant débité par la cellule.

On constate que la période de la courbe enregistrée est (0,25 ± 0,01) s. En déduire la raideur du ressort et l'incertitude absolue sur la valeur de celle-ci. (On rappelle que la raideur d'un ressort est définie comme le rapport de la force de traction à l'allongement qu'elle provoque).

Charge de l'électron: $e = -1{,}6.10^{-19}$C; sa masse: $m = 9.10^{-31}$kg constante de Planck: $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s; vitesse de la lumière: $c = 3.10^{8}$ m/s.

(Baccalauréat).

6/ A/ On a relevé sur la figure ci-dessous la courbe caractéristique d'une cellule photo-électrique au césium, en l'éclairant avec des radiations monochromatiques de longueur d'onde $\lambda = 4\,046$ Å

$(1\ \mathring{A} = 10^{-10}m)$

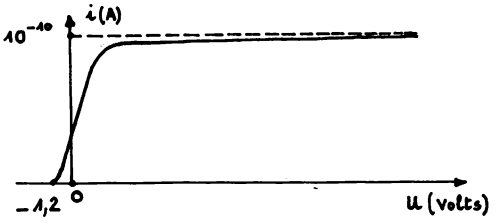
L'intensité du courant de saturation est:

$$i = 10^{-10}A$$

La tension minimale d'extraction est

$$U_o = -1,2 \text{ volt.}$$

Décrire un montage expérimental permettant d'obtenir le tracé de cette caractéristique i = f (U).



La puissance rayonnante transportée par les radiations et effectivement absorbée par la cathode de la cellule est $P = 2,5.10^{-7}$ W.

Calculer

1°) L'énergie cinétique maximale des électrons sortant du métal de la cathode (en joule) ;

2°) La fréquence, ν_0, et la longueur d'onde, λ_0, correspondant au seuil d'effet photo-électrique;

3°) L'énergie d'extraction, W_o, exprimée en électron-volt;

4°) Le rendement de la cellule photoélectrique pour la longueur d'onde $\lambda = 4\ 046\ \mathring{A}$. (On appelle rendement le rapport, R, du nombre d'électrons émis au nombre de photons reçus).

On donne:

- vitesse de la lumière: $c = 3.10^8$ m/s ;
- constante de Planck: $h = 6,62.10^{-34}$ J.s;
- charge élémentaire: $e = 1,60.10^{-19}$C.

B/ Pour amplifier le courant photo-électrique $i = 10^{-10}$ A,

on utilise un système multiplicateur d'électrons à émission secondaire. Dans ce système, un électron extrait de la cellule est accéléré et dirigé sur une première cible. Son impact sur la cible est suivi de l'émission par la cible de plusieurs électrons, dits secondaires. Le courant photo-électrique est ainsi multiplié par un facteur K qui dépend de la tension U_1 appliquée entre la cathode et la cible. Les électrons secondaires sont dirigés vers une nouvelle cible ou étage qui amplifie le courant de la même manière. La tension appliquée entre deux cibles est également U_1 . Le courant photo-électrique peut donc être amplifié par plusieurs étages, selon le même processus.

On a mesuré, pour une tension $U_1 = 85$ volts appliquée entre chaque étage du multiplicateur, le facteur de multiplication moyen $K = 4,75$.

1°) Pour la tension $U_1 = 85$ volts,

a/ Déterminer le nombre d'étages nécessaires pour obtenir, après amplification, un courant d'intensité légèrement supérieure à $I = 10^{-4}$ A;

b/ Calculer la tension, U_n, aux bornes de l'ensemble multiplicateur.

2°) Quelle est la variation ΔU_1 maximale aux bornes de chaque étage, si l'on ne veut pas que I varie de plus de $\Delta I = 10^{-7}$ A? On sait que K est une fonction linéaire de U_1 de la forme: $K = 0,11U_1 - 4,6$ (U_1 en volts). (La puissance rayonnante transportée par les radiations est constante).

(Baccalauréat).

Chapitre 29

LES RAYONS X

I - UN PEU D'HISTOIRE.

Les savants de la fin du 19 ième siècle étaient vivement intrigués par les rayons cathodiques qui transportaient avec eux assez d'énergie pour faire tourner un moulinet ; il rendaient fluorescentes certaines substances, ils étaient arrêtés par la matière et ils étaient déviés par les champs électriques et magnétiques.

En 1895, Röntgen étudiait aussi, en Allemagne, les rayons cathodiques dont on ne connaissait pas encore la nature, lorsqu'il mit en évidence un rayonnement à l'extérieur d'un tube de Crookes recouvert d'un papier noir. Ce rayonnement provoquait la luminescence d'écrans recouverts de certaines substances et il impressionnait les plaques photographiques. Il ne pouvait s'agir de rayons cathodiques car ils auraient été arrêtés par le verre de l'ampoule. Röntgen appela "X" ces rayons, faute d'en connaître la nature.

L'une de leurs propriétés était de pénétrer à travers des épaisseurs relativement importantes de matière, sans toutefois traverser les substances formées d'éléments lourds, ce qui permit à Röntgen de réaliser les premières photographies des os à l'intérieur d'un être vivant.

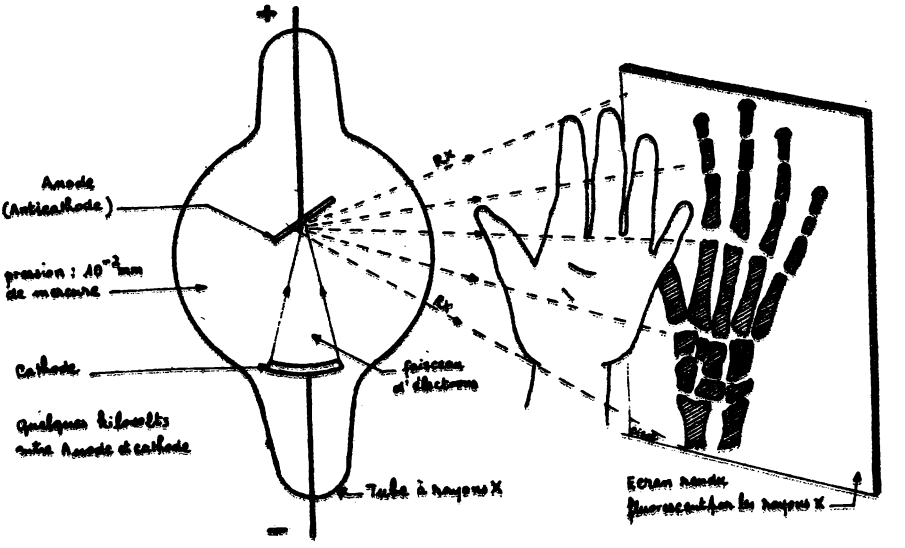
Il fallut attendre les travaux de Von Laue, en 1912, pour vérifier que les rayons X sont des radiations de nature identique à celle de la lumière, mais de longueurs d'onde beaucoup plus petites.

II- LA PRODUCTION DES RAYONS X.

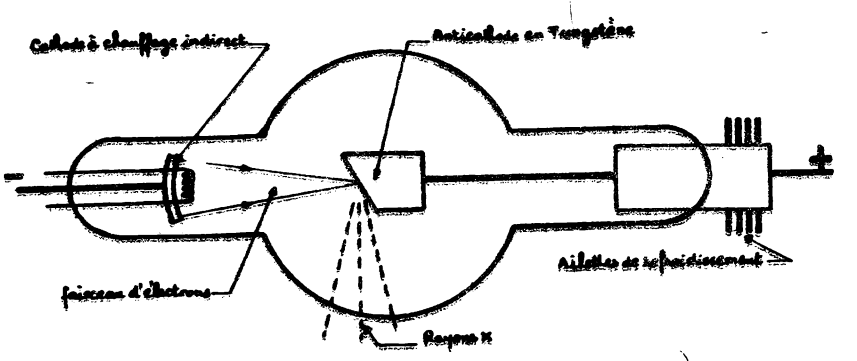
1°) Par le tube de Crookes

C'est un dispositif historique utilisé actuellement uniquement dans les lycées.

Ce tube à rayons X, de modèle ancien, est un tube de Crookes particulier. Les électrons issus de la cathode (voir chapitre: faisceaux d'électrons), viennent heurter violemment l'anode que l'on appelle anticathode. C'est à ce moment que les rayons sont produits. Il traversent aisement la chair, formée d'éléments légers (C, H, O, N), mais pratiquement pas les os, contenant des éléments plus lourds (essentiellement du calcium Ca). Les os apparaissent donc sous forme d'ombre sur un écran au platinocyanure de baryum qui s'illumine partout ailleurs.



2°) Par le tube de Coolidge (1873 - 1975).



Comme le tube de Crookes, c'est une ampoule à vide poussé (pression de l'ordre de un centième de millimètre de mercure), comportant:

- Un canon à électrons accélérant un faisceau d'électrons sous quelques kilovolts;

- Une plaque métallique, l'anticathode de tungstène, exposée au choc des électrons, dont les atomes émettent des rayons X.

III- LA NATURE DES RAYONS.

Dès la fin du siècle passé on savait qu'ils ne sont déviés ni par les champs électriques ni par les champs magnétiques et qu'ils ne transportent pas d'électricité.

Par la suite, en 1912, Von Laue a réalisé des expériences de diffraction en envoyant des rayons X sur un cristal: la diffraction se produit au passage des R.X. entre les rangées d'ions du cristal. Cette propriété de diffraction est caractéristique des ondes.

Certains rayons ultra-violets de très faible longueur d'onde ont des propriétés indiscernables de celles des rayons X.

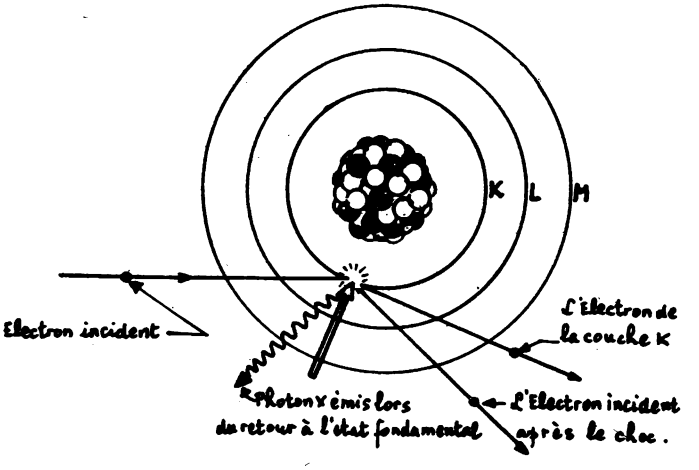
Ces constatations devaient permettre de conclure que les rayons X sont de même nature que la lumière:

> Les rayons X sont constitués par des photons de grande énergie, associés à des ondes électromagnétiques de très petites longueurs d'onde. Approximativement:
>
> $0{,}1\ \text{Å} < \lambda < 5\ \text{Å}$

IV- INTERPRETATION DE L'EMISSION DES RAYONS X.

Les rayons X sont émis de deux façons.

1°) Par collision



Un électron du faisceau incident excite très fortement ou ionise l'atome de la cible en heurtant un électron des couches profondes. (couches K et L).

Le retour à l'état fondamental de l'atome s'accompagne de l'émission d'un photon X.

C'est de la même façon que les atomes émettent la lumière visible, au cours de transitions d'un niveau d'énergie à un niveau d'énergie inférieure. Mais seules les couches externes sont concernées.

Ce type d'émission donne lieu, comme pour la lumière visible, à des spectres caractéristiques de l'élement émetteur (spectres X discontinus).

2°) Par freinage

Les électrons du faisceau incident sont freinés en passant dans le champ intense des noyaux de la cible. Il transfèrent une partie de leur énergie et de leur quantité de mouvement aux noyaux. Le phénomène s'accompagne de l'émission de photons X.

Ce type d'émission donne un spectre continu. On montre expérimentalement que pour une tension U entre la cathode et l'anode de l'appareil producteur, le spectre continu est limité par une longueur d'onde minimale λ_m, qui dépend uniquement du potentiel U, mais pas de la substance dont est faite la cible.

Les deux types d'émission se produisent simultanément et on observe un ensemble de "pics" caractéristiques du métal de l'anticathode, se superposant à un "fond continu" limité par une longueur d'onde minimale qui ne dépend que de la tension accélératrice des électrons incidents.

3°) Valeur de la longueur d'onde minimale du fond continu

Les électrons accélérés par la tension U, heurtent l'anticathode avec une énergie cinétique:

$$Ec = \frac{1}{2} mv^2 = |e| U$$ (chapitre 26, § I,1°, a)

Généralement, une partie de cette énergie contribue à échauffer le métal de l'anticathode et le reste produit des photons X. La conservation de l'énergie s'écrit:

$$|e| U = h\nu + \text{Energie thermique.}$$

A la limite, toute l'énergie cinétique de l'électron incident sert à produire un photon X. Sa fréquence est alors maximale et sa longueur d'onde minimale. L'équation de conservation de l'énergie est:

$$|e|\,U = h\nu_{Max}$$

$$|e|\,U = h\frac{c}{\lambda_m}$$

d'où

$$\boxed{\lambda_m = \frac{h.c}{|e|U}}$$

Exemple numérique. Si la tension accélératrice est U = 35 000 V, la longueur d'onde minimale du fond continu est

$$\lambda_m = \frac{6{,}62.10^{-34} \times 3.10^{8}}{1{,}6.10^{-19} \times 3{,}5.10^{4}} = 3{,}5.10^{-11}\,m \qquad \lambda_m = 0{,}35\ \text{Å}$$

V - LES PROPRIETES DE RAYONS X

1°) Fluorescence.

Ils provoquent la fluorescenee de nombreuses substances. Le sulfure de zinc, par exemple, s'illumine en vert. (Ecrans de radioscopies médicale et industrielle).

2°) Propriétés photochimiques.

Ils impressionnent les pellicules photographiques, ce qui permet la radiographie.

3°) L'effet photoélectrique.

En tant que photons de haute énergie, les rayons X produisent un effet photoélectrique intense avec tous les métaux. Dans l'air, ils provoquent l'ionisation des molécules.

4°) Absorption.

L'absorption des rayons X est une conséquence de l'effet photoélectrique. Lorsque les photons X traversent un

matériau, tous ceux qui provoquent l'effet photoélectrique disparaissent et l'intensité du faisceau de rayons X décroît en fonction de l'épaisseur de matière traversée. Il y a absorption.

Pour un matériau donné, cette décroissance atteint la moitié de l'intensité initiale après parcours d'une épaisseur caractéristique de ce matériau.

L'absorption est d'autant plus grande que le numéro atomique de l'élément absorbant est plus élevé. C'est pourquoi les os, contenant du calcium (Z = 20) sont plus absorbants que les chairs formées de carbone (Z = 6), d'hydrogène (Z = 1), d'oxygène (Z = 8), d'azote (Z = 7). On réalise des blindages de protection contre les rayons X en plomb, particulièrement absorbant (Z = 82).

L'absorption croît avec la longueur d'onde des rayons X. Ceux de longueurs d'onde très courtes sont très pénétrants (Rayons X durs). Les rayons de grande longueur d'onde sont peu pénétrants (R.X mous).

5°) Propriétés physiologiques.

L'irradiation prolongée par les R.X. provoque de graves brûlures, des destructions de cellules, arrêt de la production des globules du sang, stérilité, cancers, leucémie. Leurs effets sont cumulatifs, c'est-à-dire qu'ils s'additionnent au cours de la vie d'un individu.

Chapitre 25

EXERCICE

Un électron est accéléré dans un tube de Coolidge par une tension de 50 000 volts appliquée entre l'anticathode et la cathode.

1°) Calculer la vitesse atteinte par l'électron au niveau de la cible. (On suppose négligeables les effets relativistes).

2°) Quelle est alors son énergie cinétique ?

3°) On étudie le rayonnement X émis par l'anticathode en palladium.

a/ Quelle est la longueur d'onde minimale du fond continu ?

b/ Le spectre discontinu présente deux "pics" aigus, l'un correspond à la longueur d'onde 0,52 Å et l'autre à la longueur d'onde 0,60 Å. Quelles sont, en joules et en électrons-volts les énergies des photons X émis ?

4°) En mécanique relativiste, la masse d'une particule croît avec vitesse suivant la loi

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- m_o est la masse de la particule au repos;
- v est sa vitesse;
- c, la vitesse de la lumière.

a/ Calculer la masse d'un électron ayant atteint la vitesse déterminée à la première question, ainsi que la variation relative de cette masse.

b/ Même question pour un électron ayant une vitesse dix fois plus faible.

Ces exemples numériques montrent que les effets relativistes ne sont négligeables que si le rapport $\frac{v^2}{c^2}$ est petit devant l'unité.

Chapitre 30

L'ENERGIE NUCLEAIRE.

I - ENERGIE DE COHESION DU NOYAU ATOMIQUE.

1°) L'unité de masse atomique.

Les masses des particules constituant l'atome sont extrêmement faibles devant l'unité internationale de masse, le kilogramme:

- Environ $9,1.10^{-31}$ kg pour l'électron;
- Environ $1,68.10^{-27}$ kg pour le proton et le neutron.

C'est pourquoi l'on utilise en physique nucléaire une unité plus appropriée, l'unité de masse atomique (u.m.a.) ainsi définie:

$$1 \text{ u.m.a.} = \frac{1 \text{ gramme}}{\text{Nombre d'Avogadro}} = \frac{10^{-3} \text{kg}}{6,02.10^{+23}} = 1,66.10^{-27} \text{kg}.$$

Les masses du proton et du neutron, exprimées dans cette unité valent respectivement:

m_p	=	1,0073 u.m.a.
m_n	=	1,0087 u.m.a.

Ces masses sont en fait connues avec une très grande précision. Pour déterminer la masse d'une particule électrisée (proton, ion positif, noyau d'atome) on provoque sa déviation dans un champ magnétique ou dans un champ électrique. Le neutron, non chargé d'électricité, n'est pas dévié par les champs électriques et magnétiques. On étudie la trajectoire d'une particule électrisée heurtée par un neutron et on en déduit la masse du neutron. Les valeurs les plus précises et leurs incertitudes sont:

m_p = (1, 00 727 661 ± 0, 00 000 008) u.m.a.

m_n = (1, 0 086 652 ± 0, 0 000 004) u.m.a.

On remarquera que la précision sur la masse du neutron, obtenue indirectement, est moins grande que pour la masse du proton.

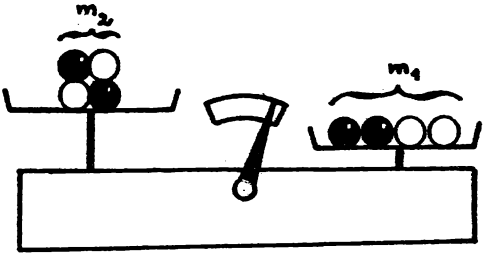
2°) Le défaut de masse d'un noyau.

Les expériences de déviations dans les champs électriques et magnétiques évoquées plus haut, ont montré que la masse d'un noyau est toujours inférieure à la somme des masses des nucléons qui le composent, pris séparément.

Par exemple, la somme des masses de deux protons et de deux neutrons séparés est

$$m_1 = 2\,m_p + 2\,m_n = 4{,}032 \text{ u.m.a.}$$

La masse du noyau d'hélium, formé de 4 nucléons est $m_2 = 4{,}003$ u.m.a.



Comparaison (imaginaire) des masses du noyau d'hélium et de ses nucléons séparés.

La différence entre la somme des masses des nucléons séparés et la masse des mêmes nucléons réunis dans un noyau est le défaut de masse de ce noyau.

Dans le cas du noyau d'hélium, le défaut de masse vaut:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = 4{,}032 - 4{,}003 = 0{,}029 \text{ u.m.a}$$

3°) Masse et énergie. Relation d'Einstein.

a/ Forces nucléaires.

On appelle fermi, la distance d = 10^{-15} mm

On peut s'étonner que des protons puissent coexister dans un noyau d'atome, alors que les forces de répulsion électrostatiques agissant entre eux devraient les éloigner les uns des autres.

En fait, la cohésion du noyau est due à des forces d'un type particulier: les forces nucléaires, dont les caractéristiques sont les suivantes:

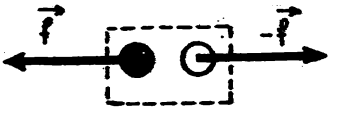
- Elles s'exercent entre deux protons, ou entre deux neutrons ou entre un proton et un neutron;

- Elles sont à courte portée: elles deviennent parfaitement négligeables devant les forces électrostatiques si la distance entre deux nucléons dépasse une dizaine de fermis (ordre de grandeur des diamètres de noyaux d'atomes);

- Pour des distances de l'ordre de quelques fermis, elles sont très grandes devant les forces électrostatiques que l'on peut alors négliger.

b/ Energie pour séparer des nucléons.

Imaginons que l'on cherche à séparer deux nucléons d'un noyau. Pour cela, il faut exercer des forces opposées aux forces de cohésion nucléaires.



Au cours de la séparation des nucléons, les forces $\vec{f}$ et $-\vec{f}$, extérieures au système formé par les deux nucléons, travaillent et le système reçoit de l'énergie.

Conclusion:

Il faut fournir de l'énergie à un système de nucléons pour le faire passer de l'état de noyau à l'état de nucléons séparés.

Inversement si un système de nucléons séparés forme un noyau, il fournit de l'énergie au milieu extérieur.

c/ La relation d'Einstein.

D'après la théorie de la Relativité d'Einstein, la masse est une forme de l'énergie.

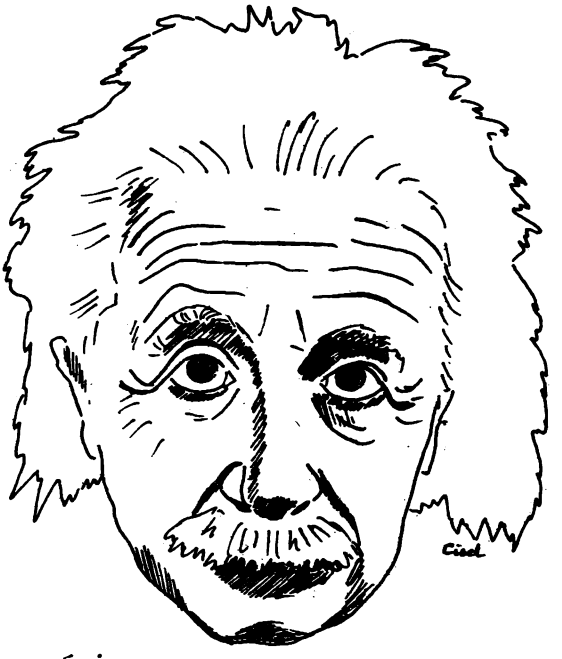
La masse peut se transformer en énergie et réciproquement, de l'énergie peut se matérialiser.

Si une masse Δm disparaît, il apparaît une quantité d'énergie dont la valeur est donnée par la relation

d'Einstein:

$$E = \Delta m \, c^2$$

- c est la vitesse de la lumière ($c = 3.10^8$ m/s)
- Δm s'exprime en kg et E en joules.



Exemple numérique:

Si une masse de un gramme disparaissait, il apparaitrait une quantité d'énergie:

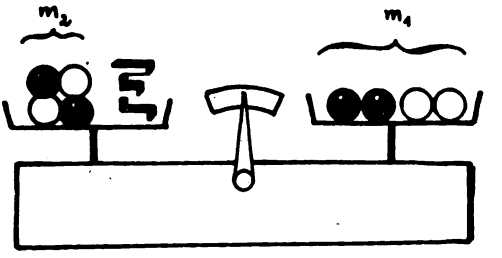
$$E = 1.10^{-3} \times 9.10^{16} = 9.10^{13} \text{ joules.}$$

d/ Interprétation du défaut de masse.

Pour éloigner les nucléons d'un noyau, il faut leur fournir de l'énergie. Cet accroissement d'énergie se traduit par une augmentation de masse, conformément à la théorie d'Einstein. C'est pourquoi les nucléons pris séparément ont une masse totale supérieure à celle du noyau.

Sur l'un des plateaux d'une balance imaginaire, plaçons un noyau d'hélium et sur l'autre deux protons et de deux neutrons séparés. L'équilibre est rompu en faveur

des nucléons séparés.



Si sur l'autre plateau on ajoute, à côté du noyau d'hélium, une quantité d'énergie égale à celle qu'il a fallu fournir pour séparer les nucléons, l'équilibre est rétabli. On peut écrire l'égalité:

Masse des nucléons (en joules) = Masse du noyau (en joules) + Energie pour les séparer.

$$m_1 = m_2 + \Delta m.c^2$$

4°) Energie de cohésion d'un noyau.

Δm étant le défaut de masse d'un noyau, son énergie de cohésion est Δmc^2. D'après ce qui précède, on peut la définir de deux façons:

L'énergie de cohésion d'un noyau est l'énergie qu'il faut fournir pour briser complètement ce noyau en nucléons séparés.

Ou bien:

C'est l'énergie libérée par un ensemble de nucléons initialement séparés lorsqu'ils se regroupent pour former un noyau.

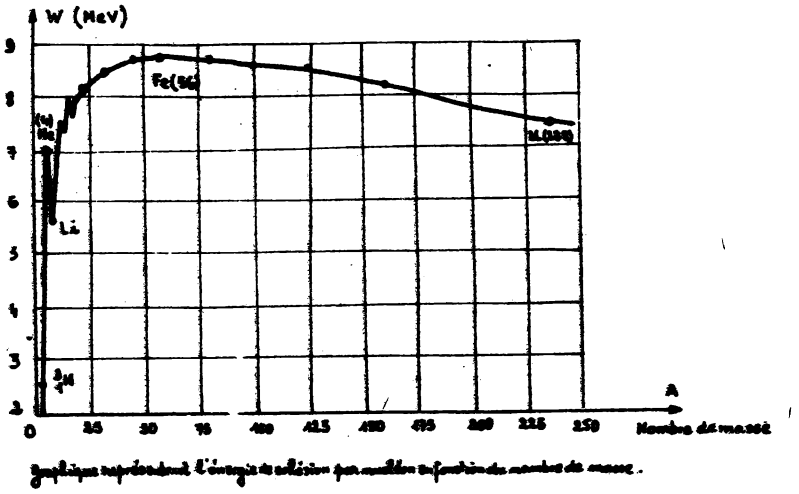
5°) Energie de cohésion par nucléon.

C'est le rapport de l'énergie de cohésion du noyau à son nombre de nucléons, A. (nombre de masse).

$$W = \frac{\Delta m.c^2}{A}$$

$\Delta m.c^2$ ← Energie de cohésion du noyau
A ← Nombre de nucléons

L'énergie de cohésion par nucléon varie d'un atome à l'autre, suivant la courbe :



L'énergie de cohésion croît très rapidement pour les noyaux légers; elle atteint la valeur de 8,7 MeV pour les noyaux de nombres de masse moyens (maximum pour le fer 56) puis diminue lentement jusqu'à 7,5 MeV pour l'uranium 238;

II- L'ENERGIE NUCLEAIRE.

Une conséquence importante de la variation de l'énergie de cohésion par nucléon d'un noyau à l'autre est la possibilité de recueillir de l'énergie nucléaire et cela par deux procédés.

1°) La fission nucléaire.

a/ Définition

C'est une réaction nucléaire (c'est-à-dire affectant le noyau) au cours de laquelle il y a coupure d'un noyau lourd en deux fragments de masses comparables.

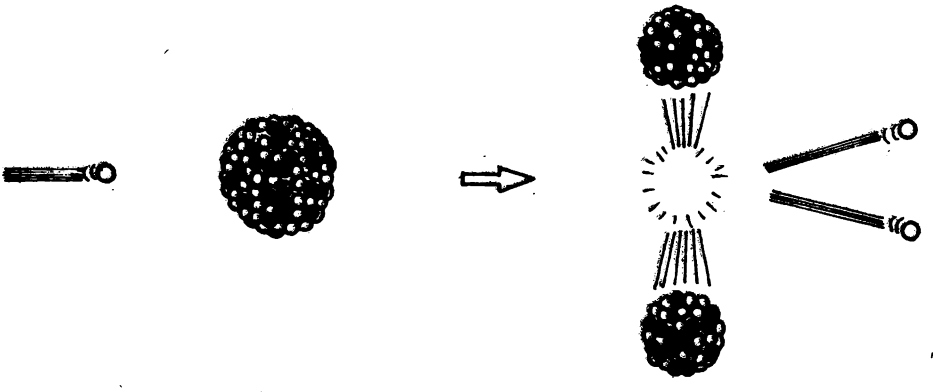
La fission se produit spontanément en très petite quantité (environ 40 fissions spontanées par gramme d'uranium naturel et par heure, alors qu'un gramme d'uranium contient environ $2,5.10^{21}$ atomes).

Mais les fissions les plus importantes sont produites par le choc de neutrons sur certains noyaux lourds, par exemple:

$^{235}_{92}U$ (uranium) , $^{239}_{94}Pu$ (plutonium).

b/ Exemple de fission.

Un neutron heurte un noyau d'uranium 235. Le noyau l'absorbe, ce qui le porte dans un état excité à partir duquel il se scinde en deux noyaux plus petits, par exemple en strontium et en xénon (la coupure peut se faire de plusieurs façons). Comme les éléments lourds (U par exemple) ont, en comparaison avec les éléments du milieu du tableau (Xe, Sr par exemple) un excès de neutrons par rapport aux protons, la fission des noyaux lourds conduit à l'émission de plusieurs neutrons. Dans le cas envisagé ici, deux neutrons sont libérés.



$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{94}_{38}Sr + {}^{140}_{54}Xe + 2\,{}^{1}_{0}n$ + Energie

neutron + Uranium → Strontium + Xénon + 2neutrons + W

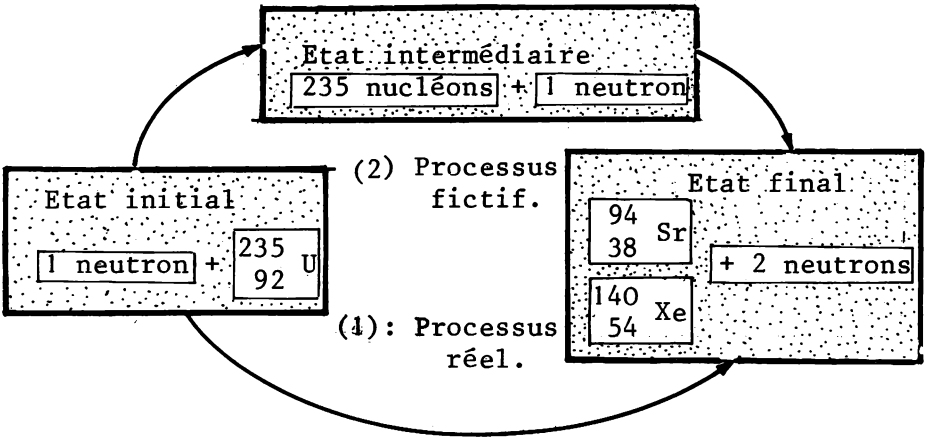
La fission dégage une quantité d'énergie de l'ordre de 200 MeV par noyau.

On remarquera la conservation de la charge électrique totale: 92 = 38 + 54, et la conservation du nombre de nucléons: 1 + 235 = 94 + 140 + 2.

c/ Calcul de l'énergie libérée.

Imaginons deux processus permettant de passer de l'état initial:

1 neutron, $^{235}_{92}U$, à l'état final: $^{94}_{38}Sr + ^{140}_{54}Xe$ + 2 neutrons.



Le premier processus est réel.

Le second, fictif, consiste à briser complètement le noyau d'uranium en 235 nucléons et à les regrouper en deux noyaux, l'un de 94 nucléons, l'autre de 140 nucléons. Nous admettrons que le bilan énergétique est le même suivant les deux chemins.

L'énergie de cohésion par nucléon de l'uranium est environ 7,5 MeV. Pour séparer ses 235 nucléons, il faut lui fournir une énergie:

$$W_1 = 235 \times 7,5 = 1760 \text{ MeV}$$

L'énergie de cohésion par nucléon du strontium est environ 8,6 MeV et celle du xénon 8,3 MeV. La formation de ces deux noyaux libère:

$$W_2 = (94 \times 8,6) + (140 \times 8,3) = 1970 \text{ MeV}$$

Le milieu extérieur reçoit donc une énergie égale à

$$W = W_2 - W_1 = 1970 \text{ MeV} - 1760 \text{ MeV} = 210 \text{ MeV}$$

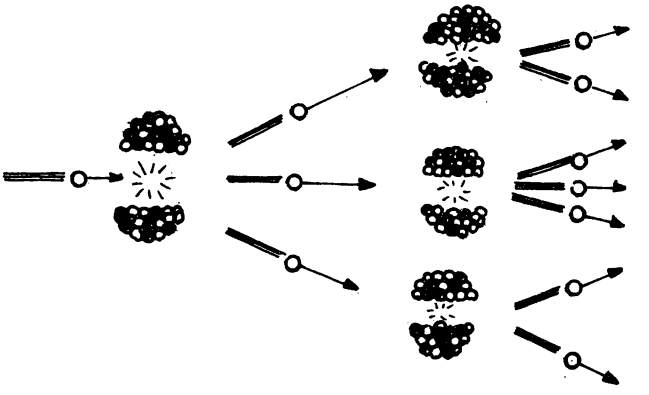
Le système a perdu de l'énergie. Cela correspond à une diminution de sa masse d'environ un millième.

La fission d'un noyau lourd en deux noyaux plus légers de masses comparables libère une énergie de l'ordre de 200 MeV, soit environ 1 MeV par nucléon, ce qui correspond à une perte de masse de un millième environ.

c/ La réaction en chaine. La masse critique.

La fission d'un noyau d'uranium 235 produit deux ou trois neutrons. Soit en moyenne, 2,5 neutrons.

Les neutrons ainsi libérés peuvent provoquer à leur tour la fission d'autres noyaux et la libération d'autres neutrons, et ainsi de suite. C'est ce que l'on appelle la réaction en chaîne.



Mais les neutrons émis ne provoquent pas tous de nouvelles fissions. Ils peuvent être absorbés dans des noyaux peu fissiles (Uranium 238, par exemple) ou s'évader.

Pour que la réaction en chaîne s'établisse, il faut rassembler en un même volume une masse suffisante de noyaux fissiles pour que le nombre de neutrons productifs (fission) soit supérieur au nombre de neutrons improductifs (absorption ou évasion). Cette masse minimale est appelée "masse critique".

d/ La bombe atomique.

C'est une application de l'énergie nucléaire qu'il faut, hélas, signaler. La bombe atomique est constituée par une masse critique où la réaction en chaîne se propage si rapidement qu'elle conduit à une réaction explosive dégageant une énergie considérable.

e/ Les réacteurs nucléaires.

Un réacteur nucléaire est constitué par une masse critique où la réaction en chaîne est contrôlée de façon à obtenir un dégagement d'énergie continu. Il s'agit en effet d'équilibrer les trois comportements des neutrons:

- provoquer de nouvelles fissions;
- être capturés par des noyaux non fissiles;
- s'échapper du réacteur

de façon que le nombre de fissions reste constant d'une génération à la suivante. 1000 fissions donnent spontanément naissance à environ 2500 neutrons: il faut alors 1000 fissions nouvelles et 1500 captures et fuites.

Les "combustibles" généralement utilisés dans les réacteurs sont:

- soit de l'uranium naturel (99, 3% d'U 238 et 0,7% d'U 235 fissiles

- soit de l'uranium enrichi en isotope 235 (2 à 3% au lieu de 0,7%
- soit du plutonium 239 qui est très fissile.

Les modérateurs. Les neutrons sont émis à très grande vitesse (environ 20 000 km/s). Ces neutrons rapides ont une faible probabilité de provoquer de nouvelles fission. Il est nécessaire de les ralentir. On utilise pour cela un modérateur, par exemple le graphite ou l'eau lourde (D_2O), matière composées de noyaux légers auxquels les neutrons communiquent une partie de leur énergie cinétique et de leur quantité de mouvement au cours de chocs successifs, alors qu'ils rebondiraient sur des noyaux lourds sans pratiquement perdre d'énergie cinétique.

Les réfrigérants ou fluides caloporteurs. Pour récupérer la chaleur produite dans le combustible on utilise un fluide, par exemple le gaz carbonique sous pression

qu'il est facile de faire circuler rapidement dans le réacteur et qui transmet la chaleur de façon satisfaisante. Il existe d'autres réfrigérants possibles: l'eau ordinaire à la pression atmosphérique, sous pression ou bouillante; l'eau lourde, les métaux liquides, tels le sodium.

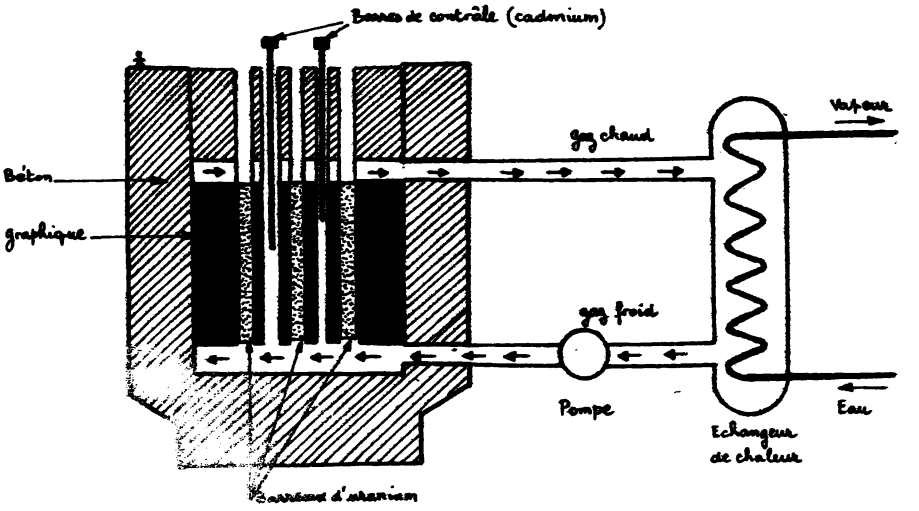


Schéma de principe d'un réacteur nucléaire

Le contrôle du réacteur. Pour régler la réaction en chaîne, on utilise des barres de contrôle, faites de matériaux absorbant très bien les neutrons (bore, cadmium). Suivant qu'elles sont introduites plus ou moins profondément dans le réacteur, la réactivité décroît ou croît. Des barres de sécurité, de composition analogue, tombent automatiquement dans le réacteur en cas d'incident (panne du circuit de refroidissement par exemple) et la réaction s'arrête instantanément.

2°) La fusion nucléaire.

C'est une réaction nucléaire au cours de laquelle des noyaux, hydrogène, deutérium ou tritium, s'agglomèrent pour donner naissance à un noyau plus lourd.

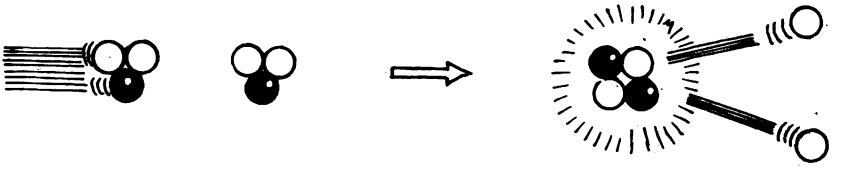
Cette réaction s'accompagne d'un dégagement d'énergie de 8 à 10 MeV par nucléon correspondant à une perte de masse de un centième environ, c'est-à-dire dix fois plus élevée que pour la fission.

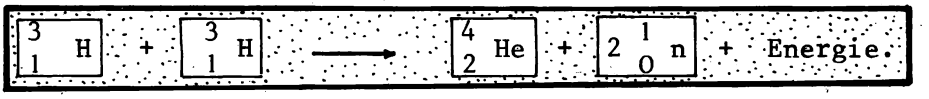
Le phénomène de fusion ne peut se réaliser que dans des conditions de température extrêmement élevée, de plusieurs dizaines de millions de degrés. Il faut en effet une grande agitation thermique pour rapprocher des noyaux porteurs de charges de même signe.

La fusion se produit dans le soleil et dans les autres étoiles. La seule fusion artificielle est celle qui se produit dans la bombe à hydrogène où la température initiale est due à l'explosion d'une bombe à fission qui sert en quelque sorte "d'allumette".

Les recherches en laboratoire sur la fusion contrôlée se poursuivent, mais elles sont probablement loin d'aboutir.

Un exemple de fusion:





Tritium + Tritium ⟶ Hélium + 2 neutrons + Energie

On remarquera la conservation du nombre des charges électriques et du nombre total de protons.

Exercice: L'énergie de cohésion par nucléon du tritium est de l'ordre de 2,5 MeV. Celle de l'hélium 4 est environ 7 MeV par nucléon. En déduire l'énergie libérée au cours de la fusion envisagée ci-dessus. A quelle perte de masse correspond-elle? Quelle est la diminution relative de masse ?

Les informations techniques de ce chapitre proviennent de la brochure « ENERGIE NUCLEAIRE » d'EDF. (P. Cisel).

Chapitre 31

LA RADIOACTIVITE

La radioactivité fut découverte en 1896 par Henri Becquerel. Ce n'était pas tout à fait comme on le prétend souvent le fruit du hasard. Un an auparavant, Roentgen venait de découvrir dans un tube de Crookes un rayonnement mystérieux, le rayonnement X, qui prenait naissance à l'endroit où le verre était fluorescent. Becquerel cherchait à obtenir des rayons X sans utiliser le tube de Crookes, uniquement à partir de certaines substances que le Soleil rendait fluorescentes. Marie Curie a relaté les circonstances de la découverte dans son traité de radioactivité de 1910 :

"... Il obtint des impressions photographiques au travers du papier noir avec un sel d'uranium éclairé par le soleil ... Mais la suite des expériences montra que le phénomène observé n'était nullement relié à la fluorescence : il n'était pas nécessaire que le sel soit éclairé..."

En effet, il laissa certain jour sans soleil un sel d'uranium dans un tiroir au voisinage d'une plaque photographique. Par acquit de conscience il prit soin de développer la plaque et trouva qu'elle était impressionnée. Becquerel admit donc que l'uranium émet spontanément des rayons particuliers qu'il appela d'abord rayons uraniques.

Au cours des quelques années qui suivirent, Marie Curie, collaborant avec Pierre Curie, son époux, découvrit qu'un autre élément, le thorium, émettait des rayonnements analogues à ceux de l'uranium.
Remarquant que certains minerais d'uranium étaient plus actifs que ne le laissait prévoir leur contenu en uranium, Marie Curie isola une petite quantité d'un élément nouveau, deux millions de fois plus actif que l'uranium, qu'elle nomma radium.

Elle qualifia de radioactives les susbtances telles que l'uranium, le thorium et le radium et appela "radioactivité" leur propriété.

I - LES CORPS RADIOACTIFS

1°) Définition

La radioactivité est une émission spontanée de rayonnement par certaines substances (que l'on qualifie de radioactives).

2°) Les éléments radioactifs

Les principaux éléments naturellement radioactifs sont des éléments lourds et instables. Nous citerons :

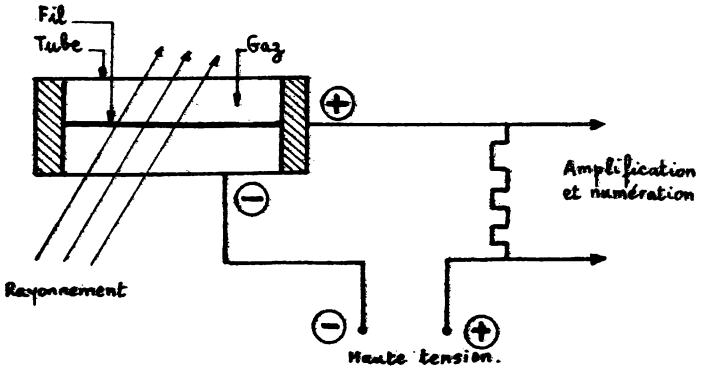
- L'Uranium U Z = 92
- Le Thorium Th Z = 90
- Le Radium Ra Z = 88
- L'Actinium Ac Z = 89

Le Plutonium (Pu), Z = 94, très radioactif, n'existe pas à l'état naturel. Il apparaît dans les réacteurs nucléaires par suite de la transmutation de l'uranium 238.

3°) La détection de la radioactivité

Le rayonnement radioactif impressionne les émulsions photographiques. C'est ainsi qu'on le découvrit. Mais ce n'est pas là la principale méthode de détection.

Les rayonnements émis par les éléments radioactifs ont la propriété d'ioniser les gaz qu'ils traversent en arrachant des électrons périphériques de leurs atomes. Ils peuvent ainsi déclencher une décharge électrique entre deux conducteurs sous tension. C'est le principe des compteurs Geiger-Müller.



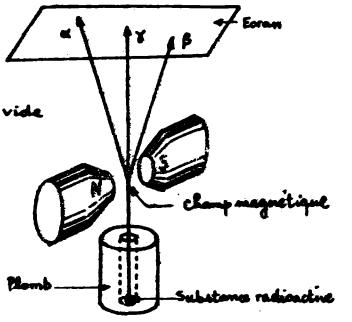
Le compteur est formé d'un tube métallique et d'un fil porté à un potentiel positif de l'ordre de 1000 volts par rapport au tube. Le rayonnement radioactif provoque sur le fil une avalanche d'électrons arrachés aux molécules du gaz contenu dans le tube. Une impulsion électrique est alors transmise après amplification, soit vers un haut parleur, soit vers un compteur numérique.

Il existe aussi des compteurs à scintillation où le détecteur est un corps tel que le sulfure de zinc ou l'iodure de sodium, qui ont la propriété de devenir luminescents sous l'action des rayonnements. A chaque impact,

un point lumineux apparaît et ces scintillations sont amplifiées et transformées en courant électrique par une sorte de cellule photoélectrique, le photomultiplicateur. (D'après « ENERGIE NUCLEAIRE » d'EDF)

II- COMPOSITION DU RAYONNEMENT RADIOACTIF NATUREL

Dès le début du siècle, plusieurs savants, parmi lesquels Rutherford et Soddy ont distingué trois sortes de rayonnements radioactifs à l'aide d'expériences dont voici le principe :



Une source radioactive envoie dans le vide un rayonnement de direction verticale. Lorsqu'on établit un champ magnétique sur le trajet du rayonnement, un écran détecteur montre trois impacts, correspondant à trois types de rayonnements :

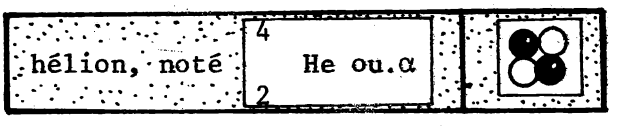
- Les rayons α , déviés dans un certain sens par le champ magnétique sont des particules chargées d'électricité positive.

- Les rayons β , déviés en sens contraire sont des particules chargées d'électricité négative.

- Le rayonnement γ , non dévié par les champs électrique et magnétique est de nature électromagnétique, comme la lumière et les rayons X.

1°) La radioactivité α

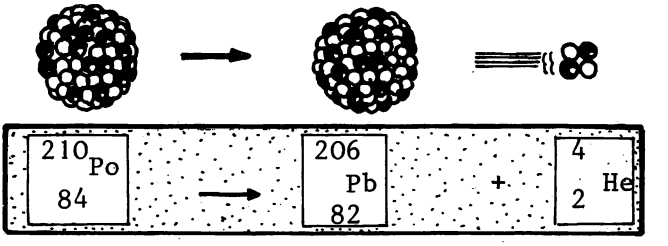
L'étude de leur déviation a montré que les particules α sont formées de deux protons et de deux neutrons. On peut donc les identifier à des noyaux d'hélium. On les appelle aussi hélions.



Les particules α sont émises par le noyau de l'atome radioactif. L'émission s'accompagne pour le noyau de la diminution de 4 unités de son nombre de masse et de 2 unités de son nombre de charge. Il y a donc évolution de la substance, transformation du noyau en un noyau d'un autre élément.

Cette transmutation correspond à un recul de deux cases dans le tableau de classification périodique puisque le numéro atomique a diminué de deux unités.

Par exemple, le Polonium émet une particule α et se transmute en plomb suivant l'équation nucléaire :



Polonium ⟶ Plomb + Hélion

On notera la conservation du nombre total de nucléons : 210 = 206 + 4 ; et la conservation du nombre de charge : 84 = 82 + 2.

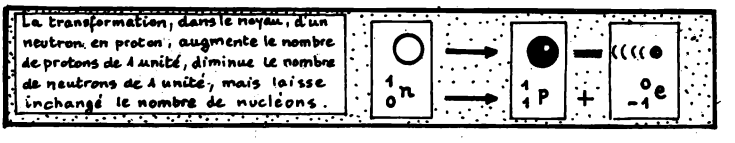
Les particules α sont émises avec des vitesses de l'ordre de 20 000 km/s. Elles sont peu pénétrantes.

2°) La radioactivité β

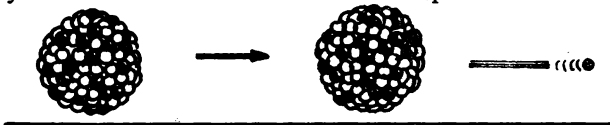
L'étude de leur déviation a montré que les particules β devaient être assimilées aux électrons dont elles ont la charge et la masse.

La radioactivité β est l'émission d'un électron par le noyau par suite de la transformation d'un neutron en proton. Elle ne s'accompagne pas d'une variation du nombre de masse A du noyau, mais d'une augmentation du nombre de charge Z d'une unité.

Cette transmutation correspond à un gain d'une case dans le tableau de classification périodique.



Par exemple, un noyau d'actinium se transforme en un noyau de thorium suivant l'équation nucléaire :



$$^{227}_{89}Ac \longrightarrow {}^{227}_{90}Th + {}^{0}_{-1}e \quad \text{(particule } \beta^- \text{)}$$

On notera la conservation du nombre de nucléons (227) et celle du nombre de charges 89 = 90 - 1.

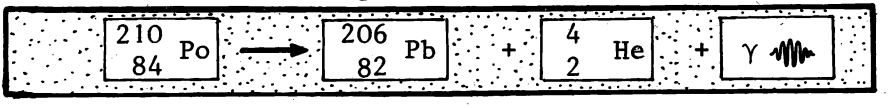
Les particules β sont émises à très grande vitesse (jusqu'à 290 000 km/s). Elles sont cent fois plus pénétrantes que les particules α .

3°) La radioactivité γ

Les rayons γ sont des photons de très grande énergie associés à des ondes électromagnétiques de très faible longueur d'onde :

$$10^{-3}\ \text{Å} < \lambda < 10^{-1}\ \text{Å}$$

Le rayonnement γ est toujours associé à une désintégration α ou β . Le départ de l'une de ces particules peut laisser le noyau dans un état excité instable. Il se libère de son excès d'énergie en émettant un photon γ. Dans ce cas, une désintégration α s'écrira, par exemple :



$$^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He + \gamma$$

III-LA RADIOACTIVITE EST UN PHENOMENE PUREMENT NUCLEAIRE

Les rayonnements radioactifs α et β ont leur origine dans le noyau. Le cortège électronique de l'atome ne joue aucun rôle.

Les propriétés radioactives d'un atome sont donc indépendantes des combinaisons chimiques dans lesquelles il est engagé. Les liaisons chimiques ne concernent en effet que le cortège électronique et non pas le noyau.

Ainsi, l'uranium métallique U et l'hexa-fluorure d'uranium UF_6 gazeux ont les mêmes propriétés d'émission. De même le radium pur Ra et les ions Ra^{++} du chlorure de radium.

La radioactivité est donc une propriété du noyau seulement : c'est un phénomène nucléaire.

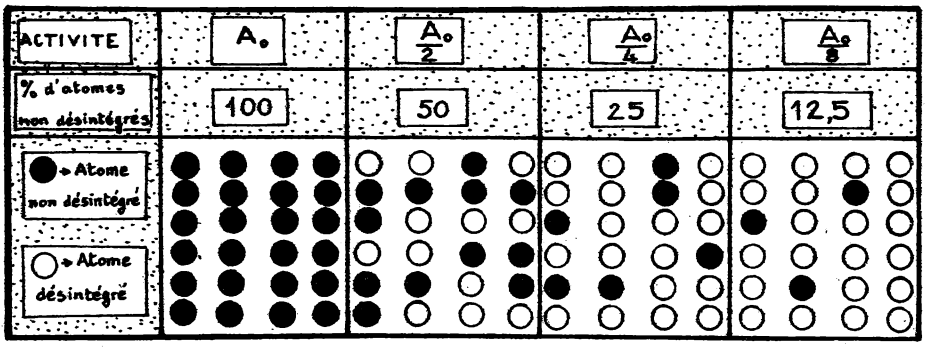
L'activité d'une susbtance radioactive est le nombre de désintégrations d'atomes de cette substance par seconde.

L'unité d'activité est le curie, qui représente $3,7.10^{10}$ désintégrations par seconde, c'est-à-dire une activité égale à celle de un gramme de radium. (1)

2°) La période radioactive ou demi-vie radioactive

La durée au bout de laquelle l'activité d'une certaine masse d'un élément radioactif (ou radioélément) a décru de moitié s'appelle la période radioactive ou demi-vie radioactive de cet élément.

Le tableau ci-dessous est une illustration de la décroissance de l'activité d'un radioélément. La durée de vie d'un atome particulier est totalement indéterminée. Elle peut être très brève ou très longue comparée à la période du radioélément considéré. La loi de décroissance de l'activité est statistique et s'applique seulement à un très grand nombre d'atomes.

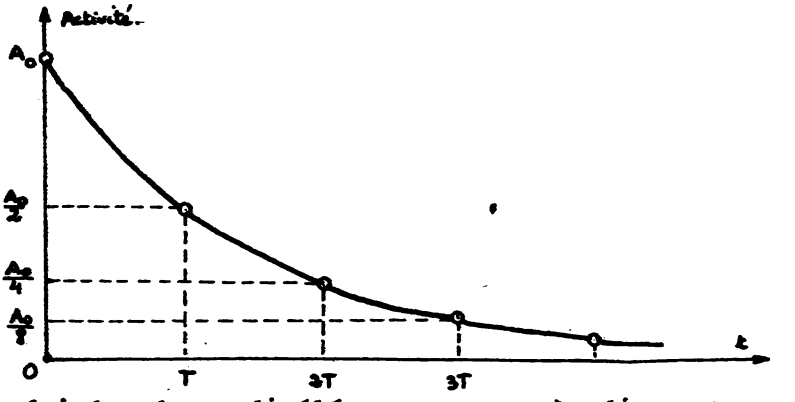


Appelons A_o l'activité initiale d'une substance (100% d'atomes radioactifs). Après la durée T, 50% des atomes se sont désintégrés et l'activité est $\frac{A_o}{2}$.

A l'instant 2T, 50% des atomes restants se sont désintégrés et l'activité est $\frac{A_o}{4}$, car il reste seulement 25% d'atomes. Et ainsi de suite.

La courbe ci-dessous donne la variation de l'activité d'un radioélément en fonction du temps:

(1) Le curie (Ci) est l'unité pratique utilisée en métrologie des activités. Mais l'unité internationale d'activité est le BECQUEREL (Bq) correspondant à une désintégration par seconde. On a donc:
$1 Ci = 3,7.10^{10}$ Bq.



Les périodes des radioéléments sont très diverses. Par exemple :

- Polonium 214 : T = $1{,}5.10^{-4}$ seconde
- Polonium 210 : T = 140 jours
- Radium 226 : T = 1622 ans
- Uranium 238 : T = 4,5 milliards d'années
- Thorium 232 : T = 14 milliards d'années.

V - LES SERIES RADIOACTIVES

Lorsque le noyau d'un radioélément se désintègre, il se forme un nouvel atome qui, généralement, est aussi radioactif. Il y aura donc une seconde et même plusieurs désintégrations successives, jusqu'à ce qu'un noyau stable soit produit.

Le premier membre de la série (ou famille) radioactive est le parent : les suivants sont les descendants et le dernier est le produit final.

Il y a trois séries radioactives naturelles aboutissant toujours à un isotope stable du plomb :

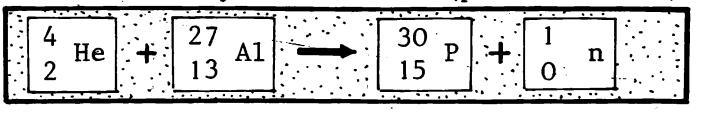
- la série de l'uranium ;
- la série de thorium ;
- la série de l'actinium.

Voici, à titre d'exemple, la série de l'uranium :

Nom	Symbole et désintégration	Période
Uranium	$^{238}_{92}U$	$4,5.10^{9}$ ans
	α	
Thorium	$^{234}_{90}Th$	24,1 jours
	β	
Protactinium	$^{234}_{91}Pa$	6,7 heures
	β	
Uranium	$^{234}_{92}U$	$2,5.10^{5}$ ans
	α	
Thorium	$^{230}_{90}Th$	$8,3.10^{4}$ ans
	α	
Radium	$^{226}_{88}Ra$	1622 ans
	α	
Radon	$^{222}_{86}Rn$	3,8 jours
	α	
Polonium	$^{218}_{84}Po$	3,05 minutes
	α	
Plomb	$^{214}_{82}Pb$	27 minutes
	β	
Bismuth	$^{214}_{83}Bi$	20 minutes
	β	
Polonium	$^{214}_{84}Po$	$1,6.10^{-4}$ seconde
	α	
Plomb	$^{210}_{82}Pb$	21 ans
	β	
Bismuth	$^{210}_{83}Bi$	5,0 jours
	β	
Polonium	$^{210}_{84}Po$	138 jours
	α	
Plomb	$^{206}_{82}Pb$	Stable

VI- LES RADIOELEMENTS ARTIFICIELS

En bombardant des noyaux stables avec des particules accélérées, on fabrique en laboratoire des atomes n'existant pas dans la nature, parce qu'ils sont radioactifs et ont une faible période. Il s'agit de radioéléments artificiels. C'est Frédéric et Irène Joliot-Curie qui obtinrent le premier radioélément en 1934 en bombardant de l'aluminium avec des noyaux d'hélium (particules α).



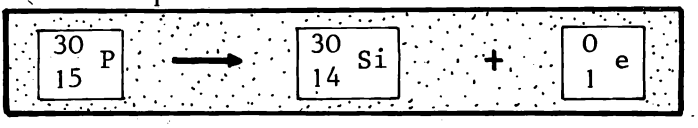
Ils avaient ainsi obtenu le radio-phosphore, premier radioélément artificiel.

Actuellement, la plupart des radioéléments artificiels sont obtenus en irradiant dans des faisceaux de neutrons issus de réacteurs nucléaires des noyaux stables.

VII-LA RADIOACTIVITE β^+

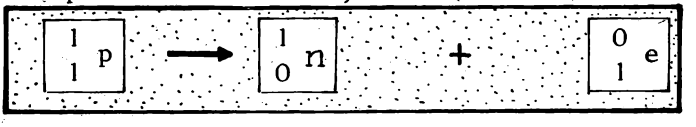
Le phosphore 30 radioactif découvert par Frédéric et Irène Joliot-Curie devait les conduire à une seconde découverte : le radio-phosphore se désintègre en émettant une particule électrisée positivement, de même charge que le proton, mais de masse égale à celle de l'électron: c'est l'électron positif ou positon , également nommé anti-électron.

On le note $^{0}_{1}e$ ou β^+.



Phosphore Silicium Positon

Comme l'électron, le positon est émis par le noyau. Son apparition est liée à la transformation dans le noyau d'un proton en neutron, suivant le schéma :



On notera dans toutes ces réactions la conservation du nombre de nucléons et la conservation de la charge électrique totale.

VIII-QUELQUES APPLICATIONS DES RADIOELEMENTS

1°) Atomes traceurs (*)

En introduisant un radioélément dans une substance chimique, on peut suivre aisément ses déplacements à l'aide d'un détecteur. Les applications sont multiples : étude du cheminement des eaux naturelles, détection de fuites sur une canalisation enterrée. En agronomie, les atomes traceurs permettent de suivre leur évolution dans les sols et dans les plantes. Ils servent aussi à marquer les insectes (abeilles, sauterelles) afin d'observer leurs migrations ou leur comportement.

2°) Analyse chimique (*)

On peut rendre radioactif un des composants d'un échantillon en le soumettant à l'action d'un flux de neutrons sorti d'un réacteur. La grande sensibilité des détecteurs permet alors une analyse très fine, sans autre manipulation.

4°) Gammagraphie (*)

Les radiations γ impressionnent les pellicules photographiques. Les radioéléments peuvent donc servir à radiographier des pièces métalliques par exemple, afin de révéler leurs défauts internes, comme on pourrait le faire avec les rayons X, mais à moindres frais.

5°) Emploi des radioéléments en médecine (*)

a/ Examens fonctionnels

La glande thyroïde, le foie et les reins retiennent certains radioéléments dans leurs tissus. La mesure des quantités de radioéléments fixées et la détermination de la façon dont ils se distribuent permet, par comparaison, de déterminer si l'organe où ils ont été introduits fonctionne normalement.

On peut ainsi mesurer facilement le débit cardiaque ou le volume sanguin en introduisant dans le système circulatoire un élément radioactif.

b/ La radiothérapie

C'est la destruction des tissus malades, en particulier des tissus cancéreux, par les radiations (Bombe au cobalt, par exemple).

(*) D'après «Energie Nucléaire» d'EDF page 45

Si les radioéléments rendent de nombreux services, ils présentent également de grands dangers. Nous ne citerons que le cas des déchets radioactifs qui apparaissent dans les réacteurs nucléaires. On ne sait ni les retraiter industriellement, ni les stocker convenablement.

Chapitre 31

EXERCICES

1/ Dans tous les problèmes de choc, on considérera que les vitesses, avant et après le choc, sont colinéaires.

1°) Un corps radioactif émet des noyaux de l'atome d'hélium $^{1}_{2}He$ avec une vitesse v_o = 20 000 km/s. Sachant que l'émetteur est le radium $^{226}_{88}Ra$ et qu'il se forme du radon Rn, écrire le nombre de masse, le numéro atomique du nouveau corps formé et l'équation nucléaire qui traduit cette désintégration.

2°) Calculer l'énergie cinétique d'un noyau d'hélium et le nombre de noyaux qui doivent être émis par seconde pour obtenir une puissance disponible de 1 watt. Masse du noyau d'hélium supposée indépendante de la vitesse : $\frac{4}{6{,}0.10^{23}}$ g.

3°) Un noyau d'hélium va heurter, avec la vitesse v_o , un atome d'aluminium $^{27}_{13}Al$ immobile. Il se forme du phosphore P et un neutron est émis. Ecrire l'équation nucléaire qui traduit la désintégration. Le phosphore restant immobile, quelle est la vitesse V d'émission du neutron ?

Masse du neutron au repos : $\frac{1}{6{,}0.10^{23}}$g.

4°) Quelle est, d'après l'équation relativiste de la masse (relation d'Einstein)

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

la variation de masse Δm que subit le neutron animé

de la vitesse V ? Quelle est la variation d'énergie correspondant à cette variation de masse ?
On donne c = 300 000 km/s.

On rappelle que si ε est une quantité très petite devant l'unité, $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \simeq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$

(Baccalauréat).

2/

A/ Au cours de sa désintégration spontanée, l'atome de radium, $^{226}_{88}Ra$ émet une particule α.

1°) Ecrire l'équation représentant cette désintégration radio-active, identifier les deux produits obtenus en s'aidant du tableau suivant :

$^{210}_{85}At$; $^{222}_{86}Rn$; $^{223}_{87}Fr$; $^{226}_{88}Ra$; $^{227}_{89}Ac$; $^{232}_{90}Th$.

2°) La masse du noyau $^{226}_{88}Ra$ est 226,096 0 u.m.a. (unités de masse atomique) et celle de la particule α 4,003 9 u.m.a. Calculer en joules et en électrons-volts, la valeur de l'énergie libérée par la désintégration d'un noyau de radium Ra. On donne :

- 1 u.m.a. = $\frac{1}{6,02} 10^{-26}$ kg ;
- charge élémentaire : $1,6 . 10^{-19}$ C
- vitesse de la lumière : 300 000 km/s.

3°) En admettant que l'énergie dont on vient de calculer la valeur, soit entièrement acquise par la particule α sous forme d'énergie cinétique, évaluer la vitesse de cette particule.

B/ Une particule α de masse m_1 et de vitesse V_1=15000km/s heurte un noyau d'hydrogène immobile (toutes les vitesses sont déterminées par rapport au laboratoire). Le choc lance le proton de masse m_o à la vitesse V_o' cependant que la particule α poursuit sa trajectoire avec la vitesse V_1'. Dans ce choc, toutes les vitesses sont colinéaires et l'on considère qu'il y a conservation de l'énergie cinétique.

Calculer la vitesse V_o' du proton après le choc. Etablir la relation liant son énergie cinétique après le choc, aux énergies cinétiques de la particule α avant et

après le choc. $m_o = \frac{m_1}{4}$

C/ Un condensateur plan est constitué de deux armatures parallèles P et P', de section carrée (longueur ℓ du côté égale à 10 cm), située à la distance d égale à 5 cm l'une de l'autre.

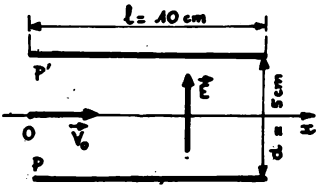


Fig 1

On établit une différence de potentiel continueaux bornes du condensateur, telle que le champ électrostatique qui s'établit entre les deux armatures soit uniforme et ait pour intensité 40 000 V/m.

Un mince faisceau de protons arrive en O, à mi-distance de P' (fig 1) animés de la vitesse $\vec{V}_o$ parallèle aux armatures, suivant la direction Ox horizontale. V_o = 24 000 km/s.

En supposant la force de pesanteur négligeable par rapport à la seule force, d'origine électrostatique, $\vec{F} = q\,\vec{E}$, qui agit sur les protons,

1°) Déterminer à quelle distance verticale d' de l'axe Ox, le faisceau de protons ressort du condensateur après avoir traversé le champ électrostatique $\vec{E}$ sur toute sa longueur.

- Charge électrique du proton $q = 1{,}6.10^{-19}$
- Masse du proton $m = 1{,}6.10^{-27}$ kg.

2°) Exprimer de manière littérale l'énergie cinétique d'un proton du faisceau lorsqu'il sort du condensateur, en fonction de son énergie cinétique d'entrée et du déplacement d'. Rappeler la valeur de d'.

3°) On dispose maintenant les armatures du condensateur perpendiculairement à la direction du faisceau incident (voir fig. 2). L'armature P est percée d'un petit trou par lequel pénètre le faisceau de protons, avec la vitesse V_o = 24 000 km/s.

Exprimer littéralement l'énergie cinétique d'un proton à son arrivée sur l'armature P', en fonction de d et de l'énergie cinétique d'entrée, sachant que le même champ

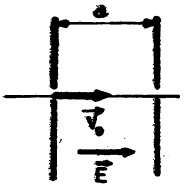


Fig 2

électrostatique $\vec{E}$, dirigé de P vers P', existe entre les armatures. Comparer cette énergie à celle trouvée au C/, 1°). Lequel des deux dispositifs est plus intéressant pour accroître la vitesse des particules chargées électriquement ?

(Baccalauréat).

3/ Rappels

- Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}^0 = 6{,}023.10^{23}$ particules.mole^{-1}
- 1 u.m.a. = $1{,}66.10^{-27}$ kg.
- Célérité de la lumière dans le vide: $c = 3.10^8$ m.s^{-1}
- Charge du proton = $+ 1{,}6.10^{-19}$ C.
- $\text{Log}_e\ 2 = 0{,}693$.

La précision de la règle à calculer suffit pour les applications numériques.

A/ Le radionucléide $^{226}_{88}Ra$ subit la désintégration de type α selon le schéma suivant :

$$^{226}_{88}Ra \longrightarrow {}^{222}_{86}Rn + {}^{4}_{2}He + \gamma$$

1°) Donner la signification de cette équation.

2°) Connaissant les masses des noyaux :

$^{226}_{88}Ra$ = 226,0960 u.m.a. $^{222}_{86}Rn$ = 222,0869 u.m.a.

$^{4}_{2}He$ = 4,0039 u.m.a.,

Calculer en méga-électronvolts (MeV), l'énergie libérée par la désintégration de 1 noyau de radium.

Sous quelles formes cette énergie est-elle libérée ?

3°) Dans le cas où la radioactivité α de Ra 226 n'est pas suivie d'émission électromagnétique et en supposant initialement le noyau au repos, calculer en km.s^{-1} , la vitesse d'éjection de la particule α , la vitesse de recul du noyau de radon et leurs énergies cinétiques respectives.

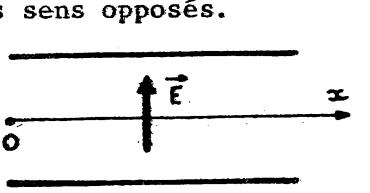
B/ Le radium accompagné de ses descendants, émet des rayonnements α d'énergies cinétiques différentes.

Un filtre de vitesse est constitué de deux plateaux parallèles distants de d = 5cm. Dans cet espace règnent le champ électrique $\vec{E}$ uniforme créé par une tension U continue appliquée entre les plateaux et un champ magnétique d'induction uniforme $\vec{B}$, de module égal à 10^{-3} tesla.

On reçoit en O, un mince pinceau de particules α de vitesses parallèles à l'axe Ox.

On rappelle que le module de la force agissant sur une particule portant la charge q, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ et soumise à une induction magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire à $\vec{v}$, est donnée par la relation F = q.v.B.

Dans le filtre de vitesse, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont situés de telle sorte que les forces magnétique et électrique ont même direction et des sens opposés.



Calculer la tension U à appliquer entre les plateaux, pour que, seules les particules animées d'une vitesse de 16 000 $km.s^{-1}$ ne soient pas déviées.

Expliquer brièvement ce qu'il advient des particules abordant le filtre avec des vitesses différentes.

C/ Si l'on désigne par N_o le nombre de noyaux de radium existant dans un échantillon à la date t = 0, on peut exprimer par $N = N_o\, e^{-\lambda t}$ le nombre de noyaux subsistant à une date t.

1°) La période ou demi-vie du radium étant T_{Ra} = 1620 ans, calculer en exprimant le temps en années, la constante radioactive λ_{Ra}

2°) On considère 1 g de radium pur fraîchement préparé (donc exempt de descendants).

Calculer le taux de désintégration $\frac{dN_{Ra}}{dt}$ de cet échantillon (nombre de noyaux de Ra désintégrés pendant une seconde dans cet échantillon) et montrer qu'il peut être considéré comme constant pendant une durée faible devant T_{Ra} .

3°) Aussitôt formés, les noyaux de radon, provenant de 1 g de radium, se désintègrent à leur tour, avec une période T_{Rn} = 3,82 jours. Après quelques semaines, la masse de radon se stabilise : un équilibre radioactif s'est réalisé entre les masses de radium et de radon en présence.

a/ Comparer les taux de désintégration du radium et du radon en présence lorsque l'équilibre est atteint.

b/ En déduire la masse de radon en équilibre radioactif avec 1 gramme de radium.

(Baccalauréat).

PROBLEMES DE REVISION

Baccalauréat 1977. Séries C, E.

DYNAMIQUE

1/ Pour propulser un véhicule, on utilise l'énergie cinétique emmagasinée par un volant placé à bord. Le volant est lancé à la station de départ par un moteur électrique. Il restitue ensuite son énergie au véhicule par un système de transmission approprié. On admettra que le volant constitue une simple source d'énergie (le mécanisme de transmission n'intervenant pas dans le problème).

La masse du volant est m = 1,5 tonne ; on la considère comme régulièrement répartie sur une circonférence de rayon R = 0,7 m. La masse totale du véhicule, volant compris est M = 5 tonnes.

1°) Le véhicule est au repos à la station de départ. On lance le volant à 6 000 tours par minute.

a/ Calculer l'énergie cinétique E_o emmagasinée par le volant à la fin du lancement. Quel est alors le moment cinétique σ_o du volant par rapport à son axe de rotation (Δ) ?

b/ Calculer le moment par rapport à (Δ) du couple, supposé constant, appliqué par le moteur de lancement au volant, sachant que le lancement dure 10 mn.

2°) On découple le volant du moteur de lancement, et l'on embraye la transmission du véhicule. Celui-ci se trouve ainsi soumis à une force de traction F. Il part du repos à la date t = 0 et se déplace en ligne droite sur une route horizontale. On admet d'abord que les frottements sont négligeables.

a/ Tant que la vitesse v du véhicule est inférieure à v_o = 5 m/s, la force F est supposée constante, égale à F_o = 4 000 N. A quelle date t_o le véhicule atteindra-t-il la vitesse v_o ? Quelle est la puissance P_o fournie à cet instant par le volant ? Quelle est l'énergie dépensée au cours de cette première phase ?

b/ Lorsque $v \geqslant v_o$, la puissance fournie par le volant conserve la valeur P_o. Montrer que dans cette seconde phase le mouvement n'est pas uniformément accéléré. Déterminer les lois de variation de l'énergie cinétique et de la vitesse en fonction du temps. Quelle est l'énergie totale dépensée depuis le départ lorsque la vitesse du véhicule atteint v_1 = 10 m/s ?

3°) En réalité, le véhicule est freiné par des frottements dont l'action est assimilée à une force appliquée au véhicule. $\vec{F}' = - a. \vec{v}$

La constante a est égale à 200 unités S.I.

On ajuste la puissance fournie par le volant pour que le véhicule conserve la vitesse constante v_1 . Quelle est la durée maximale de cette troisième phase et la distance parcourue correspondante ?

(On négligera l'énergie dépensée pendant la période d'accélération par rapport à l'énergie totale emmagasinée E_o).

4°) Le moteur de lancement absorbe à un certain instant une puissance électrique P = 200 kW. Il est soumis à une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace V = 500 volts. Le facteur de puissance du moteur est : $\cos \varphi = 0,707$.

a/ Calculer l'intensité efficace du courant dans le moteur.

b/ Le moteur est alimenté par des fils de résistance R. Quelle est la valeur maximale de R pour que la puissance dissipée dans les fils n'excède pas 1 kW ? Quelle est alors la différence de potentiel aux bornes des fils d'alimentation ?

2/ Remarques

Pour l'intensité du champ de pesanteur, on adoptera $g = 10 m/s^2$.

On négligera la résistance de l'air.

On étudie le fonctionnement d'une machine à enfoncer les pieux dans le sol, à la manière d'un marteau.

Une masse M, au repos est soulevée verticalement par l'intermédiaire d'un câble de masse négligeable. Elle atteint la hauteur H, avec une vitesse nulle, au bout du temps T.

Données : M = 500 kilogrammes, H = 2,75 mètres.

A/ Le mouvement ascendant de M comprend deux phases :

- Première phase : la tension P du câble est constante, la distance parcourue est h_1 et la durée de cette phase du mouvement est t_1 .

- Deuxième phase : la tension du câble est nulle.

1°)

a/ Exprimer h_1 , t_1 , et T en fonction de N, F, H et g.

b/ Application numérique : on donne F= 5 500 newtons.

2°) h désignant la hauteur atteinte par M à l'instant t et v sa vitesse à cet instant, tracer, pour $0 \leqslant t < T$, l'allure des courbes représentant les variations de h et de v en fonction de t.

B/ Le câble de traction s'enroule sur un treuil mis en mouvement par un moteur électrique.

1°)

a/ Exprimer la puissance P reçue par la masse M de la part du câble en fonction de sa vitesse v et de la tension du câble.

b/ A quel instant P a-t-elle sa plus grande valeur ? Calculer numériquement cette valeur.

2°)

a/ Calculer le travail effectué par le câble au cours d'une remontée de la masse M.

b/ Ce travail est effectué entre les instants 0 et t. Calculer numériquement la puissance moyenne correspondante.

C/ La masse M retombe, en chute libre, de la hauteur H, sur la tête d'un pieu de masse m = 50 kg placé dans le sol meuble.

A la fin du choc, dont la durée est très courte, M et m ont la même vitesse V.

1°) Donner l'expression littérale de V. Calculer sa valeur numérique.

2°) Donner l'expression littérale de l'énergie cinétique de l'ensemble (masse M, pieu), immédiatement après le choc.

3°) La masse M et le pieu restent en contact après le choc. Pendant toute la durée du mouvement ultérieur, le sol meuble oppose à l'enfoncement du pieu la force verticale constante R.

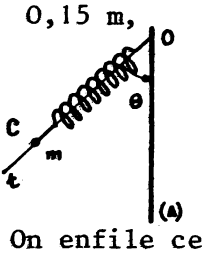
a/ Quelle est la nature de ce mouvement ?

b/ A l'arrêt, le pieu s'est enfoncé de e = 10 cm. Calculer la durée t du déplacement du pieu et la valeur de la force R.

3/ Dans tout le problème, on prendre pour accélération de la pesanteur g = 10 m/s^2; sin 37° = 0,6 ; cos 37° = 0,8. Dans la partie A/, on donnera toujours l'expression littérale du résultat avant d'effectuer l'application numérique.

A/ On dispose d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable, de longueur à vide

L_o = 0,15 m,



et de raideur k = 20N/m. On enfile ce ressort sur une tige Ot, soudée en O à un axe vertical Δ, par rapport auquel elle est inclinée de Θ = 37°; on en fixe une extrémité au point O et, à l'autre extrémité, on fixe un corps C de masse m = 0,20 kg, assimilable à un point matériel, coulissant sans frottement sur Ot.

1°) L'ensemble (Δ , Ot) est immobile.

a/ Faire apparaître sur une figure claire les forces agissant sur C et exprimer la condition d'équilibre de ce corps. En projetant cette condition vectorielle

sur l'axe Ot d'une part et, d'autre part, sur l'axe perpendiculaire à Ot, dans le plan (Δ , Ot), évaluer l'allongement b du ressort et l'intensité de la force $\vec{R}_o$, exercée par la tige sur C lorsque celui-ci est en équilibre.

b/ On tire C suivant Ot, vers le bas, de $x_o = 2.10^{-2}$ m et on le lâche sans vitesse initiale à un instant qu'on prendra comme origine des temps. Montrer que le mouvement de C est alors sinusoïdal ; écrire l'équation horaire de ce mouvement en précisant la valeur numérique des différents coefficients, l'axe Ot étant orienté vers le bas.

2°) L'ensemble (Δ , Ot) tourne autour de Δ à la vitesse angulaire constante α' et C décrit une trajectoire circulaire dans un plan horizontal (l'angle θ est toujours égal à 37°).

a/ Calculer la longueur L du ressort et déterminer l'intensité et le sens de la force $\vec{R}$ exercée par la tige Ot sur C pour $\alpha' = 10$ rd/s.

b/ Montrer que, pour une valeur particulière α_o de la vitesse angulaire, cette force est nulle.

B/ On dispose maintenant d'un long ressort SA, légèrement tendu, d'axe horizontal.

1°) On anime la spire S d'un mouvement sinusoïdal, d'amplitude $a = 2.10^{-3}$ m, de fréquence f = 50 hertz, de part et d'autre de sa position d'équilibre O. Une onde longitudinale se propage alors le long du ressort, à la vitesse V = 4 m/s. En A, on place un dispositif amortisseur pour éviter toute réflexion de l'onde.

a/ Ecrire l'équation horaire du mouvement de S en prenant l'origine des temps à l'instant où la spire S commence à vibrer (à partir d'une position d'élongation maximale positive, l'axe étant orienté de O vers A).

b/ Ecrire l'équation horaire du mouvement de la spire P, située, à l'équilibre, à la distance d= 0,18 m de O (on négligera l'amortissement entre S et P). Représenter les vecteurs de Fresnel associés aux mouvements de S et de P.

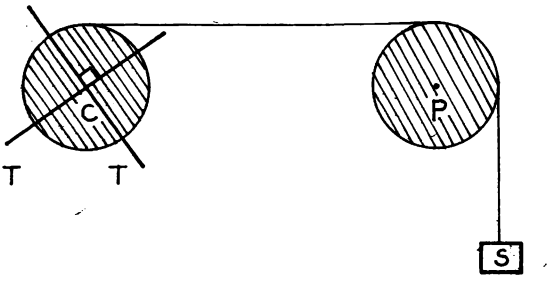
c/ A l'instant t = 0,065 s, calculer la distance entre les spires S et P.

2°) On anime en plus la spire S', située à 28.10^{-2} m de O, d'un mouvement sinusoïdal de même amplitude et même fréquence que celui de S, mais en quadrature retard

par rapport à celui-ci. On admet qu'il n'y a aucune réflexion des ondes, ni en S, ni en S'.

Ecrire l'équation horaire du mouvement de P.

4/ On prendra $g = 10\ m/s^2$
Un treuil, d'axe horizontal, est constitué d'un cylindre plein,



homogène, C, de masse M et de rayon R, traversé par deux tiges T perpendiculaires en leur milieu à l'axe du cylindre. Chacune de ces deux tiges a une masse M_T et une longueur $L = 2\ell$.

On enroule sur le cylindre C une corde inextensible, de masse négligeable, qui passe également dans la gorge d'une poulie P assimilable à un disque plein, homogène, d'axe horizontal, de masse M' et de rayon R'. A l'extrémité de la corde on attache un solide S de masse m. Le moment d'inertie de la poulie, par rapport à l'axe horizontal passant par son centre est $J_P = \frac{1}{2} M'R'^2$. Celui du cylindre par rapport son axe de révolution est $J_C = \frac{1}{2}MR^2$. Enfin le moment d'inertie de chacune des tiges, par rapport à l'axe de rotation du treuil est $J_T = \frac{1}{12} M_T L^2$.

On donne M = 5 kg ; R = R' = 0,1 m ; M' = 1 kg ; M_T = 0,5 kg ; L = 2ℓ = 0,6 m.

A/ On abandonne le système sans vitesse initiale.
Déterminer :

1°) L'accélération du mouvement de S ;

2°) Les tensions des différentes parties de la corde ;

3°) La vitesse du solide S lorsqu'il a parcouru une distance H et la vitesse angulaire du cylindre à cet instant.

Application numérique : m = 2 kg ; H = 10 m.

B/ On remplace le solide S par un solide S' de masse m' et l'on exerce, successivement, sur chacune des quatre extrémités des tiges T, une force d'intensité supposée constante et tangente à la circonférence décrite par son point d'application.

1°) Quelle devra être l'intensité de cette force pour que le solide S', initialement au repos, remonte et atteigne une vitesse v' après une course de longueur H' ?

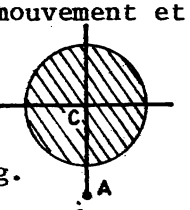
2°) Déterminer les tensions des différentes parties de la corde au cours de ce mouvement.

Application numérique :

m' = 12 kg ; v' = 2m/s ; H' = 8m.

C/ La corde précédemment enroulée sur le cylindre étant enlevée, on fixe à l'extrémité de l'une des tiges, un corps A de masse μ que l'on assimilera à un point matériel.

1°) On écarte le système de sa position d'équilibre, d'un angle α_o faible et on l'abandonne sans vitesse initiale. Déterminer la nature du mouvement et calculer sa période.



Application numérique : μ = 1 kg.

2°) On donne à l'angle d'écart une valeur $\alpha = \frac{2\Pi}{3}$ radian.

Quelle sera la vitesse angulaire du système lorsqu'il passera par la position d'équilibre ? En déduire à cet instant la vitesse linéaire de A.

MOUVEMENTS OSCILLATOIRES

5/ On dispose d'un disque (D), homogène, de rayon R = 20,0 cm, d'épaisseur e = 1,00 cm, de masse volumique $\rho = 9{,}55 \cdot 10^3$ kg/m^3.

A/

1°) Calculer la masse M du disque (D).

2°) Calculer le moment d'inertie I du disque (D) par rapport à son axe de révolution (on rappelle que ce moment d'inertie I a pour expression littérale $I = \frac{MR^2}{2}$).

B/ Le disque (D), embrayé à un moteur, tourne autour de

son axe de révolution à la fréquence constante N = 60 tours par minute. Lorsque l'on débraye le disque (D) du moteur, sous l'action de résistances passives équivalentes à un couple que l'on supposera constant, ce disque ralentit et met un temps t_1 = 1 minute pour s'arrêter.

On demande de calculer l'accélération angulaire, le moment du couple résistant et le nombre de tours qu'effectue le disque (D) entre l'instant où il est débrayé du moteur et l'instant où il cesse de tourner.

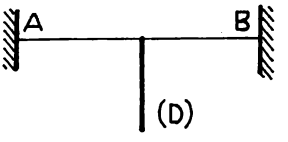
C/ On réalise un pendule de torsion P en reliant le disque (D) à un point d'un support fixe, par l'intermédiaire d'un fil de torsion vertical qui coïncide avec l'axe de révolution du disque (D).

Le disque (D) étant au repos, on le fait tourner autour de son axe de révolution d'un angle θ , le fil de torsion restant parfaitement vertical, et on l'abandonne alors à lui-même.

Sachant que la constante de torsion du fil vaut C = 6,00 N.m/rd, calculer la période T du pendule de torsion P.

Quelle est la vitesse angulaire du disque (D) quand celui-ci passe par sa position d'équilibre, l'amplitude angulaire étant supposée constante et égale à 1 radian ?

D/ Le disque (D) est maintenant soudé, suivant une de de ses génératrices (voir figure), à un fil de torsion horizontal), tendu entre ses extrémités fixes A et B. Le disque (D) étant en équilibre stable quand l'angle de torsion du fil AB est nul, on le fait tourner autour de la direction AB d'un angle petit et on l'abandonne à lui-même.



La constante de torsion du fil valant C' = 15,0 N.m/rd, on demande de calculer la période T' des oscillations du disque (D).

(On rappelle que, d'après le théorème de Huygens, le moment d'inertie I_Δ d'un solide, de masse M, par rapport à un axe quelconque Δ est égal au moment d'inertie I_D de ce solide par rapport à l'axe D, parallèle à

l'axe Δ et passant par le centre de gravité du solide, augmenté du produit de la masse M par le carré de la distance d des axes D et Δ ; Soit $I_\Delta = I_D + Md^2$)

On prendra $g = 10{,}0\ m/s^2$.

PHENOMENES VIBRATOIRES

6/

A/ Une lame vibrante est munie d'un stylet dont la pointe animée d'un mouvement sinusoïdal de fréquence N frappe verticalement en un point S la surface d'une eau initialement au repos. Elle y produit des perturbations sinusoïdales, de même fréquance N, de même amplitude a que le mouvement de la pointe et en phase avec elle. On admettra dans tout le problème que l'amplitude des ondes se conserve au cours de la propagation.

1°) Ecrire l'équation horaire $S_M = f(t)$ du mouvement d'un point M de la surface du liquide situé à la distance x de la source. On prendra comme origine des temps, l'instant où la pointe se met à vibrer en se déplaçant dans le sens positif ascendant.

2°) Quel est l'ensemble des points M tel que S_M a une même valeur à un instant donné t ?

3°) On stroboscope le phénomène. La plus grande fréquence du stroboscope pour laquelle on observe l'immobilité apparente du phénomène est $N_o = 100$ Hz. La mesure de la distance entre deux crêtes successives est d= 4mm.

En déduire la vitesse de propagation des ondes à la surface de l'eau à cette fréquence, V.

4°) Sachant que la pointe du stylet décrit au cours de son mouvement un segment de longueur $\ell = 4$ mm, calculer l'élongation et la vitesse du point M_1 situé à la distance x = 2 cm de S à l'instant $t_1 = 0{,}125$ s.

Préciser dans quel sens se déplace M_1 à cet instant.

B/ La source des vibrations, à partir de sa position précédente S est animée d'un mouvement rectiligne uniforme horizontal de direction la droite SM_1 , de vitesse v , S s'éloignant de M_1 .

1°) Etablir l'équation horaire du mouvement de M_1 :

$$S_{M_1} = f_1(t)$$

On prendra comme origine des temps, l'instant où commence le mouvement horizontal de S. A cet instant, la lame se met à vibrer en se déplaçant verticalement dans le sens positif ascendant.

2°) Montrer que la fréquence du phénomène est donnée par

$$N' = N\left[1 - \frac{v}{V}\right]$$

Calculer cette fréquence pour $\|\vec{v}\| = 2.10^{-2}$ m/s.

3°) Calculer l'élongation et la vitesse du point M_1 à l'instant $t_2 = 0,2$ s.

C/ Deux lames vibrantes identiques à celle utilisée précédemment vibrent perpendiculairement à la surface de l'eau, avec la même fréquence et avec la même amplitude, mais leurs mouvements sont en opposition de phase. Elles frappent la surface du liquide en deux points S_1 et S_2 distants de $D = 1,1.10^{-2}$ m.

1°) Etablir l'équation horaire du mouvement d'un point M de la surface de l'eau, situé à la distance x_1 de S_1 et x_2 de S_2 .

D/ On considère trois lames vibrantes identiques vibrant à la fréquence $N_1 = 10$Hz. Leurs mouvements sont en phase. Elles frappent la surface du liquide en trois points S_1 , S_2 et S_3 . La vitesse de propagation est 0,3 m/s.

1°) Déterminer l'équation horaire du mouvement d'un point M_2 du liquide dans le cas particulier où M_2 est à la distance x de S_1 , 2x de S_2 et 3x de S_3 . On pourra utiliser la construction de Fresnel.

2°) Déterminer la plus petite valeur de x pour laquelle M_2 reste immobile.

INTERFERENCES LUMINEUSES - EFFET PHOTO-ELECTRIQUE

7/ Le spectre d'émission d'une lampe à vapeur de mercure comporte six raies brillantes dans la partie visible.

$\lambda_1 = 0,691$ µm, $\lambda_2 = 0,579$ µm, $\lambda_3 = 0,577$ µm,

$\lambda_4 = 0,546$ µm, $\lambda_5 = 0,436$ µm, $\lambda_6 = 0,405$ µm.

A/ On donne les fréquences correspondant aux seuils photo-électriques :

- pour le césium : $f_1 = 0{,}46.10^{15}$ Hz,
- pour le sodium : $f_2 = 0{,}58.10^{15}$ Hz,
- pour le zinc : $f_3 = 0{,}81.10^{15}$ Hz,

On donne également les valeurs suivantes :

- vitesse de la lumière : $c = 3.10^{8}$ m/s ,
- masse de l'électron : $m = 0{,}9.10^{-30}$ kg,
- charge de l'électron : $e = -1{,}6.10^{-19}$ C.
- constante de Planck : $h = 6{,}62.10^{-34}$ J.s.

1°) On désire fabriquer une cellule photo-électrique sensible au doublet jaune (λ_2 et λ_3) du mercure.

a/ Quelle est la fréquence minimale f_o d'un photon incident ?

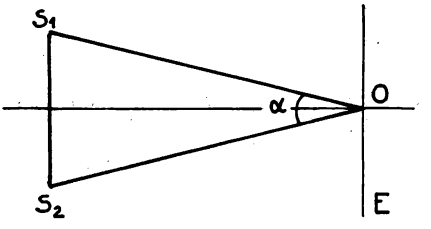
b/ Quel est le travail minimal d'extraction à fournir ?

c/ Quel métal peut-on choisir ?

2°) On utilise la raie λ_4 pour éclairer une cellule au Césium. Quelle est la vitesse d'un électron à la sortie de la cathode ?

3°) Dans la condition du 2°), le potentiel de la cathode étant conventionnellement égal à 0, quel est le potentiel V_o de l'anode qui empêcherait l'arrivée des électrons sur cette électrode (potentiel d'arrêt) ?

B/ On réalise un dispositif d'interférences donnant deux sources ponctuelles S_1 et S_2.



Un filtre approprié ne laisse passer que la raie λ_4 = 0,546 µm du mercure et l'on observe à l'aide d'un oculaire micrométrique, les franges sur un écran E

translucide, disposé perpendiculairement au trajet moyen de la lumière (Voir figure).

L'angle α sous lequel on voit S_1S_2 du point O est 0,001 rd.

1°) Calculer l'interfrange i du phénomène observé sur l'écran.

2°) A quelle distance de O (milieu du phénomène d'interférence) se trouve le milieu de la neuvième frange sombre, comptée à partir de O ?

3°) On enlève le filtre de l'écran. On utilise maintenant un spectroscope dont la fente peut se déplacer parallèlement à S_1S_2 à la place de l'écran précédent. Les sources étant toujours éclairées par la lampe à vapeur de mercure:

a/ Qu'observe-t-on si l'on place la fente du spectroscope au point O?

b/ A quelle distance de O faut-il placer la fente pour observer le centre de la 4 ième raie brillante pour la lumière de longueur d'onde λ_4?

c/ De quelle distance et dans quel sens, faut-il alors déplacer la fente du spectroscope pour obtenir la 4 ième raie brillante de longueur d'onde λ_5?

4°) On éclaire le même dispositif avec de la lumière blanche et l'on place la fente du spectroscope en M, à 2,5 mm de O. Quelles sont les radiations qui en M

a/ présentent une raie brillante;

b/ présentent une raie sombre,
la lumière blanche ayant des longueurs d'onde s'étendant entre 0,8 μm et 0,4 μm?

8/

A/ L'intensité sera prise sous la forme

$$i = I_{max} \sin\omega t$$

la tension étant alors

$$u = U_{max} \sin(\omega t + \varphi).$$

Les valeurs instantanées seront notées en minuscules: i, u, ...

Les valeurs efficaces en majuscules: I, U,...

Les valeurs maximales avec l'indice max: I_{max}, U_{max}...

On dispose d'une prise MN de courant alternatif sinusoïdal de fréquence 50 Hz. Un voltmètre branché entre les bornes M et N indique une tension U = 125 volts.

1°) On place en série entre M et N une résistance pure r = 50 ohms et une bobine B de résistance R et d'inductance L (fig. 1). La tension U aux bornes M et N étant égale à 125 volts, on note alors une tension U_r = 60 volts aux bornes de r et une tension U_B = 80 volts aux bornes de la bobine.

a/ Calculer la valeur de l'intensité efficace I dans le circuit.

b/ Construire le diagramme de Fresnel en utilisant comme échelle 1 mm pour 1V. Les origines des phases seront prises sur un axe Ox (fig. 2). Déduire des mesures faites sur le graphique les valeurs de R et de L, la valeur Z_B de l'impédance de la bobine ainsi que le facteur de puissance de cette bobine B.

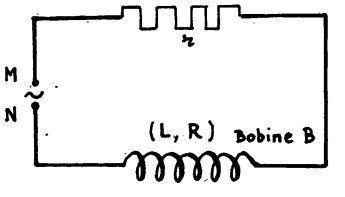


Fig. 1

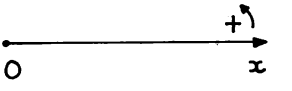


Fig. 2

c/ Retrouver par le calcul les valeurs de Z_B , de R, du facteur de puissance ainsi que la valeur de L.

2°) On place maintenant en série entre M et N la résistance r = 50 ohms, le condensateur de capacité $C = 2.10^{-6}$ F et une bobine B' de résistance R' = 300 ohms et d'inductance

$$L' = 0,95 \text{ H (fig.3)}$$

La tension U est alors 125 volts.

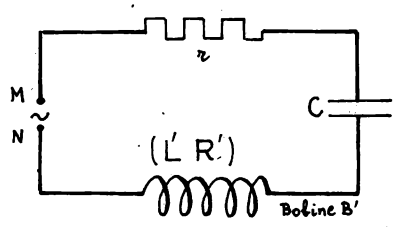


Fig.3

a/ Calculer la valeur de l'intensité efficace dans le circuit et le déphasage entre la tension et l'intensité.

b/ Donner les expressions de l'intensité instantanée dans le circuit et des tensions instantanées entre M et N et aux bornes de chacun des appareils (expressions littérales et numériques).

B/

a/ On applique maintenant une tension V continue réglable entre la cathode C et l'anode A d'un tube thermo-électronique à vide (la figure 4 constitue une représentation très schématique du dispositif expérimental; l'anode circulaire est trouée en son milieu).

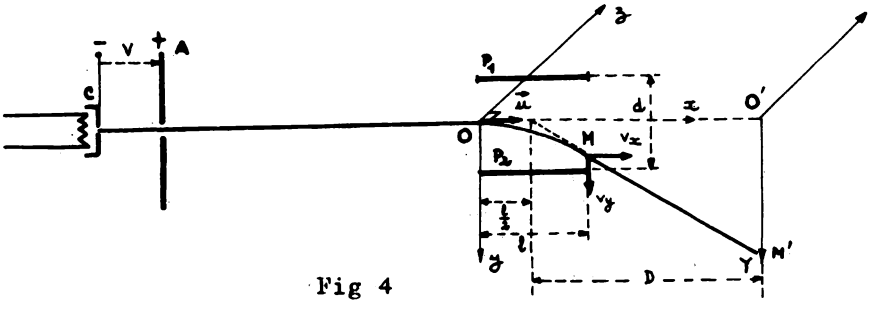


Fig 4

On règle V de façon que la vitesse des électrons au niveau de la plaque A soit $u = 6.10^6$ m/s. Calculer V en se plaçant dans les deux hypothèses suivantes pour la vitesse u_o des électrons à la sortie de la cathode: $u_o = 0$ et $u_o = 500$ m/s. Essayer de conclure. (On admettra que la masse m de l'électron est constante avec la vitesse; $m = 0,9.10^{-30}$ kg; $e = -1,6.10^{-19}$C).

b/ Les électrons arrivent au point O avec la vitesse $\vec{u}$ colinéaire à Ox. Ils sont alors soumis sur une distance

$$\ell = 0,1 \text{ m}$$

à l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ uniforme créé par un condensateur plan dont les armatures P_1 et P_2 sont parallèles au plan xOz (fig.4), symétriques par rapport à ce dernier et distantes de d = 0,05 m.

α - Déterminer le sens de $\vec{E}$ pour obtenir un point d'impact M' des électrons sur la portion O'Y. Quel est de P_1 et de P_2 le potentiel le plus élevé?

β - Le poids de l'électron est négligeable devant la force électrique. En utilisant les lois de la mécanique classique et en rapportant le mouvement aux deux axes rectangulaires Ox et Oy, déterminer le mouvement de l'électron (x (t) et y (t)) et l'équation cartésienne de sa trajectoire y = f(x).

Quelle tension V' doit-on appliquer entre les plaques P_1 et P_2 pour obtenir une déviation α en M de 20° (fig 4)? Donner alors les caractéristiques du vecteur vitesse $\vec{v}$ au point M.

γ - Calculer dans ces conditions l'ordonnée y de M et celle Y de M' sachant que la distance D du milieu des plaques P_1P_2 au plan YO'Z vaut 0,3 m (fig.4).

———•———

9/ Dans tout le problème, on pourra faire l'approximation $\Pi^2 = 10$.

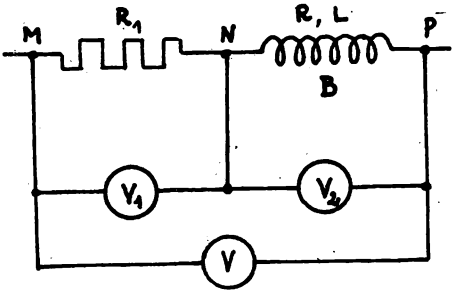
A/ On prend une bobine b d'inductance $\ell = 0,10$ H et de résistance r = 100 ohms et on la monte en série avec un condensateur aux bornes d'un générateur de courant alternatif de fréquence 250 hertz. Il n'y a aucun déphasage entre l'intensité i dans le circuit et la tension u aux bornes du générateur.

1°) Quelle est la capacité du condensateur?

2°) Calculer la tension efficace U donnée par le générateur et la tension efficace aux bornes du condensateur sachant que la tension aux bornes de b est 110 volts.

3°) Quelle est la puissance fournie par le générateur au circuit?

B/ On étudie maintenant une bobine B de résistance R, d'inductance L, qui ne porte sur sa plaque signalétique que les indications: 127 V - 50 Hz. On désire calculer la puissance p absorbée par B en fonctionnement normal. On réalise l'expérience suivante:



- une résistance non inductive R = 80,0 ohms et B sont branchées en série entre les bornes d'une source de tension alternative variable entre 0 et 220 volts, de fréquence 50 hertz;

- lorsque le réglage de la tension est effectué, on note sur les voltmètres dont l'impédance est supposée très grande.

• différence de potentiel entre les bornes M et N de R_1 : U_1 = 100 volts;

• différence de potentiel entre les bornes N et P de B : U_2 = 127 volts;

• différence de potentiel entre les bornes M et P de la source: U = 220 volts.

1°) Calculer l'intensité du courant dans le circuit et l'impédance de B.

2°) Construire (à l'échelle de 1 cm pour 20 V) le diagramme de Fresnel pour les tensions. L'origine des phases

sera la phase de i et quelques lignes d'explications très claires justifieront cette construction.

3°) Faire apparaître, sur le diagramme, le déphasage de la tension u_2 par rapport à l'intensité i. Déterminer le facteur de puissance de B et la puissace qu'elle absorbe. Cette détermination pourra se faire, au choix du candidat,

- par le calcul,
- par mesures directes sur le diagramme de Fresnel.

4°) Calculer la résistance R et l'inductance L de la bobine B.

5°) donner les expressions, en fonction du temps, de l'intensité i du courant dans le circuit et de la tension instantanée u_2 aux bornes de B.

Tracer les deux courbes correspondantes avec les échelles suivantes: 0,1 A par mm pour i, 5 V par mm pour u_2 ; 10^{-2} s pour 6 cm sur l'axe des temps

10/ Les questions A), B) et C) sont indépendantes. Dans tout le problème on utilisera les valeurs numériques choisies parmi les suivantes:

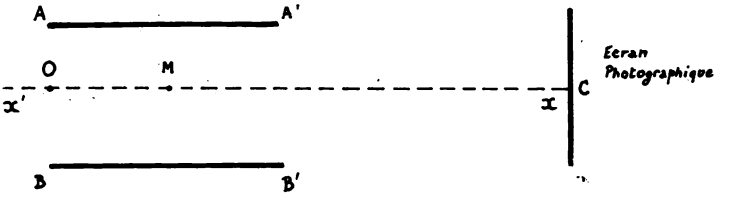
- vitesse de la lumière: c = 300 000 km/s;
- masse de l'atome de radium 226: M = 226,0961 u.m.a
- masse de la particule α: m = 4,003 87 u.m.a. ;
- 1 u.m.a. = $1,67.10^{-27}$ kg;
- charge de l'électron: $|e| = 1,6.10^{-19}$ C.

Le candidat prendra chaque fois le nombre de chiffres significatifs qui convient.

A/ Des particules α (noyau d'hélium $^4_2$He) pénètrent dans un champ électrique uniforme créé entre deux plaques rectangulaires et parallèles AA' = BB' = ℓ = 10 cm, distantes de AB = d = 4 cm et entre lesquelles existe une différence de potentiel

$$V_A - V_B = 100\ 000\ V$$

Les particules pénètrant dans ce champ en un point O (milieu de AB) avec une vitesse v_o = 20 000 km/s dirigée suivant l'axe de symétrie x'x.



On rappelle qu'une particule de charge électrique q placée dans un champ électrique $\vec{E}$ est soumise à une force $\vec{F} = q\vec{E}$. On néglige la force de pesanteur.

a/ Donner en fonction de $V_A - V_B$ l'expression littérale de la force agissant sur une particule α.

Représenter cette force $\vec{f}$.

b/ Quelle est la nature de la trajectoire suivie par la particule α pendant la traversée du champ? Donner une expression littérale de l'équation de cette trajectoire.

c/ Quel est le temps mis par la particule pour traverser le champ ?

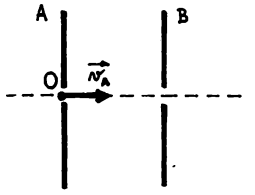
d/ A la sortie du champ, la particule α poursuit un trajet dans l'air avant d'impressionner une plaque photographique, perpendiculaire à x'x, coupant cet axe x'x, en C, tel que OC = 20 cm.

Quelle est la nature du mouvement?

On démontre, mais on admettra que le support de la trajectoire à la sortie du champ passe par M, point de l'axe x'x, tel que $\overline{OM}$ = 5 cm.

A quelle distance du point C de l'écran photographique observe-t-on une tache d'impression?

B/ On fait passer maintenant le faisceau de particules α dans un champ électrique uniforme créé entre deux plaques A et B verticales parallèles entre lesquelles on établit une d.d.p.



$$V_A - V_B = 8\,000 \text{ volts.}$$

Le faisceau de particules α pénètre avec une vitesse horizontale $\vec{v}_A$ d'intensité 20 000 km/s dans le trou percé dans la plaque A.

a/ Quelle est nature du mouvement d'une particule α dans le champ électrique?

b/ Calculer la vitesse v_B de la particule à la sortie de l'armature B.

c/ Quelle est la nature du mouvement après la sortie du champ électrique?

C/ Les particules α peuvent être obtenues à partir de l'isotope du radium $^{226}_{88}$Ra qui subit une désintégration radioactive α en donnant un isotope du radon.

a/ Ecrire l'équation de la transmutation radioactive observée.

b/ La particule α est expulsée du noyau avec une vitesse de 20 000 km/s. Calculer l'énergie cinétique de cette particule.

c/ La désintégration radioactive s'accompagne d'une libération d'énergie.

En appliquant la relation d'Einstein et en admettant que cette énergie est retrouvée sous forme d'énergie cinétique des particules émises, calculer la valeur précise de la masse de l'atome de radon obtenu.

II/ Données numériques utiles:

- Célérité de la lumière dans le vide: $c = 3.10^8$ m/s
- Unité de masse atomique (u.m.a.) = $1,66.10^{-27}$ kg.
- Charge élémentaire: $e = 1,60.10^{-19}$ C.
- Nombre d'Avogadro: $\mathcal{N} = 6,02.10^{23}$.

Dans tout le problème, les particules considérées ont une vitesse suffisamment éloignée de la célérité de la lumière pour qu'il ne soit pas nécessaire d'utiliser les relations de la mécanique relativiste.

A/ Le radionucléide $^{210}_{84}$Po subit une désintégration de type α selon l'équation suivante:

$$^{210}_{84}Po \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{206}_{82}Pb + \gamma$$

1°)

a/ Rappeler brièvement la signification de cette équation.

b/ On donne les masses des différents noyaux:

$^{210}_{84}$Po: $m = 210,0857$ u.m.a. $\quad$ $^{4}_{2}$He: $m_1 = 4,0026$ u.m.a.

$^{206}_{82}$Pb: $m_2 = 206,0789$ u.m.a.

Calculer, en joules et en électronvolts, l'énergie W libérée lors de la désintégration d'un noyau de polonium.

Sous quelles formes cette énergie est-elle libérée?

c/ En supposant que l'on puisse négliger l'énergie du photon γ et que le noyau de polonium soit primitivement au repos, exprimer les énergies cinétiques Ec_1 et Ec_2 d'un noyau d'hélium (de masse m_1) et d'un noyau de plomb (de masse m_2) en fonction de W, de m_1 et de m_2. Comparer ces énergies et conclure.

2°) La demi-vie (ou période) du polonium est 140 jours. On a une masse de 2,00 g de polonium à la date t = 0. Quel sera, à la date t' = 280 jours, le volume d'hélium obtenu, volume mesuré dans les conditions où le volume molaire de l'hélium est 22 400 cm^3 ?

B/ Les noyaux d'hélium émis par le polonium sont utilisés pour bombarder un échantillon de béryllium qui émet alors des neutrons de masse μ.

1°) Un de ces neutrons de vitesse $\vec{V}_o$ heurte un noyau d'hydrogène de masse m_H, au repos. Le choc est élastique et l'on admet que les vitesses des particules après le choc sont colinéaires. La vitesse du neutron est devenue $\vec{V}_1$, celle du noyau d'hydrogène $\vec{V}_H$. Un autre neutron de même vitesse $\vec{V}_o$ rencontre dans les mêmes conditions un noyau d'azote de masse m_N qui après le choc a une vitesse $\vec{V}_N$.

a/ Ecrire les équations qui régissent les chocs neutron-hydrogène et neutron-azote.

b/ Exprimer V_H et V_N et en déduire l'expression du rapport $\frac{V_N}{V_H}$.

2°) On mesure la vitesse des noyaux d'hydrogène.

$$V_H = 3{,}3.10^7 \text{ m/s.}$$

On admettra que les masses du proton et du neutron sont égales.

a/ Calculer les vitesses v_o et v_1 du neutron avant et après la collision neutron-hydrogène. Ce résultat était-il prévisible?

b/ Sachant que le nombre de masse de l'azote est 14, calculer la vitesse du noyau d'azote et celle du neutron après la collision neutron-azote.

C/ Dans une chambre d'ionisation on produit des protons (noyaux d'hydrogène) sans vitesse initiale. On se propose de les accélérer en trois étapes:

1°) Les protons captés sont d'abord accélérés dans un "canon à ions". La tension accélératrice est U = 2 000 volts. Calculer l'énergie cinétique Ec et la vitesse V des protons à la sortie de ce canon.

Masse du proton $\simeq$ 1 u.m.a.

2°) Le faisceau de protons est ensuite soumis à une différence de potentiel élevée U_o qui créé un champ électrique uniforme dans un appareil appelé "accélérateur électrostatique".

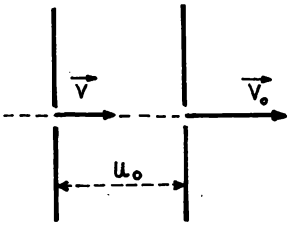


Fig. 1

Déterminer le sens du vecteur champ électrique entre les deux plaques et calculer U_o pour que les protons à la sortie de cet accélérateur aient une énergie cinétique

$$Ec_o = 0,5.10^6 \text{ eV}.$$

Quelle est alors la vitesse $\vec{V}_o$?

3°) Les protons de vitesses $\vec{V}_o$ pénètrent alors dans "l'accélérateur linéaire" constitué d'une série de cylindres (ou électrodes) C_o, C_1 , C_2 ,..., de même section, de longueurs a_o, a_1 , a_2 ,..., de même axe, séparés par un petit intervalle. Les électrodes de rang pair sont reliées à la même borne d'un générateur haute fréquence, les électrodes de rang impair à l'autre borne, ce qui permet d'établir entre deux électrodes successives une tension alternative de valeur maximale U_{max} = 10^5 volts et de fréquence f = $2,5.10^7$ hertz. Chaque proton pénètre dans le premier cylindre C_o avec la

esse $\vec{V}_o$; isolé de tout champ électrique il en ressort avec la même vitesse; il est alors soumis au champ accélérateur qui lui communique une énergie supplémentaire pendant un intervalle de temps t très inférieur à la période T de la tension alternative; il pénètre dans le cylindre C_1 avec une vitesse $\vec{V}_1$.

Les longueurs des cylindres sont telles que chaque proton se trouve entre deux cylindres, donc accéléré, chaque fois que la valeur absolue de la différence de potentiel passe par sa valeur maximale.

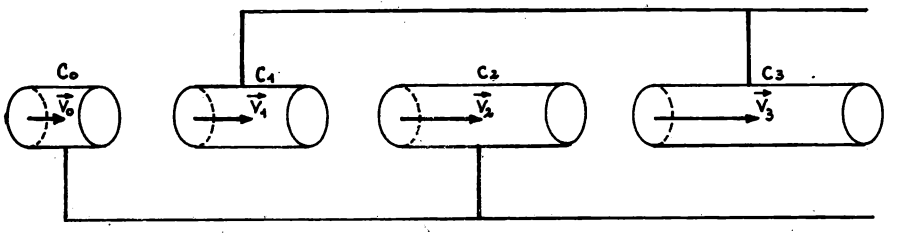


Fig. 2.

a/ Exprimer l'énergie cinétique Ec_n d'un proton quand il pénètre dans le cylindre C_n de rang n en fonction de Ec_o, n, U_{max} et de la charge du proton.

b/ Calculer le nombre n de cylindres nécessaires pour qu'à la sortie de l'appareil l'énergie cinétique soit $Ec_n = 5.10^6$ eV

كتاب الفيزيا
السنة السابعة رياضيات علوم وتقنية

ثمن البيع
للعموم
0 د 990